

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВНУТРЕННЕЙ БАЛЛИСТИКИ РЕГУЛИРУЕМОГО РДТТ

А. М. Липанов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426001 Ижевск

Рассматривается решение обратной задачи внутренней баллистики ракетного двигателя на твердом топливе для случая, когда давление в двигателе является известной функцией времени. При известном давлении задача сводится к расчету температуры и площади критического сечения соплового блока. Получено аналитическое решение обратной задачи. Показано, что при изменении давления меняется и температура продуктов сгорания. Установлено, что увеличение температуры продуктов сгорания при быстром росте давления больше, чем при сжигании твердого топлива в условиях постоянного объема.

Рассматривается такой период работы двигателя, когда твердое топливо (ТТ) горит стационарно, а условия в двигателе позволяют осреднить давление и температуру продуктов сгорания по свободному объему двигателя. В этом случае выполняется следующая система уравнений [1]:

$$\frac{dW\rho}{dt} = S_T \rho_T u_T - ApF_{кр}, \quad (1)$$

$$\frac{dW\rho c_v T}{dt} = S_T \rho_T u_T H_T - ApF_{кр} c_p T, \quad (2)$$

$$\frac{dW}{dt} = S_T u_T, \quad (3)$$

$$\frac{de}{dt} = u_T. \quad (4)$$

Здесь p , ρ , T — давление, плотность и температура продуктов сгорания;

$$A = \frac{\varphi_2 B(k)}{\sqrt{\chi RT}} \quad (5)$$

— коэффициент истечения, φ_2 — коэффициент расхода,

$$B(k) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \sqrt{k}, \quad (6)$$

$k = c_p/c_v$, c_p , c_v — изобарная и изохорная теплоемкости продуктов сгорания; χ — поправка на незавершенность химических реакций при движении продуктов сгорания в двигателе до минимального сечения сопла; R — газовая постоянная; W , $F_{кр}$ — свободный объем и площадь критического сечения соплового блока

двигателя; S_T , ρ_T , u_T , H_T — поверхность горения, плотность, скорость горения ТТ и энтальпия продуктов сгорания.

Скорость горения ТТ u_T будем рассматривать как функцию давления

$$u_T = u_1 p^\nu, \quad (7)$$

где u_1 — коэффициент скорости горения, являющийся функцией температуры заряда, ν — показатель степени в степенном законе скорости горения.

Площадь поверхности горения заряда S_T зависит от толщины сгоревшего свода e и определяется конструкцией заряда.

Рассмотрим ракетный двигатель на твердом топливе (РДТТ) с зарядом, показанными на рис. 1. Переднее днище двигателя сферическое, а сопловое — эллипсоидальное. Сопло утоплено в двигатель так, что его передняя кромка соответствует границе пересечения соплового днища и обечайки. Топливо горит и над утопленной частью сопла. Заряд в сопловой части двигателя раскреплен с днищем двигателя. Двигатель имеет следующие размеры: длина $L = 8$ м, диаметр $D = 2$ м, диаметр канала заряда $d_n = 0,5$ м, диаметр критического се-

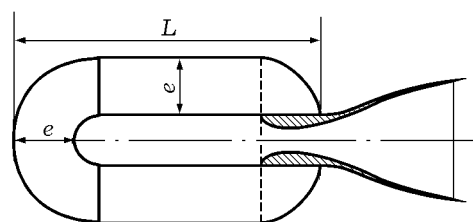


Рис. 1. Продольное сечение РДТТ

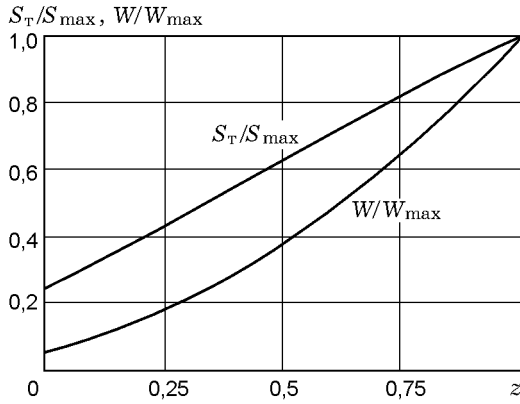


Рис. 2. Изменение поверхности горения и свободного объема двигателя как функций относительной толщины сгоревшего свода

чения сопла $d_{кр} = 0,4$ м. Отношение малой (a) и большой полуосей эллипса (последняя совпадает с радиусом двигателя) равно 0,6.

В рассматриваемом случае зависимость поверхности горения от толщины сгоревшего свода имеет вид

$$S_T = 2\pi e_{\max}^2 \left(\frac{r_H}{e_{\max}} + z \right) \left[\frac{l_{об}}{e_{\max}} + \frac{r_H}{e_{\max}} + z + \frac{a}{e_{\max}} \sqrt{1 - \left(\frac{r_H/e_{\max} + z}{r_H/e_{\max} + 1} \right)^2} \right], \quad (8)$$

где $z = e/e_{\max}$ — относительная толщина сгоревшего свода; $l_{об}$ — длина цилиндрической части двигателя, $l_{об} = L - a - r_H - e_{\max}$, $r_H = 0,5d_H$, $e_{\max} = 0,5(D - d_H)$. Изменение $S_T(z)$ показано на рис. 2. Исключив dt из уравнения (3) с помощью уравнения (4), получим

$$\frac{dW}{de} = S_T(e). \quad (9)$$

Интегрируя, будем иметь

$$W = W_H + 2\pi e_{\max}^3 \varphi(z), \quad (10)$$

$$\varphi(z) = \frac{\beta - \alpha}{2} \left[(\alpha + z)^2 - \alpha^2 \right] + \frac{1}{3} \left[(\alpha + z)^3 - \alpha^3 \right] + \frac{\gamma}{3} (1 + \alpha)^2 \left[(1 - \Theta_H^2) \sqrt{1 - \Theta_H^2} - (1 - \Theta^2) \sqrt{1 - \Theta^2} \right], \quad (11)$$

$$\Theta = \frac{\alpha + z}{\alpha + 1}, \quad \Theta_H = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{r_H}{e_{\max}},$$

$$\gamma = \frac{a}{e_{\max}}, \quad \beta = \frac{l_{об}}{e_{\max}} + \alpha.$$

Зависимость $W(z)$ также показана на рис. 2. К концу горения заряда объем возрастает более чем в 18 раз. Ограничивая начальный свободный объем двигателя передней кромкой утопленного сопла, начальное объемное заволнение получим равным 0,945.

Расчеты выполнены для топлива с температурой продуктов сгорания 3000 К, скорость горения $u_T = 0,01$ м/с при $p = 4$ МПа, температуре заряда 293 К и $\nu = 0,3$. Плотность топлива принимаем равной $1,7$ кг/дм³, а $k = 1, 2$. Давление в двигателе будем считать известной функцией времени. Следовательно, известными функциями времени будут и толщина сгоревшего свода

$$e = \int_0^t u_T(p) d\tau \quad (12)$$

(τ — переменная интегрирования), и поверхность горения S_T , и свободный объем двигателя W .

Исключая из уравнения (2) $ApF_{кр}$ с помощью уравнения (1) и используя уравнение состояния

$$p = \rho RT, \quad (13)$$

получим

$$\frac{dT}{dt} = f_1(t)T - t_2(t)T^2, \quad (14)$$

где

$$f_1(t) = \frac{k-1}{k} \frac{W \frac{dp}{dt} + S_T u_T (p + \rho_T c_p T_p)}{Wp}, \quad (15)$$

$$f_2(t) = \frac{k-1}{k} \frac{S_T u_T}{Wp} c_p \rho_T, \quad (16)$$

T_p — температура продуктов сгорания в условиях постоянного давления. Из уравнений (2) и (13) находим

$$F_{кр} = \frac{S_T u_T \left(\rho_T c_p T_p - \frac{p}{k-1} \right) - \frac{W}{k-1} \frac{dp}{dt}}{c_p Ap T}. \quad (17)$$

Если уравнение (14) проинтегрировать, то окажется, что температура T — известная функция времени. Тогда и площадь критического сечения соплового блока будет известной функцией времени.

Уравнение (14) является частным случаем уравнения Риккати [2]. Введя замену

$$T = \frac{1}{\tilde{z} f_2(t)} \frac{d\tilde{z}}{dt}, \quad (18)$$

преобразуем его:

$$f_2(t) \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = \frac{d\tilde{z}}{dt} \left(\frac{df_2}{dt} + f_1(t) f_2(t) \right). \quad (19)$$

Полученное уравнение не содержит в явном виде переменную \tilde{z} , а функция $f_2(t)$ в соответствии с уравнением (16) для условий, реализующихся в РДТТ, отлична от нуля. Поэтому уравнение (19) можно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = y, \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\varphi(t), \quad (21)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{f_2(t)} \frac{df_2}{dt} + f_1(t). \quad (22)$$

Последовательно интегрируя уравнения (21) и (20), находим

$$\ln \frac{y}{y_H} = \int_{t_H}^t \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (23)$$

$$\tilde{z} = \tilde{z}_H + y_H \int_{t_H}^t \exp \left(\int_{t_H}^{\tau} \varphi(\zeta) d\zeta \right) d\tau. \quad (24)$$

Подставляя выражение для \tilde{z} в формулу (18), получим

$$T = \frac{1}{f_2(t)} \frac{y_H \nu(t)}{\tilde{z}_H + y_H \int_{t_H}^t \nu(\tau) d\tau}, \quad (25)$$

где

$$\nu(t) = \exp \left(\int_{t_H}^t \varphi(\zeta) d\zeta \right). \quad (26)$$

При $t = t_H$ имеем $T = T_H$. Тогда из выражения (25) найдем

$$y_H = \tilde{z}_H T_H f_2(t_H). \quad (27)$$

При $t > t_H$

$$T = T_H \Theta(t), \quad (28)$$

где

$$\Theta(t) = \frac{f_2(t_H)}{f_2(t)} \frac{\nu(t)}{1 + T_H f_2(t_H) \int_{t_H}^t \nu(\tau) d\tau}. \quad (29)$$

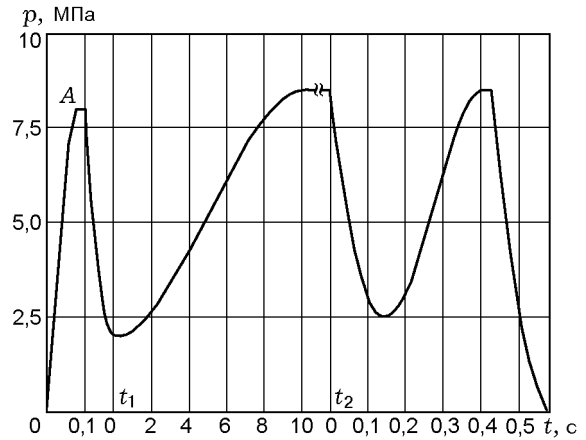


Рис. 3. Давление продуктов сгорания в РДТТ с двумя периодами регулирования:

t_1, t_2 — начала отсчетов новых масштабов шкалы времени

В результате получаем выражение, позволяющее рассчитать температуру как функцию времени, если известны зависимости $p(t)$, $S_T(t)$, $W(t)$ и значение температуры T_H при $t = t_H$.

Начало интегрирования в выражениях (25), (26), (29) и величину T_H в формулах (28), (29) будем относить к моменту окончания нестационарного горения ТТ. Поэтому можно считать $T_H = T_p$, а t_H соответствует времени достижения давлением заданного уровня. Другими словами, будем считать, что давление в двигателе нерегулируемо нарастает до достижения уровня, соответствующего требуемой зависимости $p(t)$ (точка A на рис. 3). После этого включается регулятор, изменяющий площадь критического сечения соплового блока в соответствии с уравнением (17).

Значения параметров в начале их изменения в процессе регулирования будем обозначать тем же индексом «н». В качестве T_H возьмем значение температуры, полученной после окончания предыдущего этапа. Характер изменения $F_{кр}(t)$ и $T(t)$ определяется видом зависимости $p(t)$.

В качестве примера использования полученных соотношений рассмотрим два расчетных случая. В первом из них давление считаем постоянным. Задачей регулирования будет такое изменение $F_{кр}(t)$, при котором давление в двигателе оставалось бы постоянным, несмотря на прогрессивное изменение площади поверхности горения и свободного объема двигателя. И поверхность горения, и свободный объем в результате выгорания ТТ изменяют-

ся медленно, поскольку скорость горения ТТ на четыре порядка меньше скорости звука, определяющей скорость изменения газодинамических процессов в двигателе. Это значит, что соответствующее изменение величины $F_{кр}(t)$ будет происходить тоже медленно и практически равномерно с газодинамическими процессами.

Во втором случае давление считаем переменным. Отдельно изучим как уменьшение давления, так и его увеличение.

При уменьшении давления интересно рассмотреть ситуацию, когда скорость падения давления близка к предельной, ограниченной потуханием твердого топлива. Если при уменьшении давления топливо перестает гореть, то регулировать давление в двигателе будет невозможно. Это тем более важно, что последующее воспламенение и нестационарное выгорание топлива могут носить нерегулярный характер, называемый в инженерной практике чиханиями [3].

Рассмотрим случаи медленного и быстрого роста давления. Последний интересен для времени, близкого к окончанию работы двигателя, когда в результате выгорания заряда свободный объем оказывается большим. В этом случае при $F_{кр} = \text{const}$ переход из одного режима (с низким давлением) в другой (с высоким давлением) осуществляется крайне медленно. Поэтому важно рассчитать минимальную площадь соплового блока на кривой $F_{кр}(t)$, требуемую для обеспечения выхода РДТТ на очередной режим квазистационарной работы или просто для достижения требуемого уровня давления в течение заданного отрезка времени, когда свободный объем двигателя велик.

Обозначим

$$i_1(t) = \int_{t_H}^t \varphi(\zeta) d\zeta, \quad i_2(t) = \int_{t_H}^t \nu(\tau) d\tau.$$

Преобразуем выражения для квадратур $i_1(t)$ и $i_2(t)$:

$$i_1(t) = \int_{t_H}^t \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{t_H}^t \frac{1}{f_2(\zeta)} \frac{df_2}{d\zeta} d\zeta + \int_{t_H}^t f_1(\zeta) d\zeta = \ln \frac{f_2(t)}{f_2(t_H)} + \frac{k-1}{k} \left(\ln \frac{p}{p_H} \frac{W}{W_H} \right) + \rho_T c_p T_p \int_{W_H}^W \frac{d \ln W}{p}. \quad (30)$$

Если $p = \text{const}$, то

$$i_1(t) = \ln \frac{S_T}{S_{T,H}} \left(\frac{W}{W_H} \right)^\alpha, \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{k-1}{k} \left(1 + \frac{\rho_T c_p T_p}{p} \right) - 1. \quad (32)$$

В этом случае

$$\nu(t) = \exp(i_1(t)) = \frac{S_T}{S_{T,H}} \left(\frac{W}{W_H} \right)^\alpha. \quad (33)$$

Поэтому

$$i_2(t) = \int_{t_H}^t \nu(\tau) d\tau = \int_{t_H}^t \frac{S_T}{S_{T,H}} \left(\frac{W}{W_H} \right)^\alpha d\tau = \frac{1}{1+\alpha} \frac{W_H}{S_{T,H} u_T} \left[\left(\frac{W}{W_H} \right)^{1+\alpha} - 1 \right]. \quad (34)$$

Отсюда, учитывая выражение (16), получим

$$\Theta(t) = \frac{\left(\frac{W}{W_H} \right)^{1+\alpha}}{1 + \frac{b}{1+\alpha} \left[\left(\frac{W}{W_H} \right)^{1+\alpha} - 1 \right]}, \quad (35)$$

где

$$\frac{b}{1+\alpha} = \frac{k-1}{k} \frac{c_p \rho_T T_H}{p} \frac{1}{1+\alpha}. \quad (36)$$

Отношение $b/(1+\alpha)$ при $T_H = T_p$ всего лишь на 0,1% меньше единицы. С такой же точностью и отношение (35) можно принять постоянной величиной, так как $(W/W_H)^{1+\alpha}$ при увеличении W/W_H быстро стремится к бесконечности. Поэтому при $p = \text{const}$ температуру с точностью $\approx 0,1\%$ можно рассматривать как постоянную. Это значит, что в соответствии с уравнением (17) площадь критического сечения соплового блока должна изменяться пропорционально S_T .

Если давление переменное, то

$$i_1(t) = \ln \frac{S_T}{S_{T,H}} \frac{u_T}{u_{T,H}} \left(\frac{p_H}{p} \frac{W_H}{W} \right)^{1-a} + b_H \int_{t_H}^t \frac{S_T}{W} \frac{u_T}{u_{T,H}} \frac{p_H}{p} d\zeta, \quad (37)$$

где

$$b_H = \frac{k-1}{k} \frac{\rho_T c_p T_p}{p_H} u_{T,H}. \quad (38)$$

В этом случае

$$\nu(t) = \frac{S_T}{S_{T,H}} \frac{u_T}{u_{T,H}} \left(\frac{p_H}{p} \frac{W_H}{W} \right)^{1-a} e^{b_H i_0(t)}. \quad (39)$$

Здесь

$$i_0(t) = \int_{t_H}^t \frac{S_T}{W} \frac{u_T}{u_{T,H}} \frac{p_H}{p} d\zeta. \quad (40)$$

Получаем

$$\Theta(t) = \frac{\left(\frac{p}{p_H} \frac{W}{W_H} \right)^a e^{b_H i_0(t)}}{1 + b_0 i_2(t)}, \quad (41)$$

где

$$b_0 = b_H \frac{T_H}{T_p} \frac{S_{T,H}}{W_H}, \quad (42)$$

$$i_2(t) = \int_{t_H}^t \frac{S_T}{S_{T,H}} \frac{u_T}{u_{T,H}} \left(\frac{p_H}{p} \frac{W_H}{W} \right)^{1-a} e^{b_H i_0(\tau)} d\tau. \quad (43)$$

Интеграл $i_0(t)$ при конечных t остается ограниченной по величине функцией времени, в то время как значение $\exp[b_H i_0(t)]$ быстро увеличивается и стремится к бесконечности. Разделим числитель и знаменатель в выражении (41) на эту экспоненту, рассматривая ее как конечную величину. При больших значениях $\exp[b_H i_0(t)]$ экспонента $\exp[b_H(i_0(\tau) - i_0(t))]$ по мере уменьшения τ будет стремиться к нулю, а $\exp[-b_H i_0(t)]$ будет малой величиной.

В итоге для $\Theta(t)$ будет справедливо выражение

$$\Theta(t) = \left(\frac{p}{p_H} \frac{W}{W_H} \right)^a \frac{1}{I(t)}, \quad (44)$$

где

$$I(t) = b_0 \int_{t_m}^t \frac{S_T}{S_{T,H}} \frac{u_T}{u_{T,H}} \left(\frac{p_H}{p} \frac{W_H}{W} \right)^{1-a} \times e^{b_H[i_0(\tau) - i_0(t)]} d\tau. \quad (45)$$

Время t_m удовлетворяет условию

$$\exp[b_H(i_0(t_m) - i_0(t))] \leq \varepsilon \quad (46)$$

(ε — малая величина, определяемая точностью решения задачи) и соответствует текущему значению времени t , начиная с момента, когда экспоненту $\exp(b_H i_0(t))$ можно считать большой. С этого момента времени вместо (41) должна использоваться формула (44). Для всех τ , меньших t_m , величины подынтегральной функции в выражении (45) практически равны нулю. В условиях рассматриваемого

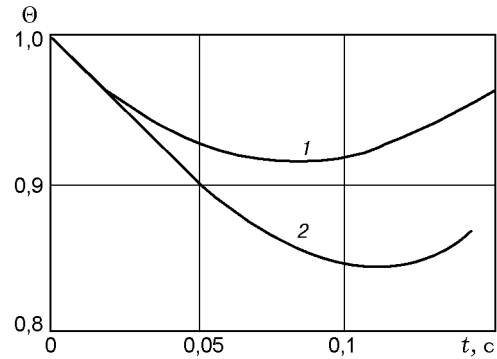


Рис. 4. Изменение относительной температуры продуктов сгорания при уменьшении давления в начале (кривая 1) и в конце (2) работы двигателя:

начальная скорость уменьшения давления $dp/dt = -80$ МПа/с; 1 — $S_T/W = 8,8$ м⁻¹, $z \approx 0$; 2 — $S_T/W \approx 2,2$ м⁻¹, $z = 0,9$

примера это соответствует разности $t - t_H \leq 0,2 \div 0,3$ с. Для таких временных интервалов $t - t_H$ можно пользоваться формулой (41). При больших значениях $t - t_H$ необходимо переходить к выражению (44).

Функции $\frac{S_T}{W}$, $\left(\frac{W}{W_H} \right)^a$, $\frac{S_T}{S_{T,H}} \left(\frac{W_H}{W} \right)^{1-a}$, входящие в выражения (40)–(42), зависят от толщины сгоревшего свода и времени, но не зависят от режима изменения давления, определяемого условиями регулирования. Для удобства вычислений эти соотношения можно аппроксимировать теми или иными явными функциями времени или же находить их непосредственно с помощью уравнений (8), (10) и (4). Если же частота колебаний давления составляет хотя бы несколько герц, упомянутые выше функции времени можно считать постоянными на каждой четверти периода или для всего периода колебаний давления.

Ниже на примере кривой давления, приведенной на рис. 3, выполнена серия расчетов для оценки влияния колебаний давления на температуру продуктов сгорания в двигателе для двух моментов времени: в начале периода регулирования кривой давления и в некоторой окрестности времени окончания работы двигателя.

На рис. 4 (кривая 1) приведено изменение температуры в начале стационарного горения топлива, когда $S_T/W = 8,8$ м⁻¹, а $z \approx 0$ (первый период регулирования давления, начальная скорость уменьшения давле-

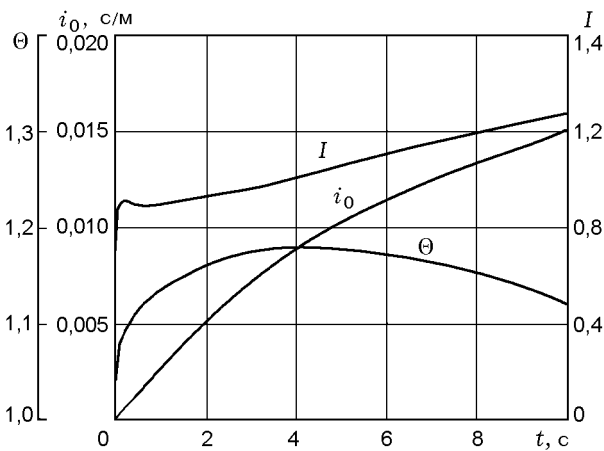


Рис. 5. Параметры Θ , i_0 и I для первого периода регулирования давления в двигателе (медленный подъем давления)

ния $dp/dt = -80,0$ МПа/с). Температура продуктов сгорания уменьшается на $\approx 6\%$. При этом же значении dp/dt изменение температуры при $z = 0,9$ (кривая 2, второй период регулирования давления) равно 12% . Этот результат можно объяснить более интенсивным стабилизирующим влиянием газоприхода в начале работы двигателя по сравнению с периодом окончания его работы. Двукратное увеличение dp/dt (до $160,0$ МПа/с) оказало существенно меньшее влияние на минимальное значение температуры продуктов сгорания (дополнительное уменьшение температуры составило $\approx 3\%$ в начальный период работы двигателя и около 2% — в конце).

Представляет интерес проанализировать изменение температуры при подъеме давления как с небольшими скоростями, так и со скоростями, соответствующими увеличению давления при выходе на режим квазистационарной работы в воспламенительный период. Рассмотрим два расчетных случая, когда давление, изменяясь в несколько раз, нарастает за 10 и $0,25$ с.

При медленном нарастании давления (первый период регулирования давления) температура, увеличившись на 18% , начинает уменьшаться и при $p = p_{\max}$ оказывается практически равной температуре T_p . В качестве начальной брали температуру при спаде давления. В рассматриваемом примере значение интеграла $i_0(t)$ монотонно растет (рис. 5). Интеграл $I(t)$ (45) имеет интервал интегрирования $t - t_m$, не превышающий $1,0$ с, а для t , меньших времени достижения максимума Θ , интер-

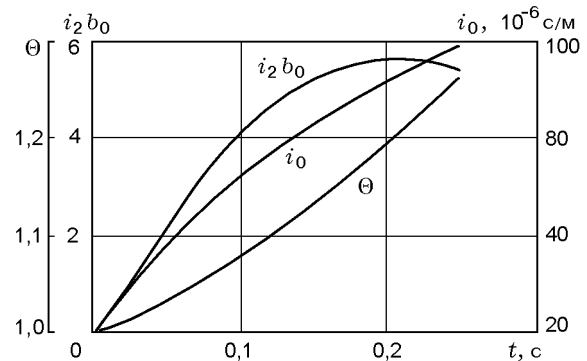


Рис. 6. Параметры Θ , i_0 , $i_2 b_0$ для второго периода регулирования давления в двигателе (быстрый подъем давления, $\beta_0 = \exp[-b_n i_0(t)]$)

вал был меньше $0,5$ с. Интеграл $I(t)$ в выражении (44) сначала интенсивно растет (см. рис. 5), затем наступает небольшой спад, и далее он опять медленно увеличивается.

При быстром подъеме давления (второй период регулирования давления) кривые $i_0(t)$ и $i_2(t)$ являются монотонными функциями времени. Температура (рис. 6) сначала увеличивается на $27,5\%$, а затем уменьшается, хотя и не отходит сколько-нибудь значительно от своего максимума. Столь большое повышение температуры наблюдается по отношению к $T = T_n$. По отношению к $T = T_p$ рост температуры не превышает 15% . Тем не менее увеличению скорости нарастания давления соответствует увеличение Θ_{\max} .

Некоторые результаты расчетов приведены ниже:

$t_m - t_n, \text{ с}$	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Θ_{\max}	1,1527	1,1964	1,2285	1,2519	1,2625

Здесь $t_m - t_n$ — интервал времени, в течение которого давление нарастало с $2,0$ до $8,5$ МПа. Видно, что максимальная величина относительной температуры растет. При выполнении расчетов в качестве T_n брали температуру T_p . Начиная с $t_m - t_n = 0,05$ с оказывается, что $T_{\max} > T_V$, но превышение над T_V небольшое (здесь T_V — температура продуктов сгорания при сжигании топлива в условиях постоянного объема). Даже при $t_m - t_n = 0,01$ с оно составляет всего лишь $6,25\%$. Тем не менее в результате интенсивного сжатия продукты сгорания нагреваются сильнее, чем при сжигании в условиях постоянного объема, а потом значения температуры релаксируют к $T = T_p$ (с точ-

ностью $\approx 0,1\%$) в условиях постоянного давления.

Следует заметить, что при рассмотренных скоростях изменения давления слагаемое

$\frac{W}{k-1} \frac{dp}{dt}$ в уравнении (17), учитывающее влияние скорости изменения давления на площадь критического сечения соплового блока, оказывается того же порядка, что и слагаемое, учитывающее влияние прихода энергии при горении заряда. Это значит, что влияние скорости изменения давления на величину $F_{кр}$, так же как и влияние температуры и давления, необходимо учитывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соркин Р. Е.** Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Наука, 1983.
2. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
3. **Новожилов Б. В.** Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 18/II 1999 г.
