12. **Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Симаков С. М., Тимофеев Е. И.** Разрушение воздушных пузырьков в жидкости ударной волной.—«Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 4.
13. **Иорданский С. С.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1960, № 3.
14. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости.—«Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 6.
15. **Демидович Б. П.** и др. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967.
16. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
17. **Ляхов Г. М.** Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1977.

УДК 532.52.01

ДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ НА ПОЛОСТЬ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Григорьев, Г. С. Доронин, В. Л. Одинокий

(Москва)

В работе [1] рассмотрен случай схлопывания полости под действием постоянного внешнего давления p_0. Однако имеется класс задач, в которых внешнее воздействие представляет собой кратковременные импульсы давления. Такая ситуация имеет место, например, при ударном нагружении пористых тел.

Пусть в вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ имеется пустая сферическая полость радиуса r_0. Давление на бесконечности (вдали от полости) $p_\infty(t, \tau)$ является произвольной функцией времени при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и обращается в нуль при $t > \tau$.

Движение сферически-симметрично, описывающие его уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

где $u(r, t)$ — скорость; $p(r, t)$ — давление.

На поверхности полости нормальное напряжение σ_{rr} отсутствует (полость пустая), а так как $\sigma_{rr} = -p + 2\eta du/dr$, то $p_1 = 2\eta(\partial u/\partial r)_1$. Здесь и в дальнейшем индексом 1 отмечены значения величин на границе; η — коэффициент динамической вязкости.

Вторым граничным условием будет

$$p = p_\infty(t, \tau) \text{ при } r = \infty.$$

Из первого уравнения (1) получаем $u(r, t) = u_1 r_1^2/r^2$.

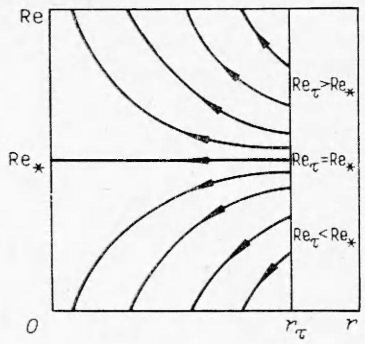
Подставляя это выражение для u во второе уравнение (1) и интегрируя от r_1 до ∞ с учетом граничных условий для p, получим

$$\frac{du_1}{dr_1} + \frac{3}{2}\frac{u_1}{r_1} + \frac{p_\infty}{\rho u_1 r_1} + \frac{4\nu}{r_1^2} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим движение полости при $t > \tau$, когда $p_\infty = 0$. В качестве начальных данных для радиуса полости и скорости движения ее поверхности возьмем значения этих величин в момент прекращения действия внешнего давления. Решение имеет вид

$$u_1 = \frac{\nu\left(\sqrt{\frac{r_\tau}{r_1}}(8 - \mathrm{Re}_\tau) - 8\right)}{r_1}, \tag{3}$$

где $\mathrm{Re}_\tau = |u_\tau| r_\tau/\nu$ — значение числа Рейнольдса при $t = \tau$; u_τ, r_τ — значения радиуса полости и скорости ее поверхности соответственно при $t = \tau$.



Фиг. 1

Соотношение (3) позволяет получить закон изменения числа Рейнольдса при $t > \tau$

$$\mathrm{Re} = \sqrt{\frac{r_\tau}{r_1}}(\mathrm{Re}_\tau - 8) + 8, \tag{4}$$

откуда следует, что при $\mathrm{Re}_\tau > 8$ число Рейнольдса растет с уменьшением r_1 и стремится к бесконечности как $r_1^{-1/2}$. При $\mathrm{Re}_\tau < 8$ число Рейнольдса с уменьшением r_1 падает и становится равным нулю при $r_1/r_\tau = (1 - \mathrm{Re}_\tau/8)^2$. Скорость границы полости при этом значении радиуса обращается в нуль и ее дальнейшее движение прекращается. При $\mathrm{Re}_\tau = 8$ число Рейнольдса остается постоянным до полного схлопывания полости.

Таким образом, значение $\mathrm{Re}_\tau = 8$ является критическим (обозначим его Re_*), оно разграничивает два различных режима схлопывания полости (фиг. 1).

Если импульс внешнего давления таков, что $\mathrm{Re}_\tau > \mathrm{Re}_*$, то имеет место схлопывание полости, причем $u_1 \sim r_1^{-3/2}$ при малых r_1. При $\mathrm{Re}_\tau = \mathrm{Re}_*$ также происходит заполнение полости, однако $u_1 \sim r_1^{-1/2}$. При $\mathrm{Re}_\tau < \mathrm{Re}_*$ происходит частичное заполнение полости.

Выражение для предельного радиуса полости при любых значениях Re_τ может быть получено из (4)

$$\frac{r_{\text{пр}}}{r_\tau} = \left(1 - \frac{\mathrm{Re}_\tau}{\mathrm{Re}_*}\right)^2 U_-(\mathrm{Re}_* - \mathrm{Re}_\tau),$$

где $r_{\text{пр}}$ — предельный радиус полости; $U_-(x)$ — единичная антисимметричная функция.

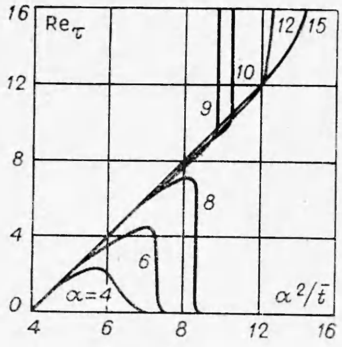
Из (3) следует, что реализация того или иного режима схлопывания полностью определяется величиной Re_τ.

Для определения зависимости Re_τ от импульса давления $I = \int\limits_0^\tau p\,dt$ запишем уравнение для числа Рейнольдса как функции времени, которое следует из уравнения (2):

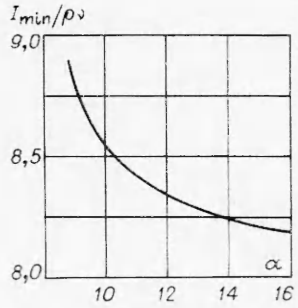
$$\frac{1}{\nu}\frac{d\,\mathrm{Re}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}^2}{r_1^2} + \frac{p_\infty}{\nu^2\rho} - 4\frac{\mathrm{Re}}{r_1^2}. \tag{5}$$

Переходя к безразмерным величинам $\bar{t} = \frac{\nu t}{r_0^2}$, $\bar{r} = \frac{r_1}{r_0}$, $\alpha = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}}\frac{r_0}{\nu}$ и дополняя уравнение (5) уравнением движения, получаем систему

$$\frac{d\,\mathrm{Re}}{d\bar{t}} = \frac{\mathrm{Re}}{2\bar{r}^2}(\mathrm{Re} - 8) + \alpha^2, \quad \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -\frac{\mathrm{Re}}{\bar{r}} \tag{6}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

с начальными условиями $\mathrm{Re}(0) = 0$, $\bar{r}(0) = 1$. В случае произвольной зависимости $p_\infty(t, \tau)$ Re_τ определяется численно.

Рассмотрим предельный случай, когда при $\tau \to 0$ импульс давления остается конечным.

Решение системы (6) имеет вид

$$\mathrm{Re}_\tau = I/\rho\nu, \ \bar{r} = 1.$$

Для полного заполнения полости необходимо, чтобы $I \geqslant \mathrm{Re}_*\rho\nu$.

При $I < \mathrm{Re}_*\rho\nu$ происходит частичное заполнение полости, причем

$$r_{\text{пр}}/r_0 = (1 - I/\mathrm{Re}_*\rho\nu)^2.$$

Для прямоугольных импульсов давления

$$p_\infty(t, \tau) = p_0 U_-(\tau - t), \ p_0 = \mathrm{const}$$

величина Re_τ существенно зависит от параметра $\alpha = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}}\frac{r_0}{\nu}$: она или неограниченно возрастает с увеличением τ, или, достигая максимума при некотором τ, в последующее время стремится к нулю. В работе [1] исследовано движение полости в вязкой жидкости под действием постоянного давления и получено критическое значение параметра $\alpha_* = 8{,}4$. При $\alpha > 8{,}4$ скорость границы полости с уменьшением радиуса неограниченно возрастает как $r^{-3/2}$, а следовательно, неограниченно растет и число Рейнольдса, $\mathrm{Re} = |u_1| r_1/\nu \sim r_1^{-1/2}$. Из закона изменения скорости (2) при отсутствии внешнего давления следует, что при $\alpha < 8{,}4$ максимальное значение $\mathrm{Re}_\tau < \mathrm{Re}_*$ и при любых конечных значениях импульса давления происходит частичное заполнение полости. Зависимость Re_τ от импульса давления $I = p_0\tau$, полученная в результате численного интегрирования системы (6), приведена на фиг. 2.

Для $\alpha > 8{,}4$ имеется минимальное значение импульса давления $I_{\min}$, при котором полость схлопывается, при этом $\mathrm{Re}_\tau = \mathrm{Re}_*$. Зависимость $I_{\min}$ от α приведена на фиг. 3.

Поступила 11 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Забабахин Е. И.** Заполнение пузырьков в вязкой жидкости.— ПММ, 1960, т. 24 вып. 6.