

**О ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ВНУТРЕННЕМ ТРЕНИИ
ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

С. И. Мешков, Т. Д. Шермергор
(Воронеж)

Решается краевая задача продольных колебаний однородного изотропного стержня, один конец которого закреплен, а на другой действует импульсная сила. Объемная часть тензора напряжений описывается средой А. Ю. Ишлинского со временем релаксации τ_2 (стандартное линейное тело), а сдвиговая — средой Максвелла со временем релаксации τ_1 . Показано, что температурная зависимость внутреннего трения такой среды дает при продольных колебаниях релаксационный пик и фон, причем последний растет вплоть до бесконечности, после чего колебания сменяются аperiodическим процессом. Решение краевой задачи сопоставляется с расчетом соответствующей реологической модели. Для области, не примыкающей к точке перехода в аperiodичность, результаты обоих методов совпадают, кроме области релаксационного пика, где реологическая модель дает несколько заниженный результат.

В области, примыкающей к аperiodичности, когда частота начинает резко уменьшаться, реологическая модель непригодна для расчета, так как не учитывает изменения частоты колебаний. Показано, что при $\Delta K / K_\infty = 0.1$ (K — модуль всестороннего сжатия, $\Delta K = K(\omega = \infty) - K(\omega = 0)$; ω — частота) пик, обусловленный объемной релаксацией, появляется лишь при $\tau_1 / \tau_2 \approx 10^3$. Для $\tau_1 / \tau_2 \sim 1$ объемная релаксация не проявляется и температурные кривые внутреннего трения при продольных колебаниях должны быть такими же, как и для крутильных колебаний.

Применение термодинамики необратимых процессов к твердому телу, находящемуся в неравновесном состоянии, приводит к выводу, что в линейном приближении и при наличии одного релаксационного механизма тензор напряжений однородного изотропного тела характеризуется двумя временами релаксаций, одно из которых τ_1 характеризует релаксацию сдвиговых напряжений, а другое τ_2 — объемных. Выражение тензора напряжений σ_{ik} такой среды в пренебрежении релаксацией теплового потока можно написать в виде [1,2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = & K_0 \varepsilon_{il} \delta_{ik} + 2\mu \int_{-\infty}^t \exp \frac{t'-t}{\tau_1} \dot{\varepsilon}_{ik}(t') dt' + \\ & + (K_\infty - K_0) \delta_{ik} \int_{-\infty}^t \exp \frac{t'-t}{\tau_2} \dot{\varepsilon}_{il}(t') dt' \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ε_{ik} — девиатор тензора деформаций ε_{ik} , точкой обозначена производная по времени; K_0 и K_∞ — соответственно релаксированный и нерелаксированный адиабатические модули всестороннего сжатия. Так как при высоких температурах сдвиговые напряжения термодинамически неустойчивы, в (1) равновесное значение модуля сдвига положено равным нулю [3] и поэтому μ есть нерелаксированный модуль сдвига μ_∞ .

Одним из методов определения времен релаксаций τ_1 и τ_2 является метод внутреннего трения. Для определения времени релаксации сдвиговых напряжений τ_1 используются вынужденные или свободные затухающие колебания крутильного маятника [4]. Из уравнения (1) вытекает, что для крутильных колебаний, когда существуют только сдвиговые деформации, внутреннее трение с ростом температуры должно монотонно возрастать [5], так как для большинства релаксационных механизмов

$\tau = \tau_0 \exp(H/RT)$, где H — энергия активации, R — газовая постоянная. Такая температурная зависимость внутреннего трения наблюдается экспериментально для монокристаллов чистых металлов [6], где механизмом внутреннего трения является диффузия вакансий [7].

С другой стороны, тот же релаксационный механизм должен приводить к пику внутреннего трения для чисто объемных деформаций. Так как нет опытов по непосредственному изучению чисто объемной релаксации, то представляет интерес рассмотреть возможность определения времени релаксации объемных напряжений τ_2 по затуханию продольных колебаний, когда должна иметь место релаксация как сдвиговых, так и объемных напряжений.

Рассмотрим затухающие продольные колебания стержня, один конец которого закреплен, а на свободный конец действует импульсная сила. Для решения поставленной задачи выразим тензор деформаций через тензор напряжений при помощи равенства (1), аналогично тому, как это делается для расчета упругих колебаний [8]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ik} = & \frac{1}{9K_\infty} \delta_{ik} \dot{\sigma}_{ll} + \frac{1}{9\tau} \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_\infty} \right) \delta_{ik} \int_{-\infty}^t \dot{\sigma}_{ll} \exp \frac{t'-t}{\tau} dt' + \\ & + \frac{1}{2\mu_\infty} \left(\dot{\sigma}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \dot{\sigma}_{ll} \right) + \frac{1}{2\mu_\infty \tau_1} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll} \right) \quad \left(\tau \equiv \tau_2 \frac{K_\infty}{K_0} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что деформация стержня, расположенного по оси z , однородна, т. е. тензор деформаций ϵ_{ik} постоянен вдоль оси z . Тогда и тензор напряжений всюду постоянен, и его можно найти из условия, что на свободной боковой поверхности силы отсутствуют ($\sigma_{ik} n_k = 0$). Так как компонента n_z единичного вектора на боковой поверхности равна нулю, то все компоненты σ_{ik} за исключением σ_{zz} должны равняться нулю.

Имея это в виду, из формулы (2) получим зависимость (3)

$$\ddot{\epsilon}_{zz} + \frac{1}{\tau} \dot{\epsilon}_{zz} = \left(\frac{1}{3\mu_\infty} + \frac{1}{9K_\infty} \right) \ddot{\sigma}_{zz} + \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{9K_0} + \frac{1}{3\mu_\infty} \right) + \frac{1}{3\mu_\infty \tau_1} \right] \dot{\sigma}_{zz} + \frac{1}{3\mu_\infty \tau_1 \tau} \sigma_{zz}$$

Так как

$$\left(\frac{1}{3\mu} + \frac{1}{9K} \right) = \frac{1}{E} \quad (E - \text{модуль Юнга}) \quad (4)$$

то выражения в круглых скобках представляют собой, соответственно, нерелаксированное и промежуточное (нерелаксированные сдвиговые и релаксированные объемные напряжения) значения величины, обратной модулю Юнга, т. е. податливости.

Зависимость (3) эквивалентна выражению

$$\sigma_{zz} = A \int_{-\infty}^t \dot{\epsilon}_{zz} \exp \frac{t'-t}{\tau_1^*} dt' + B \int_{-\infty}^t \dot{\epsilon}_{zz} \exp \frac{t'-t}{\tau_2^*} dt' \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}^* = & \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\mu_\infty}{3K_0} \right) \tau_1 + \frac{1}{K_0} K_\infty \tau_2 \right] \pm \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{\mu_\infty}{3K_0} \right) \tau_1 + \frac{1}{K_0} K_\infty \tau_2 \right]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\tau_1 \tau_2 (3K_\infty + \mu_\infty)}{3K_0} \right\}^{1/2}, \quad A = E_\infty \frac{\tau_2^* (\tau_1^* - \tau)}{\tau (\tau_1^* - \tau_2^*)}, \quad B = E_\infty \frac{\tau_1^* (\tau - \tau_2^*)}{\tau (\tau_1^* - \tau_2^*)} \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражение (5) в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} \quad (7)$$

получим уравнение продольных колебаний рассматриваемого стержня

$$\rho \ddot{u}_z = A \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial z^2} \exp \frac{t-t'}{\tau_1^*} dt' + B \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial z^2} \exp \frac{t-t'}{\tau_2^*} dt' \quad (8)$$

которое в соответствии с поставленной задачей решаем со следующими граничными и начальными условиями:

$$u_z|_{z=0} = 0 \quad \sigma_{zz}|_{z=L} = F \delta(t) \quad (9)$$

где F — постоянный импульс напряжения, $\delta(t)$ — δ -функция Дирака, описывающая мгновенное действие приложенной силы. Для решения уравнения (8) с условиями (9) используем интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений получим следующие выражения:

$$\frac{d^2 U_z}{dz^2} = \lambda^2 U_z, \quad \lambda^2 \equiv \frac{p^2 \rho}{A p \tau_1^* (p \tau_1^* + 1)^{-1} + B p \tau_2^* (p \tau_2^* + 1)^{-1}} \quad (10)$$

$$U_z|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{dU_z}{dz} \right|_{z=L} = \frac{F \lambda^2}{p^2 \rho} \quad (11)$$

где U_z — трансформанта Лапласа z -й компоненты вектора смещения u . Решение уравнения (10) с условиями (11) имеет вид

$$U_z = \frac{\lambda F}{p^2 \rho} \frac{\text{sh } \lambda z}{\text{ch } \lambda L} \quad (12)$$

Чтобы перейти в выражении (12) к оригиналу, воспользуемся теоремой Коши о разложении мероморфной функции U_z в ряд, в результате чего получим

$$U_z = \frac{2F}{\rho L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{z}{L} \right] \Phi_n(p), \quad \Phi_n = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} \quad (13)$$

$$Q_1(p) = (p \tau_1^* + 1) (p \tau_2^* + 1) \quad (14)$$

$$Q_2(p) = p^2 (p \tau_1^* + 1) (p \tau_2^* + 1) + a_n^2 p [A \tau_1^* (p \tau_2^* + 1) + B \tau_2^* (p \tau_1^* + 1)] \quad \left(a_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{L \sqrt{\rho}} \right) \quad (15)$$

где L — длина, ρ — плотность стержня.

Переходя в выражении (13) от изображения к оригиналу, получим

$$u_z(z, t) = \frac{2F}{\rho L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{z}{L} \right] \times \\ \times \sum_{\nu=1}^4 \{ (p_\nu \tau_1^* + 1) (p_\nu \tau_2^* + 1) \frac{1}{\tau_1^* \tau_2^*} \left[\prod_{\nu \neq i}^4 (p_\nu - p_i) \right]^{-1} \exp(p_\nu t) \} \quad (16)$$

где p_ν , p_i — корни уравнения $Q_2(p) = 0$. Вид этих корней зависит от знака дискриминанта

$$D_n = m_n^3 + q_n^2 \quad (17)$$

где

$$m_n = \frac{4}{3} s_1^* s_2^* + \frac{1}{3} E_\infty a_n^2 - \left[\frac{4}{3} (s_1^* + s_2^*) \right]^2 \quad (18)$$

$$q_n = \left[\frac{4}{3} (s_1^* + s_2^*) \right]^3 - \frac{1}{6} s_1^* s_2^* (s_1^* + s_2^*) + \\ + \frac{1}{3} a_n^2 \left[s_1^* \left(B - \frac{1}{2} A \right) + s_2^* \left(A - \frac{1}{2} B \right) \right] \quad (19)$$

и через $s_{1,2}^* = 1 / \tau_{1,2}^*$ обозначены частоты релаксации [9].

Если $D_n > 0$, то из формулы (16) получаем следующее выражение;

$$u_z(z, t) = \frac{Fz s_1^* s_2^*}{As_2^* + Bs_1^*} + \frac{2F}{\rho L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin[\pi(n + 1/2)z/L]}{(9\kappa_n^2 + \omega_n^2)\beta_n} \{ - [s_1^* s_2^* - \beta_n (s_1^* + s_2^*) + \beta_n^2] \exp(-\beta_n t) + \frac{(f_n^2 + h_n^2)^{1/2} \beta_n}{(\gamma_n^2 + \omega_n^2)\omega_n} s_1^* s_2^* \exp(-\gamma_n t) \sin(\omega_n t + \psi_n) \} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_n &= -2 \left[\kappa_n - \frac{1}{3} (s_1^* + s_2^*) \right], \quad \gamma_n = \kappa_n + \frac{1}{3} (s_1^* + s_2^*) \\ f_n &= (s_1^* s_2^*)^{-1} (\gamma_n^2 + \omega_n^2) (9\kappa_n^2 + \omega_n^2 - 6\gamma_n \kappa_n) + 3\gamma_n \kappa_n - \omega_n^2 \\ h_n &= \omega_n \{ 3\kappa_n + \gamma_n [1 - 2 (s_1^* s_2^*)^{-1} (\omega_n^2 + \gamma_n^2)] \} \\ \psi_n &= \arctg \frac{h_n}{f_n} \end{aligned} \quad (21)$$

Условие $D_n > 0$ осуществляется в двух случаях.

1) При $m_n > 0$. Тогда величины κ_n и ω_n определяются формулами

$$\omega_n = \sqrt[3]{3} r_n \operatorname{ch} \theta_n, \quad \kappa_n = -r_n \operatorname{sh} \theta_n \quad (22)$$

$$r_n = \pm \sqrt{|m_n|}, \quad \theta_n = \frac{1}{3} \operatorname{arcsch}(q_n r_n^{-3})$$

При этом знак r_n должен быть одинаков со знаком q_n .

2) При $m_n < 0$, но $q_n^2 > |m_n|^3$. В этом случае величины κ_n и ω_n равны

$$\omega_n = \sqrt[3]{3} r_n \operatorname{sh} \theta_n, \quad \kappa_n = -r_n \operatorname{ch} \theta_n \quad (23)$$

$$r_n = \pm \sqrt{|m_n|}, \quad \theta_n = \frac{1}{3} \operatorname{arcch}(q_n r_n^{-3})$$

Если $D_n < 0$, то все корни p , вещественные, и выражение (16) описывает аperiodическое движение.

Таким образом, из выражения (20) видно, что зависимость вектора смещения от времени дается тремя слагаемыми. Первое слагаемое описывает новое положение равновесия, около которого происходят затухающие колебания, второе характеризует упругое последствие и, наконец, третье представляет собой бесконечную сумму затухающих со временем гармонических колебаний. Логарифмический декремент затухания для n -й гармоники, который принимается за меру внутреннего трения, равен

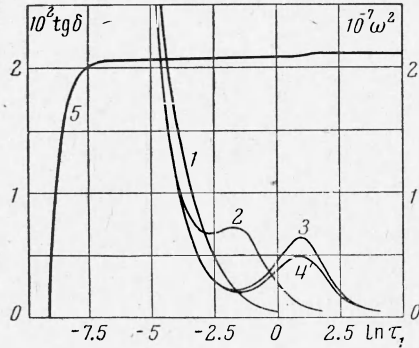
$$\Delta_n = \left[\kappa_n + \frac{1}{3} (s_1^* + s_2^*) \right] \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (24)$$

где ω_n — циклическая частота, вычисляемая по формулам (22) или (23), в зависимости от знака m_n .

Для численной оценки полученных результатов ограничимся рассмотрением нулевой гармоники ($n = 0$). Тогда, воспользовавшись механическими характеристиками алюминия: модуль сдвига $\mu = 2.4 \cdot 10^{11}$ дн/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$, плотность $\rho = 2.7$ г/см³ — и приняв для относительной релаксации объемного модуля $\Delta K/K_\infty = 0.1$, получим приведенную на фиг. 1 зависимость от $\ln \tau_1$ внутреннего трения $\operatorname{tg} \delta = \Delta_0/\pi$ и квадрата частоты, по которой обычно экспериментально оценивается динамический модуль Юнга [6, 10], в функции $\ln \tau_1$.

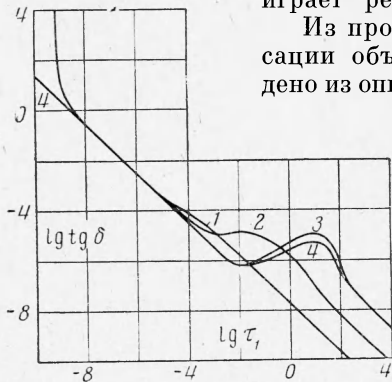
Так как $\ln \tau_1 = \ln \tau_0 + H/RT$, то величина, отложенная по оси абсцисс, пропорциональна $1/T$, т.е. на фиг. 1 фактически представлена температурная зависимость внутреннего трения и квадрата частоты. При по-

строении графиков в качестве параметров выбирались следующие отношения времен релаксаций $\tau_1/\tau_2 = 10^2, 10^3, 10^4$. Как видно на фиг. 1, пик, обусловленный релаксацией объемных напряжений при $\Delta K/K_\infty = 0.1$, проявляется лишь начиная с $\tau_1/\tau_2 \sim 10^3$. Однако объемную релаксацию можно обнаружить и при меньших отношениях τ_1/τ_2 , если воспользоваться двойными логарифмическими координатами $\ln \operatorname{tg} \delta - \ln \tau_1$. Соответствующие кривые для тех же значений параметров τ_1/τ_2 приведены на фиг. 2, где область релаксации для $\tau_1/\tau_2 = 10^2$ проявляется в виде участка изгиба области линейной зависимости.



Фиг. 1. Зависимость внутреннего трения $\operatorname{tg} \delta$ от логарифма времени релаксации $\ln \tau_1$, кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\tau_1/\tau_2 = 10^2, 10^3$ и 10^4 ; кривая 4 рассчитана по реологической модели для $\tau_1/\tau_2 = 10^4$; кривая 5 — зависимость квадрата частоты колебаний ω^2 для $\tau_1/\tau_2 = 10^4$

При выбранном значении $\Delta K/K_\infty = 0.1$ релаксация квадрата частоты, обусловленная релаксацией объемных напряжений, будет незначительной $\sim 0.95\%$. Основную роль в релаксации квадрата частоты вплоть до нуля играет релаксация сдвиговых напряжений.



Фиг. 2. Зависимость внутреннего трения от времени релаксации в двойных логарифмических координатах. Обозначения кривых те же, что на фиг. 1

через комплексные модули сдвига и всестороннего сжатия μ^* и K^* , используя, согласно формуле (1), для μ^* модель Максвелла, а для K^* — модель стандартного линейного тела. Тогда для тангенса угла сдвига фаз между напряжением и деформацией получим формулу

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{Im} 1/E^*}{\operatorname{Re} 1/E^*} = \left(\frac{1}{\mu_\infty \omega \tau_1} + \frac{1}{3} \frac{\Delta K \omega \tau_2}{K_0^2 + K_\infty^2 \omega^2 \tau_2^2} \right) \left(\frac{1}{\mu_\infty} + \frac{1}{3} \frac{K_0 + K_\infty \omega^2 \tau_2^2}{K_0^2 + K_\infty^2 \omega^2 \tau_2^2} \right)^{-1} \quad (26)$$

При помощи двойного логарифмического масштаба удобно также проследить температурную зависимость внутреннего трения во всей области колебаний вплоть до точки перехода. Как и следовало ожидать, непосредственно перед точкой перехода в аperiodичность внутреннее трение резко возрастает, причем одинаково для всех рассмотренных значений τ_1/τ_2 .

Из проведенной оценки следует, что время релаксации объемных напряжений τ_2 может быть найдено из опытов по изучению продольных затухающих колебаний при условии, что $\tau_2 \ll \tau_1$. В случае, если $\tau_2 \sim \tau_1$ или $\tau_2 > \tau_1$, релаксация объемных напряжений при малом дефекте объемного модуля не проявляется, и внутреннее трение такой среды даст чистый фон, обусловленный релаксацией сдвиговых напряжений, аналогично тому, что дает такая среда для крутильных колебаний.

Сравним полученные результаты с расчетом соответствующей реологической модели. Так как релаксационные процессы при продольных колебаниях описываются комплексным модулем Юнга E^* , для вывода формулы внутреннего трения выразим E^*

Кривая, построенная по формуле (26) для $\tau_1/\tau_2 = 10^4$, приведена на фиг. 1 и 2, откуда видно, что реологическая модель дает несколько заниженное значение внутреннего трения в области релаксационного пика.

Для обсуждения этого расхождения оценим вклад нулевой гармоники в общее движение. Это можно сделать, взяв отношение квадратов амплитуд при $t = 0$, стоящих в формуле (20) перед $\sin(\omega_n t + \psi_n)$. В области пика при $\tau_1/\tau_2 = 10^4$ для первой и нулевой гармоник это отношение равно 0.11, что в точности совпадает с найденной оценкой первых гармоник при свободных крутильных колебаниях стержня, сдвиговые напряжения которого описываются реологическим уравнением Максвелла, где для оценки вклада гармоник получена формула $v_n = 8/\pi^2 (2n + 1)^2$ [5]. Таким образом, вклад высших гармоник при колебаниях свободного стержня не очень мал. Однако высшие гармоники можно практически устранить, присоединяя к стержню инерционную подвеску [11,12]. Тем не менее и после подавления высших гармоник для крутильных колебаний указанное расхождение будет иметь место [12], поэтому можно считать, что оно не является следствием пренебрежения высшими гармониками. Но учитывая, что различие результатов расчета внутреннего трения в области пика по реологической модели и по решению краевой задачи сравнительно невелико, а расчеты в последнем случае весьма громоздки, для приближенного описания пика внутреннего трения можно использовать реологическую модель.

Однако в области, примыкающей к точке перехода в аperiodичность, реологическая модель дает неправильный результат. Это связано с тем, что при расчете по реологической модели частота и температура рассматриваются как независимые переменные, тогда как в действительности нагревание образца меняет частоту колебаний, причем это изменение весьма существенно вблизи точки перехода в аperiodичность.

Авторы благодарят В. С. Постникова и Д. Д. Ивлева за обсуждение полученных результатов.

Поступила 24 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Финкельштейн Б. Н., Фастов Н. С. К теории релаксационных явлений в твердых телах. ДАН СССР, 1950, т. 71, № 5, стр. 875.
2. Шермергор Т. Д., Постников В. С. Температурная релаксация в твердых телах. Сб. трудов III Всесоюзной конференции по релаксационным явлениям в металлах и сплавах (в печати).
3. Фастов Н. С. К термодинамике необратимых процессов в упруго-деформированных телах. Пятый сборник «Проблемы металловедения и физики металлов». Металлургиздат, 1958, стр. 550.
4. Новик А. С. Внутреннее трение в металлах и сплавах. Сб. «Успехи физики металлов», Metallurgizdat, 1956, т. 1, стр. 7.
5. Шермергор Т. Д., Мешков С. И. К описанию фона внутреннего трения при крутильных колебаниях. Физ. металлов и металловедение, 1962, т. 13, вып. 6, стр. 817.
6. Постников В. С. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов. Успехи физ. наук, 1958, т. 66, № 1, стр. 43.
7. Шматов В. Т., Гринь А. Б. Высокотемпературное внутреннее трение в металлах. Физ. металлов и металловедение, 1961, т. 12, вып. 4, стр. 600.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
9. Gross V. Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Paris, 1953.
10. Кэтин-суй. Опытное доказательство вязкого поведения границ зерен в металлах. Сб. «Упругость и неупругость металлов». ИЛ, 1954, стр. 198.
11. Постников В. С. К вопросу затухания колебаний цилиндрического образца. Физ. металлов и металловедение, 1958, т. 6, вып. 3, стр. 523.
12. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О температурной зависимости внутреннего трения крутильного маятника. ПМТФ, 1962, № 6, стр. 98.