

ДИНАМИЧЕСКИЕ ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ Х. А. РАХМАТУЛИНА

Е. И. Роменский

(Новосибирск)

Работа посвящена обобщению на трехмерный случай уравнений Х. А. Рахматулина распространения упругопластических волн [1, 2]. Сформулированы правила построения уравнений динамики сплошной среды, которые можно использовать для некоторых моделей неупругих сред. Эти правила получены путем формализации идей, содержащихся в книге [3], которые были привлечены для написания уравнений нелинейной вязкоупругости на основе релаксационной модели Максвелла. Основная идея заключается в использовании понятия эффективной упругой деформации (деформации упругой разгрузки элемента среды) для описания напряженного состояния. Тем самым тензор реальной дисторсии представляется в виде произведения тензоров эффективной упругой и пластической дисторсии. Описание неупругих деформаций в рассматриваемых моделях состоит в задании закона скорости изменения пластических деформаций в зависимости от напряженного состояния среды и от скорости его изменения.

Система динамических уравнений состоит из законов сохранения импульса и энергии, а также из уравнений эволюции тензора эффективной упругой дисторсии или какого-либо тензора эффективной упругой деформации. Здесь выбран логарифмический тензор деформаций Генки. Закон, определяющий поведение среды при пластических деформациях, выражается в следующем: скорость изменения пластических деформаций в каждом направлении представляется в виде линейной комбинации скоростей изменения напряжений с коэффициентами, зависящими от состояния среды. Это, по существу, обобщает способ определения пластических деформаций в одномерной модели Х. А. Рахматулина. Основным требованием к выбору упомянутой комбинации скоростей изменения напряжений является корректность полученной системы динамических уравнений. Требование корректности позволяет однозначно выбрать нужные коэффициенты в этой линейной комбинации. Исследование проводится для уравнения состояния (плотность внутренней энергии) вида $E = E^0(\rho, S) + E^1(h_1, h_2, h_3)$, где ρ — плотность; h_i — главные значения тензора эффективных упругих деформаций Генки; S — энтропия.

На простом примере однородной деформации плоского слоя показаны возможности применения сформулированных динамических уравнений.

1. Уравнения движения сплошной среды. Выпишем уравнения движения сплошной среды в эйлеровых координатах с использованием понятия эффективной упругой деформации — деформации упругой разгрузки элемента среды. В качестве меры деформации используется тензор дисторсии. Для каждого состояния элемента среды вводится стандартное ненапряженное состояние, которое определяется с помощью эффективной упругой дисторсии по известному напряженному состоянию. На основе этого матрица полной дисторсии разбивается на произведение матриц упругой и пластической дисторсии. Выбор формул для вычисления пластических дисторсий определяется в зависимости от модели неупругой среды, для которой нужно написать динамические уравнения.

Будем формулировать уравнения движения деформируемой среды без учета внутренних процессов, происходящих в ней (такими процессами назовем внутреннее трение, теплопередачу, химические реакции между компонентами среды и т. д.). Состояние среды в каждой точке пространства, снабженного декартовой системой координат x_i , в момент времени t будем характеризовать следующими «наблюдаемыми» величинами: полем скоростей $u_i(t, x_1, x_2, x_3)$, полем напряжений $\sigma_{ij}(t, x_1, x_2, x_3)$ и температурой $T(t, x_1, x_2, x_3)$. Будем считать, что при движении среды выполняются

законы сохранения импульса и энергии, которые описываются хорошо известными уравнениями

$$(1.1) \quad \rho du_i/dt - \partial \sigma_{ij}/\partial x_j = 0;$$

$$(1.2) \quad \rho dE/dt - \sigma_{ij} \partial u_i/\partial x_j = 0,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$ — производная вдоль траектории движения; $\rho(t, x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды; $E(t, x_1, x_2, x_3)$ — плотность внутренней энергии (ее связь с напряженным состоянием среды укажем ниже).

Известно, что свойства среды зачастую зависят от того, какие деформации происходили в ней до текущего момента времени t . Тем самым для правильного описания среды нужно знать «историю» ее поведения. Пусть наблюдение за движением среды начато с момента времени $t = 0$, т. е. известны координаты частицы x_i^0 , которая в данный момент времени t имеет координаты x_i . Движение этой частицы задается функциями $x_i = x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, которые могут быть получены решением уравнений

$$(1.3) \quad dx_i(t)/dt = u_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad x_i(0) = x_i^0.$$

Будем считать функции $x_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ непрерывными и взаимно-однозначными, тем самым можно определить зависимость $x_i^0(t, x_1, x_2, x_3)$. Оказывается удобным описывать деформацию среды матрицей якобиана $\partial x_i^0/\partial x_j$. Матрица, сопряженная к этому якобиану $a_{ij}^0 = \partial x_j^0/\partial x_i$, называется матрицей реальной (полной) дисторсии. Из уравнений (1.3) с помощью формального дифференцирования получаются уравнения для реальной дисторсии

$$\frac{da_{ij}^0}{dt} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} a_{\alpha j}^0 = 0$$

или при $A^0 = \|a_{ij}^0\|$, $W = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|$ в матричной форме

$$(1.4) \quad dA^0/dt + W^*A^0 = 0.$$

Реальные дисторсии, однако, не связаны с напряженным состоянием среды. Действительно, хотя в среде может и не происходить реальных деформаций, поле напряжений в ней может меняться вследствие релаксации или других внутренних процессов. С напряженным состоянием связана так называемая эффективная упругая деформация [3] — это деформация, которую нужно упруго (адиабатическим путем) произвести над элементом среды, чтобы перевести его из ненапряженного состояния в состояние с заданным полем напряжений.

Пусть частица среды в момент времени t находится в точке x_i , а после упругой разгрузки элемента среды, содержащего эту частицу, находится в точке \bar{x}_i . Матрица $a_{ij}^e = \partial \bar{x}_j/\partial x_i$ и называется матрицей эффективной упругой дисторсии. Отметим, что, как правило, координаты \bar{x}_i нельзя ввести для всей среды в целом, т. е. напряженное тело нельзя упруго освободить от напряжений так, чтобы оно целиком поместилось в евклидовом пространстве. Однако в малой окрестности одной частицы такую процедуру провести можно, причем координаты определяются лишь с точностью до поворота [3].

Используя введенное понятие эффективной упругой дисторсии, получаем

$$(1.5) \quad a_{ij}^0 = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j^0}{\partial \bar{x}_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} = a_{\alpha j}^p a_{i\alpha}^e = a_{i\alpha}^e a_{\alpha j}^p$$

или в матричной форме

$$(1.6) \quad A^0 = A^e A^p.$$

Введен новый объект — матрица $A^p = \|a_{ij}^p\|$, которую назовем матрицей пластической (остаточной) дисторсии. Она характеризует необратимые деформации, т. е. деформации, которые остаются в среде после разгрузки. Из (1.4), (1.6) получаем

$$\frac{dA^e}{dt} + W^* A^e = -A^e \frac{dA^p}{dt} (A^p)^{-1}.$$

Обозначим $\dot{\Phi} = \|\dot{\varphi}_{ij}\| = -(dA^p/dt)(A^p)^{-1}$ (точка здесь не означает дифференцирования — это просто символическое обозначение). Далее индекс e так же, как и слово «эффективный», в обозначении эффективной упругой дисторсии будем опускать. Таким образом, получены следующие уравнения эволюции упругой дисторсии:

$$(1.7) \quad dA/dt + W^* A = A \dot{\Phi}$$

и в покомпонентной форме

$$(1.8) \quad \frac{da_{ij}}{dt} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} a_{\alpha j} = a_{i\alpha} \dot{\varphi}_{\alpha j}.$$

Матрица A допускает представление

$$(1.9) \quad A = UK^{-1}V,$$

где U, V — ортогональные матрицы; матрица K^{-1} диагональная

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} \end{pmatrix},$$

k_i имеют смысл коэффициентов растяжения (сжатия) вдоль главных осей упругой деформации.

Тензор напряжений имеет вид

$$\|\sigma_{ij}\| = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} U^*,$$

где $\sigma_i = \rho k_i E_{k_i}$ — главные напряжения; $\rho = \rho_0/k_1 k_2 k_3$ — плотность; $E(k_1, k_2, k_3, S)$ — плотность внутренней энергии; S — энтропия. Непосредственно через тензор дисторсии напряжения вычисляются по формулам

$$\|\sigma_{ij}\| = \|\rho a_{i\alpha} E_{a_{j\alpha}}\| = -\rho A \partial E / \partial A^*.$$

Отметим, что температура среды вычисляется по формуле $T = \partial E / \partial S(k_1, k_2, k_3, S)$.

Итак, для описания движения сплошной среды получена система уравнений

$$(1.10) \quad \rho \, du_i/dt - \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad \rho \, dE/dt - \sigma_{ij} \partial u_i / \partial x_j = 0,$$

$$da_{ij}/dt + a_{\alpha j} \partial u_\alpha / \partial x_i = a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j},$$

$$\rho = \rho_0 \det \|a_{ij}\|, \quad \sigma_{ij} = -\rho a_{i\alpha} E_{a_{j\alpha}}, \quad E = E(k_1, k_2, k_3, S).$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо каким-то способом задавать члены $\dot{\Phi}_{ij}$, описывающие неупругие деформации. Оказывается удобным связать $\dot{\Phi}_{ij}$ с имеющимся напряженным состоянием среды и ее температурой, тем самым $\dot{\Phi}_{ij}$ определяется через упругие деформации и энтропию. В [3] эта связь устанавливается с помощью интерполяции максвелловскими релаксационными членами, которые постулируют релаксацию напряжений к шаровому тензору. В данной работе будет дан способ задания $\dot{\Phi}_{ij}$ с помощью использования упругопластической схемы.

Укажем теперь некоторые следствия системы (1.10). Напомним, что a_{ij} — эффективная упругая дисторсия. Из уравнений для a_{ij} вытекает уравнение для плотности $\rho = \rho_0 \det \|a_{ij}\|$. Для этого нужно уравнение для a_{ij} умножить соответственно на $\rho_{a_{ij}} = \rho c_{ji}$, где c_{ji} — элементы матрицы, обратной к $A = \|a_{ij}\|$, $C = A^{-1}$, и все уравнения сложить, после этого получим

$$\rho_{a_{ij}} \left(\frac{da_{ij}}{dt} + a_{\alpha j} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) = \rho_{a_{ij}} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j} \frac{d\rho}{dt} + \rho c_{ji} a_{\alpha j} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = \rho c_{ji} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j}$$

и, используя тождества $c_{ji} a_{\alpha j} = \delta_{i\alpha}$, $c_{ji} a_{i\alpha} = \delta_{j\alpha}$

$$d\rho/dt + \rho \partial u_i / \partial x_i = \rho \dot{\Phi}_{jj}.$$

Таким образом, получено уравнение для плотности с правой частью $\rho(\dot{\Phi}_{11} + \dot{\Phi}_{22} + \dot{\Phi}_{33})$. Следовательно, для выполнения закона сохранения массы необходимо потребовать, чтобы

$$(1.11) \quad \dot{\Phi}_{11} + \dot{\Phi}_{22} + \dot{\Phi}_{33} = 0.$$

Это равенство означает выполнение условия несжимаемости при пластических деформациях (рассматриваемые модели не учитывают объемной сжимаемости среды).

Следствием системы (1.10) является уравнение для энтропии. Действительно, используя зависимость $E = E(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}, S)$, имеем

$$\frac{dE}{dt} - E_{a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt} + E_S \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

откуда

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{E_S} E_{a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt} + \frac{1}{\rho E_S} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{E_S} E_{a_{ij}} a_{\alpha j} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \frac{1}{E_S} E_{a_{ij}} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j} +$$

$$+ \frac{1}{\rho E_S} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Используя теперь выражение для $\sigma_{ij} = -\rho a_{i\alpha} E_{a_{j\alpha}}$, видим, что члены с производными скоростей сокращаются, и получаем

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{E_S} E_{a_{ij}} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j}.$$

Заметим, что $E_{a_{ij}} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha j} = \text{tr} \left(\frac{\partial E}{\partial A} \dot{\Phi}^* A^* \right) = \text{tr} \left(A \dot{\Phi} C A \frac{\partial E}{\partial A^*} \right)$, где $C = A^{-1}$, и, используя $\|\sigma_{ij}\| = -\rho A \partial E / \partial A^*$, получим

$$(1.12) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho E_S} \text{tr} (A \dot{\Phi} C \|\sigma_{ij}\|) = \frac{1}{\rho E_S} a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma i},$$

$$C = \|\sigma_{ij}\| = A^{-1}.$$

Как известно, второй закон термодинамики означает неубывание энтропии, что влечет за собой необходимость выполнения неравенства

$$(1.13) \quad a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma i} \geq 0.$$

Таким образом, получены ограничения (1.11), (1.13), которые должны накладываться на выбор членов, учитывающих неупругие деформации $\dot{\Phi}_{ij}$:

$$\dot{\Phi}_{11} + \dot{\Phi}_{22} + \dot{\Phi}_{33} = 0, \quad a_{i\alpha} \dot{\Phi}_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} \sigma_{\gamma i} \geq 0.$$

2. Уравнения для логарифмического тензора деформаций. Для формулировки уравнений динамики неупругих сред будем использовать логарифмический тензор деформаций Генки. Уравнения будем писать в терминах эффективных упругих деформаций, которые были введены в п. 1.

Матрицу упругой дисторсии A можно представить в виде (1.9). Для описания деформаций удобно использовать метрический тензор деформаций $G = AA^*$, избавляясь тем самым от матрицы V : $G = AA^* = UK^{-2}U^*$. Уравнения для G можно получить из уравнений (1.7) для A

$$(2.1) \quad dG/dt + GW + W^*G = A(\dot{\Phi} + \dot{\Phi}^*)A^*.$$

Обозначим $D_G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} = K^{-2}$, $D_A = K^{-1}$ ($G = UD_GU^*$, $A = UD_AV$).

Для описания деформаций в главных осях удобно использовать параметры $h_i = -(1/2) \ln g_i = \ln k_i$. Действительно, предположим, что с момента времени $t = 0$ все деформации происходили только в виде растяжений (сжатий) по осям координат под действием напряжений σ_i , действующих вдоль этих осей. В этом случае матрицы упругой и пластической дисторсий, а также матрица градиентов скоростей будут диагональными. Уравнения (1.8) эволюции дисторсии имеют вид

$$\frac{dk_i^{-1}}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} k_i^{-1} = -k_i^{-1} \frac{d(k_i^p)^{-1}}{dt} k_i^p.$$

Отсюда

$$\frac{dk_i}{dt} - k_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -k_i \frac{dk_i^p}{dt} (k_i^p)^{-1}.$$

Учитывая, что $(k_i^p)^{-1} dk_i^p = d \ln k_i^p = dh_i^p$, получаем для $h_i = \ln k_i$

$$(2.2) \quad \frac{dh_i}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = - \frac{dh_i^p}{dt} = - \dot{\Phi}_i.$$

Видно, что $h_i + h_i^p$ имеют смысл реальных деформаций вдоль главных осей тензора деформаций.

Определим теперь логарифмический тензор деформаций при произвольных деформациях по формуле

$$H = UD_H U^*$$

где $D_H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$; $h_i = -\frac{1}{2} \ln g_i = \ln k_i$; U — та же матрица, что

в (1.9). Напишем уравнения для изменения H во времени. Используя (2.1), получаем

$$\begin{aligned} U \frac{dD_G}{dt} U^* + \frac{dU}{dt} D_G U^* - U D_G U^* \frac{dU}{dt} + U D_G U^* W + W^* U D_G U^* = \\ = U D_A V (\dot{\Phi} + \dot{\Phi}^*) V^* D_A U^*. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого уравнения слева на U^* , справа на U и обозначая $\Omega = ||\omega_{ij}|| = U^* W U$, получим

$$(2.3) \quad \frac{dD_G}{dt} + U^* \frac{dU}{dt} D_G - D_G U^* \frac{dU}{dt} + D_G \Omega + \Omega^* D_G = 2D_A \Psi D_A,$$

где $\Psi = (1/2) V (\dot{\Phi} + \dot{\Phi}^*) V^* = ||\psi_{ij}||$. Можно убедиться, что у матрицы $U^* \frac{dU}{dt} D_G - D_G U^* \frac{dU}{dt}$ на диагонали стоят нули, а матрица dD_G/dt является диагональной. Расписывая покомпонентно матричное уравнение (2.3), получим уравнение для главных значений тензора g_{ij}

$$dg_i/dt + 2g_i \omega_{ii} = 2g_i \psi_{ii}$$

и уравнения для недиагональных элементов матрицы $U^* dU/dt$

$$(2.4) \quad \left[U^* \frac{dU}{dt} \right]_{ij} - \frac{1}{g_i - g_j} (g_i \omega_{ij} + g_j \omega_{ji}) = - \frac{2\sqrt{g_i g_j}}{g_i - g_j} \psi_{ij}, \quad i \neq j.$$

Из уравнений для g_i следуют уравнения для $h_i = -(1/2) \ln g_i$

$$(2.5) \quad dh_i/dt - \omega_{ii} = -\psi_{ii}.$$

Из равенства

$$U^* \frac{dH}{dt} U = \frac{dD_H}{dt} + U^* \frac{dU}{dt} D_H - D_H U^* \frac{dU}{dt}$$

и уравнений (2.4), (2.5) следует

$$(2.6) \quad \frac{dH}{dt} = U \begin{pmatrix} \omega_{11} & -\frac{h_1 - h_2}{g_1 - g_2} (g_1 \omega_{12} + g_2 \omega_{21}) & \\ -\frac{h_2 - h_1}{g_2 - g_1} (g_2 \omega_{21} + g_1 \omega_{12}) & \omega_{22} & \\ -\frac{h_3 - h_1}{g_3 - g_1} (g_3 \omega_{31} + g_1 \omega_{13}) & -\frac{h_3 - h_2}{g_3 - g_2} (g_3 \omega_{32} + g_2 \omega_{23}) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & -\frac{h_1-h_3}{g_1-g_3}(g_1\omega_{13}+g_3\omega_{31}) \\
 & -\frac{h_2-h_3}{g_2-g_3}(g_2\omega_{23}+g_3\omega_{32}) \\
 & \omega_{33}
 \end{aligned} \right\} U^* - U \left\{ \begin{aligned}
 & \psi_{11} \\
 & -\frac{h_2-h_1}{g_2-g_1}2\sqrt{g_2g_1}\psi_{21} \\
 & -\frac{h_3-h_1}{g_3-g_1}2\sqrt{g_3g_1}\psi_{31}
 \end{aligned} \right. \\
 & \left. \begin{aligned}
 & -\frac{h_1-h_2}{g_1-g_2}2\sqrt{g_1g_2}\psi_{12} \\
 & \psi_{22} \\
 & -\frac{h_3-h_2}{g_3-g_2}2\sqrt{g_3g_2}\psi_{32}
 \end{aligned} \right\} - \left. \begin{aligned}
 & -\frac{h_1-h_3}{g_1-g_3}2\sqrt{g_1g_3}\psi_{13} \\
 & -\frac{h_2-h_3}{g_2-g_3}2\sqrt{g_2g_3}\psi_{23} \\
 & \psi_{33}
 \end{aligned} \right\} U^*.
 \end{aligned}$$

Здесь $g_i = e^{-2h_i}$; $\Omega = ||\omega_{ij}|| = U^*||\partial u_n/\partial x_m||U$.

Итак, получены уравнения для изменения во времени логарифмического тензора деформаций H . Эти уравнения не замкнуты относительно его компонент h_{ij} , так как правая часть уравнения записана в терминах главных значений h_i и элементов ортогональной матрицы U , тем не менее использование этих уравнений не представляет каких-либо трудностей, поскольку h_i и U определяются из уравнения

$$U \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} U^* = H.$$

Полученные уравнения для тензора H удобны для построения динамических уравнений неупругих сплошных сред. Заметим, что формулы для вычисления напряжений в терминах h_{ij} становятся более простыми — можно показать, что

$$(2.7) \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial E}{\partial h_{ij}}, \quad \text{где } E = E(h_1, h_2, h_3, S); \quad \rho = \rho_0 e^{-(h_1+h_2+h_3)};$$

h_i — главные значения тензора h_{ij} .

Уравнения эволюции тензора H в совокупности с уравнениями (1.1), (1.2) для скоростей и внутренней энергии образуют замкнутую систему уравнений, если известен способ вычисления ψ_{ij} — членов в уравнениях для h_{ij} , описывающих пластические деформации.

Запишем уравнения релаксационной модели Максвелла, используя уравнения (2.6) для логарифмического тензора H . Будем считать, что поворот элемента среды как целого не сопровождается пластическими деформациями, это означает, что

$$\psi_{ij} \equiv 0 \quad (i \neq j).$$

Для ψ_{ii} примем следующие формулы:

$$\psi_{ii} = \frac{1}{\tau} \left(h_i - \frac{h_1+h_2+h_3}{3} \right),$$

где $\tau = \tau(h_1, h_2, h_3, S)$ — характерное время релаксации касательных напряжений, зависящее от состояния среды.

Выбор таких формул для неупругих деформаций определяет релаксацию тензора эффективных упругих деформаций к шаровому тензору, а значит (если предположить однозначную связь напряжений с эффек-

тивными упругими деформациями), и релаксацию тензора напряжений к шаровому тензору.

3. Динамические уравнения упругопластических деформаций. Опишем еще один способ замыкания системы уравнений движения среды с помощью выбора интерполяционных формул для ψ_{ij} — членов в уравнениях для логарифмического тензора h_{ij} эффективных упругих деформаций, описывающих скорость изменения неупругих деформаций.

Рассмотрим случай деформаций, происходящих только вдоль осей x_i . При этом уравнения для тензора h_{ij} , который будет диагональным, имеют вид (2.2).

Выберем в качестве меры касательных деформаций инвариант

$$(3.1) \quad h = (1/\sqrt{2})[(h_{11} - h_{22})^2 + (h_{22} - h_{33})^2 + (h_{33} - h_{11})^2 + 6(h_{12}h_{21} + h_{23}h_{32} + h_{31}h_{13})]^{1/2},$$

который назовем интенсивностью касательных деформаций. Заметим, что в силу инвариантности

$$(3.2) \quad h = (1/\sqrt{2})[(h_1 - h_2)^2 + (h_2 - h_3)^2 + (h_3 - h_1)^2]^{1/2},$$

где h_i — главные значения тензора h_{ij} , т. е. h не зависит от вращений элементов среды, характеризуемых матрицей U .

Предположим, что среда имеет предел текучести, характеризуемый величиной касательных деформаций $h = h_*$. Будем считать, что

$$(3.3) \quad \dot{\varphi}_i = \frac{dh_i^p}{dt} = 0 \text{ при } h < h_*, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{dh_i^p}{dt} = \gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt} \text{ при } h > h_*.$$

Коэффициенты γ_{ij} определяют изменение эффективных упругих деформаций при пластическом деформировании. Отметим, что может быть $\gamma_{ij} = 0$ и при $h > h_*$. Это должно иметь место при разгрузке.

Итак, для h_i в случае трехосной деформации без вращений с помощью (3.3) постулируются уравнения

$$(3.4) \quad \frac{dh_i}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt}.$$

Разрешим уравнения (3.4) относительно dh_i/dt . Обозначая $||\beta_{ij}|| = ||\delta_{ij} + \gamma_{ij}||^{-1}$, получим

$$(3.5) \quad \frac{dh_i}{dt} - \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Конкретизируем выбор матрицы β_{ij} . Во-первых, из закона сохранения массы получим три алгебраических соотношения для β_{ij} .

Закон сохранения массы определяется уравнением

$$(3.6) \quad \frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Из уравнений (3.5) имеем

$$\frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt} - \sum_{j=1}^3 (\beta_{1j} + \beta_{2j} + \beta_{3j}) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

откуда следует, что в силу (3.6)

$$\beta_{1j} + \beta_{2j} + \beta_{3j} = 1.$$

Кроме того, предположим изотропию пластической среды следующего характера: $\partial u_2/\partial x_2$ оказывает такое же влияние на изменение h_1 , как и $\partial u_3/\partial x_3$ (такие же предположения для h_2 и h_3). Эти требования означают, что

$$\beta_{12} = \beta_{13}, \beta_{21} = \beta_{23}, \beta_{31} = \beta_{32}.$$

Выбирая три независимых параметра

$$(3.7) \quad l_1 = \beta_{12} = \beta_{13}, \quad l_2 = \beta_{21} = \beta_{31}, \quad l_3 = \beta_{31} = \beta_{32},$$

получаем

$$(3.8) \quad \beta_{11} = 1 - l_2 - l_3, \quad \beta_{22} = 1 - l_3 - l_1, \quad \beta_{33} = 1 - l_1 - l_2.$$

Уравнения для h_i примут следующий вид:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= (1 - l_2 - l_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + l_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\ \frac{dh_2}{dt} &= (1 - l_3 - l_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + l_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \\ \frac{dh_3}{dt} &= (1 - l_1 - l_2) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + l_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, каким будет уравнение для энтропии в рассматриваемом случае деформации вдоль трех осей при сделанном выборе матрицы β_{ij} . При деформировании вдоль трех осей все матрицы σ_{ij} , c_{ij} , a_{ij} , φ_{ij} диагональны, поэтому с учетом (1.12) уравнение для энтропии запишется в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho E_S} \dot{\varphi}_i \sigma_i = \frac{1}{\rho E_S} (\dot{\varphi}_1 \sigma_1 + \dot{\varphi}_2 \sigma_2 + \dot{\varphi}_3 \sigma_3).$$

Пластические члены $\dot{\varphi}_i$ вычисляются по формуле (3.3), следовательно,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho E_S} \sigma_i \gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt}.$$

Используя уравнение (3.5), получаем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho E_S} \sigma_i \gamma_{ij} \sum_{\alpha=1}^3 \beta_{j\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

По определению

$$\|\gamma_{ij}\| = \|\beta_{ij}\|^{-1} - \|\delta_{ij}\|,$$

т. е.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho E_S} \sigma_i \sum_{\alpha=1}^3 (\delta_{i\alpha} - \beta_{i\alpha}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Используем выбранные формулы для β_{ij} (3.7), (3.8). Получим уравнение для S

$$(3.10) \quad \rho E_S \frac{dS}{dt} = [(\sigma_1 - \sigma_2) l_2 + (\sigma_1 - \sigma_3) l_3] \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ + [(\sigma_2 - \sigma_3) l_3 + (\sigma_2 - \sigma_1) l_1] \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + [(\sigma_3 - \sigma_1) l_1 + (\sigma_3 - \sigma_2) l_2] \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Введем члены, описывающие пластические деформации, в уравнения для тензора h_{ij} при произвольных деформациях. Будем считать, что вращения элементов среды не сопровождаются пластическими деформациями, поскольку выбранная характеристика пластических деформаций h не содержит элементов матрицы U (см. (3.2)). Тем самым полагаем $\psi_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Диагональные элементы матрицы ψ_{ij} считаем такими же, как и в случае деформации по трем осям:

$$(3.11) \quad \psi_{ii} = \gamma_{ij} dh_j/dt,$$

h_j — главные значения тензора h_{ij} .

Уравнения (2.4), (2.5) примут вид

$$(3.12) \quad \frac{dh_i}{dt} - \omega_{ii} = -\gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt}, \\ \left[U^* \frac{dU}{dt} \right]_{ij} - \frac{1}{g_i - g_j} (g_i \omega_{ij} + g_j \omega_{ji}) = 0, \quad i \neq j.$$

Можно показать, что при таком выборе ψ_{ij} имеет место

$$(3.13) \quad \rho E_S \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \psi_{ii} = \sigma_i \gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt}.$$

Уравнения для h_i также разрешим относительно dh_i/dt . Они могут быть получены из (3.9) заменой $\partial u_i/\partial x_i$ на ω_{ii}

$$(3.14) \quad \frac{dh_1}{dt} = (1 - l_2 - l_3) \omega_{11} + l_1 (\omega_{22} + \omega_{33}), \\ \frac{dh_2}{dt} = (1 - l_3 - l_1) \omega_{22} + l_2 (\omega_{33} + \omega_{11}), \quad \frac{dh_3}{dt} = (1 - l_1 - l_2) \omega_{33} + l_3 (\omega_{11} + \omega_{22}).$$

Используя (3.12), (3.14), можно написать уравнения для компонент тензора h_{ij} . Пользуясь опять тождеством

$$U^* \frac{dH}{dt} U = \frac{dD_H}{dt} + U^* \frac{dU}{dt} D_H - D_H U^* \frac{dU}{dt},$$

получим

$$(3.15) \quad \frac{dH}{dt} = U \left(\begin{array}{l} (1 - l_2 - l_3) \omega_{11} + l_1 (\omega_{22} + \omega_{33}) - \frac{h_1 - h_2}{g_1 - g_2} (g_1 \omega_{12} + g_2 \omega_{21}) \\ - \frac{h_2 - h_1}{g_2 - g_1} (g_2 \omega_{21} + g_1 \omega_{12}) (1 - l_3 - l_1) \omega_{22} + l_2 (\omega_{33} + \omega_{11}) \\ - \frac{h_3 - h_1}{g_3 - g_1} (g_3 \omega_{31} + g_1 \omega_{13}) - \frac{h_3 - h_2}{g_3 - g_2} (g_3 \omega_{32} + g_2 \omega_{23}) \\ - \frac{h_1 - h_3}{g_1 - g_3} (g_1 \omega_{13} + g_3 \omega_{31}) \\ - \frac{h_2 - h_3}{g_2 - g_3} (g_2 \omega_{23} + g_3 \omega_{32}) \\ (1 - l_1 - l_2) \omega_{33} + l_3 (\omega_{11} + \omega_{22}) \end{array} \right) U^*.$$

Здесь $g_i = e^{-2h_i}$; $\|\omega_{ij}\| = U^* \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right\| U$.

Из уравнений (3.15) для H и закона сохранения энергии можно получить уравнение для энтропии S . Для этого используем формулы для напряжений

$$\|\sigma_{ij}\| = \rho \left\| \frac{\partial E}{\partial h_{ij}} \right\| = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} U^* = U D_\sigma U^*.$$

Из уравнения для энергии имеем

$$(3.16) \quad \frac{dS}{dt} - \frac{1}{E_S} \frac{dE}{dt} - \frac{E_{h_{ij}}}{E_S} \frac{dh_{ij}}{dt} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho E_S} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{E_S} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial E}{\partial H} \frac{dH}{dt} \right).$$

Из уравнений (3.15) для H имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial E}{\partial H} \frac{dH}{dt} \right) &= \frac{1}{\rho} [\sigma_1 [(1-l_2-l_3)\omega_{11} + l_1(\omega_{22} + \omega_{33})] + \\ &+ \sigma_2 [(1-l_3-l_1)\omega_{22} + l_2(\omega_{33} + \omega_{11})] + \sigma_3 [(1-l_1-l_2)\omega_{33} + l_3(\omega_{11} + \omega_{22})]] = \\ &= \frac{1}{\rho} [(1-l_1-l_2-l_3)(\sigma_1\omega_{11} + \sigma_2\omega_{22} + \sigma_3\omega_{33}) + (l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2 + l_3\sigma_3)(\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33})]. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_1\omega_{11} + \sigma_2\omega_{22} + \sigma_3\omega_{33} &= \sigma_{ij} \partial u_i / \partial x_j, \\ \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} &= \partial u_i / \partial x_i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr} \left(\frac{\partial E}{\partial H} \frac{dH}{dt} \right) = \frac{1}{\rho} (1-l_1-l_2-l_3) \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2 + l_3\sigma_3) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.16), получим

$$(3.17) \quad \rho E_S \frac{dS}{dt} = (l_1 + l_2 + l_3) \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2 + l_3\sigma_3) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right).$$

Можно убедиться, что в случае диагональной матрицы σ_{ij} уравнение (3.17) совпадает с уравнением (3.10) для случая трехосной деформации.

Итак, уравнения (3.15) для H в совокупности с уравнениями (1.1), (1.2) для скоростей и энергии при известном уравнении состояния $E(h_1, h_2, h_3, S)$, по которому определяются напряжения (2.7), и известных коэффициентах $l_i(h_1, h_2, h_3, S)$ образуют замкнутую систему уравнений динамики упругопластической среды. Вместо уравнения для энергии в полную систему можно включать уравнение (3.17) для энтропии.

4. Характеристики. Изучим характеристические поверхности сформулированной выше системы уравнений. Для гиперболичности системы недостаточно одной только вещественности характеристик. Потребуем, чтобы матрица, описывающая распространение звуковых волн (назовем ее акустической матрицей), была симметричной. Этому требованию можно удовлетворить за счет надлежащего выбора пока еще не определенных параметров l_1, l_2, l_3 , после чего число независимых параметров пластичности сведется к одному $L = l_1 + l_2 + l_3$. Симметрия акустической матрицы и требование ее положительной определенности автоматически определяют вещественность характеристик, т. е. гиперболичность. Отметим, что свойство симметрии акустической матрицы имеет место для всех упру-

гих сред (изотропных и анизотропных). Кроме того, симметрия удобна при построении интегралов энергии, т. е. при получении априорных оценок решения и его производных.

Вычисление характеристик будем проводить в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Для этого все уравнения системы запишем в квазилинейном виде и положим во всех коэффициентах при производных от неизвестных функций матрицу U единичной. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 (E_{h_i h_j} - E_{h_i}) \frac{\partial h_{jj}}{\partial x_i} + E_{h_i S} \frac{\partial S}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{E_{h_i} - E_{h_j}}{h_i - h_j} \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_j}, \\
 \frac{dh_{11}}{dt} &= (1 - l_2 - l_3) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + l_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + l_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \frac{dh_{22}}{dt} &= l_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1 - l_3 - l_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + l_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \frac{dh_{33}}{dt} &= l_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + l_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (1 - l_1 - l_2) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \frac{dh_{ij}}{dt} &= - \frac{h_i - h_j}{g_i - g_j} \left(g_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j, \\
 \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{\rho E_S} [(\sigma_1 - \sigma_2) l_2 + (\sigma_1 - \sigma_3) l_3] \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho E_S} [(\sigma_2 - \sigma_3) l_3 + \\
 &+ (\sigma_2 - \sigma_1) l_1] \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho E_S} [(\sigma_3 - \sigma_1) l_1 + (\sigma_3 - \sigma_2) l_2] \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Применим для вычисления характеристик этой системы прием [4, 5]. Продифференцированная система может быть путем исключения сведена к системе уравнений второго порядка замкнутой в старших производных относительно скоростей. Заметим, что операция дифференцирования уравнений и приведение уравнений к главным осям перестановочны с точностью до младших членов, которые несущественны для вычисления характеристик.

Применим к уравнениям для u_i системы (4.1) оператор $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$ и подставим в них нужные производные по пространственным координатам x_i от dh_{ij}/dt , dS/dt . Будем следить при этом только за членами уравнений, содержащими старшие производные второго порядка. В результате получим систему уравнений, замкнутую в старших членах относительно u_i

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= L_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + M_3 e^{-2h_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + M_2 e^{-2h_3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + R_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + R_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \dots, \\
 \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= D_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + M_3 e^{-2h_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + L_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + M_1 e^{-2h_3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + R_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \dots, \\
 \frac{d^2 u_3}{dt^2} &= P_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + P_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + M_2 e^{-2h_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + M_1 e^{-2h_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + L_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Коэффициенты L_i , M_i , R_i , P_i вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 L_1 &= (E_{h_1 h_1} - E_{h_1}) + (E_{h_1 h_2} - E_{h_1 h_1}) l_2 + (E_{h_1 h_3} - E_{h_1 h_1}) l_3 + \\
 &+ \frac{E_{h_1 S}}{\rho E_S} [(\sigma_1 - \sigma_2) l_2 + (\sigma_1 - \sigma_3) l_3],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= (E_{h_2 h_2} - E_{h_2}) + (E_{h_2 h_3} - E_{h_2 h_2}) l_3 + (E_{h_2 h_1} - E_{h_2 h_2}) l_1 + \\
&\quad + \frac{E_{h_2 S}}{\rho E_S} [(\sigma_2 - \sigma_3) l_3 + (\sigma_2 - \sigma_1) l_1], \\
L_3 &= (E_{h_3 h_3} - E_{h_3}) + (E_{h_3 h_1} - E_{h_3 h_3}) l_1 + (E_{h_3 h_2} - E_{h_3 h_3}) l_2 + \\
&\quad + \frac{E_{h_3 S}}{\rho E_S} [(\sigma_3 - \sigma_1) l_1 + (\sigma_3 - \sigma_2) l_2], \\
M_1 &= \frac{E_{h_2} - E_{h_3}}{e^{2h_2} - e^{2h_3}}, \quad M_2 = \frac{E_{h_3} - E_{h_1}}{e^{2h_3} - e^{2h_1}}, \quad M_3 = \frac{E_{h_1} - E_{h_2}}{e^{2h_1} - e^{2h_2}}, \\
R_i &= E_{h_j h_k} + \frac{e^{2h_k} E_{h_j} - e^{2h_j} E_{h_k}}{e^{2h_j} - e^{2h_k}} + (E_{h_j h_i} - E_{h_j h_k}) l_i + \\
&\quad + (E_{h_j h_j} - E_{h_j h_k}) l_j + \frac{E_{h_j S}}{\rho E_S} [(\sigma_k - \sigma_i) l_i + (\sigma_k - \sigma_j) l_j], \\
P_i &= E_{h_j h_k} + \frac{e^{2h_k} E_{h_j} - e^{2h_j} E_{h_k}}{e^{2h_j} - e^{2h_k}} + (E_{h_k h_k} - E_{h_k h_j}) l_k + \\
&\quad + (E_{h_k h_i} - E_{h_k h_j}) l_i + \frac{E_{h_i S}}{\rho E_S} [(\sigma_j - \sigma_k) l_k + (\sigma_j - \sigma_i) l_i], \\
&\quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k.
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения для h_{ij} , S можно теперь не рассматривать, отвечающие им характеристики отвечают линиям тока [4].

Если обозначить через $(\omega, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ вектор нормали к характеристической поверхности, то уравнение характеристических нормалей для системы (4.2) имеет вид

$$(4.3) \quad \det(\Omega^2 I - \Lambda) = 0,$$

где $\Omega = \omega + u_\alpha \xi_\alpha$; Λ — акустическая матрица вида

$$(4.4) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} L_1 \xi_1^2 + M_3 e^{2h_2} \xi_2^2 + M_2 e^{2h_3} \xi_3^2 & R_3 \xi_1 \xi_2 & R_2 \xi_1 \xi_3 \\ P_3 \xi_2 \xi_1 & M_3 e^{2h_1} \xi_1^2 + L_2 \xi_2^2 + M_1 e^{2h_3} \xi_3^2 & R_1 \xi_2 \xi_3 \\ P_2 \xi_3 \xi_1 & P_1 \xi_3 \xi_2 & M_2 e^{2h_1} \xi_1^2 + M_1 e^{2h_2} \xi_2^2 + L_3 \xi_3^2 \end{pmatrix}.$$

Для гиперболичности системы (4.2) необходимо потребовать, чтобы уравнение (4.3) имело положительные корни Ω^2 . Для данной матрицы Λ затруднительно сделать заключение о допустимых областях коэффициентов L_i, M_i, R_i, P_i , в которых уравнение (4.3) имеет корни $\Omega^2 > 0$. Имеется еще свобода в выборе коэффициентов l_1, l_2, l_3 , определяющих пластические деформации и входящих в L_i, M_i, R_i, P_i . Воспользовавшись этим обстоятельством, потребуем, чтобы матрица Λ была симметричной. Если матрица Λ симметричная, то при условии ее положительной определенности сразу получаем $\Omega^2 > 0$. Конечно, выписать все условия положительной определенности такой матрицы Λ тоже затруднительно, но, по крайней мере, можно будет указать некоторые необходимые условия положительной определенности. Требование симметрии матрицы Λ сводится к выполнению равенств $P_1 = R_1, P_2 = R_2, P_3 = R_3$, которые являются однородными линейными уравнениями для l_1, l_2, l_3 :

$$\begin{aligned}
 & (E_{h_2 h_1} - E_{h_3 h_1}) l_1 + (E_{h_2 h_2} - E_{h_2 h_3}) l_2 + (E_{h_2 h_2} - E_{h_3 h_3}) l_3 + \\
 & + \frac{1}{\rho E_S} [E_{h_2 S} (\sigma_3 - \sigma_1) + E_{h_3 S} (\sigma_1 - \sigma_2)] l_1 + \frac{E_{h_2 S}}{\rho E_S} (\sigma_3 - \sigma_2) l_2 + \\
 & + \frac{E_{h_3 S}}{\rho E_S} (\sigma_3 - \sigma_2) l_3 = 0, \\
 (4.5) \quad & (E_{h_1 h_3} - E_{h_1 h_1}) l_1 + (E_{h_3 h_2} - E_{h_1 h_2}) l_2 + (E_{h_3 h_3} - E_{h_2 h_1}) l_3 + \\
 & + \frac{E_{h_1 S}}{\rho E_S} (\sigma_1 - \sigma_3) l_1 + \frac{1}{\rho E_S} [E_{h_1 S} (\sigma_2 - \sigma_3) + E_{h_3 S} (\sigma_1 - \sigma_2)] l_2 + \\
 & + \frac{E_{h_1 S}}{\rho E_S} (\sigma_1 - \sigma_3) l_3 = 0, \\
 & (E_{h_1 h_1} - E_{h_1 h_2}) l_1 + (E_{h_1 h_2} - E_{h_2 h_2}) l_2 + (E_{h_1 h_3} - E_{h_2 h_3}) l_3 + \\
 & + \frac{E_{h_1 S}}{\rho E_S} (\sigma_2 - \sigma_1) l_1 + \frac{E_{h_2 S}}{\rho E_S} (\sigma_2 - \sigma_1) l_2 + \frac{1}{\rho E_S} [E_{h_1 S} (\sigma_2 - \sigma_3) + \\
 & + E_{h_2 S} (\sigma_3 - \sigma_1)] l_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Предположим, что уравнение состояния имеет вид

$$E(h_1, h_2, h_3, S) = E^0(\rho, S) + E^1(h_1, h_2, h_3).$$

Для таких уравнений состояния имеет место

$$(4.6) \quad (E_S)_{h_i} = (E_S)_{h_2} = (E_S)_{h_3} = -\rho E_{\rho S}^0(\rho, S),$$

С использованием (4.6) видно, что сумма левых частей уравнений (4.5) тождественно равна нулю. Следовательно, система (4.5) разрешима и параметры l_1, l_2, l_3 можно выразить через один произвольный параметр L . Обозначив $L = l_1 + l_2 + l_3$ и учитывая, что $E_S = T$ — температура, $(E_S)_{h_i} = -\rho E_{\rho S}^0 = -\rho T_{\rho}$, получим

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{L}{F_1 + F_2 + F_3} \left[F_1 + \frac{T_{\rho}}{T} [\sigma_1 (2E_{h_3 h_2} - E_{h_2 h_2} - E_{h_3 h_3}) + \right. \\
 & \left. + \sigma_2 (E_{h_1 h_2} + E_{h_3 h_3} - E_{h_3 h_1} - E_{h_3 h_2}) + \sigma_3 (E_{h_1 h_3} - E_{h_2 h_2} - E_{h_2 h_1} - E_{h_2 h_3}) \right], \\
 (4.7) \quad l_2 &= \frac{L}{F_1 + F_2 + F_3} \left[F_2 + \frac{T_{\rho}}{T} [\sigma_1 (E_{h_2 h_1} + E_{h_3 h_3} - E_{h_3 h_1} - E_{h_3 h_2}) + \right. \\
 & \left. + \sigma_2 (2E_{h_1 h_3} - E_{h_1 h_1} - E_{h_3 h_3}) + \sigma_3 (E_{h_2 h_3} + E_{h_1 h_1} - E_{h_2 h_1} - E_{h_1 h_3}) \right], \\
 l_3 &= \frac{L}{F_1 + F_2 + F_3} \left[F_3 + \frac{T_{\rho}}{T} [\sigma_1 (E_{h_3 h_1} + E_{h_2 h_2} - E_{h_3 h_3} - E_{h_2 h_1}) + \right. \\
 & \left. + \sigma_2 (E_{h_3 h_2} + E_{h_1 h_1} - E_{h_1 h_3} - E_{h_1 h_2}) + \sigma_3 (2E_{h_1 h_2} - E_{h_1 h_1} - E_{h_2 h_2}) \right],
 \end{aligned}$$

где F_i — сумма алгебраических дополнений элементов i -го столбца (строки) матрицы $\|E_{h_i h_j}\|$:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{vmatrix} E_{h_2 h_2} & E_{h_2 h_3} \\ E_{h_3 h_2} & E_{h_3 h_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_{h_1 h_2} & E_{h_1 h_3} \\ E_{h_3 h_2} & E_{h_3 h_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{h_1 h_2} & E_{h_1 h_3} \\ E_{h_2 h_2} & E_{h_2 h_3} \end{vmatrix}, \\
 F_2 &= \begin{vmatrix} E_{h_1 h_1} & E_{h_1 h_3} \\ E_{h_3 h_1} & E_{h_3 h_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_{h_3 h_1} & E_{h_2 h_3} \\ E_{h_3 h_1} & E_{h_3 h_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_{h_1 h_1} & E_{h_1 h_3} \\ E_{h_2 h_1} & E_{h_2 h_3} \end{vmatrix}, \\
 F_3 &= \begin{vmatrix} E_{h_1 h_1} & E_{h_1 h_2} \\ E_{h_2 h_1} & E_{h_2 h_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_{h_1 h_1} & E_{h_1 h_2} \\ E_{h_3 h_1} & E_{h_3 h_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{h_2 h_1} & E_{h_3 h_2} \\ E_{h_1 h_3} & E_{h_3 h_3} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Выпишем теперь уравнение характеристических нормалей для уравнения состояния

$$E = \frac{\lambda}{2\rho_0} (h_1 + h_2 + h_3)^2 + \frac{\mu}{\rho_0} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2),$$

причем все коэффициенты акустической матрицы Λ вычислим в точке $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Такая акустическая матрица будет описывать распространение звуковых волн в «линейно-пластической» среде.

Используя формулы для вычисления L_i, M_i, P_i и учитывая, что в рассматриваемом случае $l_1 = l_2 = l_3 = L/3$, имеем

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 = L_3 &= \frac{1}{\rho_0} \left(\lambda + 2\mu - \frac{4}{3} \mu L \right), & M_1 = M_2 = M_3 &= \frac{\mu}{\rho_0}, \\ P_1 = P_2 = P_3 &= \frac{1}{\rho_0} \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right). \end{aligned}$$

Матрица Λ будет иметь вид

$$\rho_0 \Lambda = \begin{pmatrix} \left(\lambda + 2\mu - \frac{4}{3} \mu L \right) \xi_1^2 + \mu (\xi_2^2 + \xi_3^2) & \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_1 \xi_2 & & & & \\ \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_2 \xi_1 & \left(\lambda + 2\mu - \frac{4}{3} \mu L \right) \xi_2^2 + \mu (\xi_3^2 + \xi_1^2) & & & & \\ \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_3 \xi_1 & & \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_3 \xi_2 & & & \\ & & \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_1 \xi_2 & & & \\ & & \left(\lambda + \mu + \frac{2}{3} \mu L \right) \xi_1 \xi_3 & & & \\ & & \left(\lambda + 2\mu - \frac{4}{3} \mu L \right) \xi_3^2 + \mu (\xi_1^2 + \xi_2^2) & & & \end{pmatrix}.$$

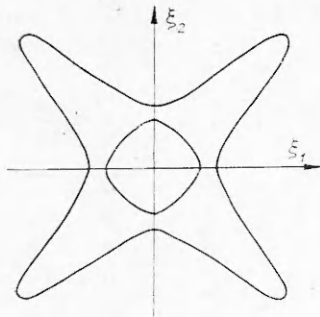
Рассмотрим случай плоских волн, который отвечает двумерной системе уравнений. Для этого случая нужно изучать матрицу Λ второго порядка с $\xi_3 = 0$. Характеристическое уравнение (4.3) будет иметь вид (обозначим $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$)

$$\begin{aligned} (\rho_0 \Omega^2)^2 - \left(K + \mu + \frac{4}{3} \mu (1 - L) \right) (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\rho_0 \Omega^2) + \mu \left(K + \frac{4}{3} \mu (1 - L) \right) \times \\ \times (\xi_1^4 + \xi_2^4) - 2\mu \left(K - 2 \left(K + \frac{1}{3} \mu \right) (1 - L) + \frac{2}{3} \mu (1 - L)^2 \right) \xi_1^2 \xi_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Сечение поверхностей характеристических нормалей плоскостью $\Omega = \text{const}$ изображено на фиг. 1.

Отметим, что подробное изучение поверхностей характеристических нормалей и характеристических поверхностей для анизотропных упругих сред в случае плоских волн содержится в [7].

5. Пластические деформации. Возрастание энтропии. Требование симметрии акустической матрицы для некоторого класса уравнений состояния позволило выделить один параметр L , характеризующий пластические деформации. Посмотрим теперь, как определяются пластические деформации с помощью этого параметра L .



Ф и г. 1

Уравнения упругопластических деформаций для эффективных упругих деформаций имеют вид

$$dh_i/dt - \omega_{ii} = -\dot{\psi}_{ii} = -\gamma_{ij} dh_j/dt.$$

Коэффициенты γ_{ij} определяются из формулы

$$\|\gamma_{ij}\| = \|\beta_{ij}\|^{-1} - \|\delta_{ij}\|,$$

а β_{ij} выражаются через три параметра l_1, l_2, l_3 , согласно (3.7), (3.8), которые, в свою очередь, выражаются через один параметр $L = l_1 + l_2 + l_3$ из условий симметрии акустической матрицы по формулам (4.7).

Исходя из этого, коэффициенты γ_{ij} можно вычислить по формулам

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= (L - l_1)/(1 - L), \quad \gamma_{22} = (L - l_2)/(1 - L), \\ \gamma_{33} &= (L - l_3)/(1 - L), \\ \gamma_{12} = \gamma_{13} &= -l_1/(1 - L), \quad \gamma_{21} = \gamma_{23} = -l_2/(1 - L), \\ \gamma_{31} = \gamma_{32} &= -l_3/(1 - L), \end{aligned}$$

откуда

$$(5.2) \quad \psi_{ii} = \gamma_{ij} \frac{dh_j}{dt} = \frac{1}{1-L} \left[L \frac{dh_i}{dt} - l_i \frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt} \right].$$

Формулы (5.2) выражают скорость изменения пластических деформаций через скорость изменения эффективных упругих деформаций, а значит, через скорость изменения напряжений.

Действительно, в случае трехосной деформации без вращений имеем

$$(5.3) \quad \frac{dh_i^p}{dt} = \psi_{ii} = \frac{1}{1-L} \left[L \frac{dh_i}{dt} - l_i \frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt} \right].$$

Для уравнения состояния (4.8), используя выражение (4.9) для $\dot{\epsilon}_i$, и для

$$\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \rho B(\rho) \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)$$

получаем

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \frac{dh_i^p}{dt} &= \frac{L}{1-L} \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) - \\ &- \frac{L}{1-L} \frac{T_\rho}{2\rho BT} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned}$$

Можно видеть, что, если не учитывать температурных эффектов, соотношения (5.3) примут вид

$$\frac{dh_i^p}{dt} = \frac{L}{1-L} \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right).$$

Эти соотношения, являющиеся частным случаем (5.2), напоминают уравнения деформационной теории пластичности Генки [8]. Отсюда же

видны возможные предельные случаи: если $L = 0$, то $dh_i^u/dt = 0$, т. е. деформации проходят упруго, если $L = 1$, то $\frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) = 0$, т. е. пластические деформации протекают при неизменном девiatorе напряжений (идеальная пластичность).

Область изменения параметра пластичности L расположена в интервале $[0, 1]$:

$$0 \leq L \leq 1.$$

Рассмотрим теперь уравнение для энтропии. Закон возрастания энтропии дает возможность выделять области, где деформации проходят только упруго. Уравнение для энтропии имеет вид (3.13). Используя формулы (5.1) для ψ_{ii} , получаем

(5.5)

$$\rho E_S \frac{dS}{dt} = \frac{L}{1-L} \bar{\sigma}_i \frac{d \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)}{dt} + \sigma_i \left(\frac{L}{3} - l_i \right) \frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt}.$$

Требование неубывания энтропии влечет необходимость выполнения неравенства

$$(5.6) \quad \frac{1}{1-L} [(L - l_1) \sigma_1 - l_2 \sigma_2 - l_3 \sigma_3] \frac{dh_1}{dt} + \frac{1}{1-L} [(L - l_2) \sigma_2 - l_3 \sigma_3 - l_1 \sigma_1] \frac{dh_2}{dt} + \frac{1}{1-L} [(L - l_3) \sigma_3 - l_1 \sigma_1 - l_2 \sigma_2] \frac{dh_3}{dt} \geq 0.$$

Как только это неравенство нарушается, необходимо полагать $L = 0$ (а значит, $l_i = 0$), даже если интенсивность касательных деформаций $h > h_*$ — предел текучести.

6. Уругопластические деформации плоского слоя. Рассмотрим в качестве примера использования сформулированной нами системы уравнений задачу о деформации плоского слоя. Уравнение для описания таких процессов с помощью модели Максвелла приведены в [3].

Для вывода уравнений деформации плоского слоя по уругопластической модели выпишем одномерную систему уравнений. Используем уравнения (1.1), (3.15), (3.17) для скоростей, тензора деформаций и энтропии. Поскольку движение одномерное, полагаем $u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$, $h_{11} = h_1$, $h_{22} = h_{33} = h_2$, $h_{ij} = 0$ ($i \neq j$), при этом $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_2$, $l_2 = l_3$, считаем, что неизвестные функции зависят только от одной пространственной координаты $x = x_1$. Одномерные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} &= 0, & \frac{dh_1}{dt} - (1 - 2l_2) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dh_2}{dt} - l_2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{dS}{dt} - \frac{2l_2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{\rho E_S} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Для простоты будем изучать процессы без учета температурных эффектов, предполагая, что напряжения с эффективными упругими деформациями связаны соотношениями типа закона Гука

$$\sigma_i = \frac{\lambda}{\rho_0} (h_1 + h_2 + h_3) + \frac{2\mu}{\rho_0} h_i.$$

Поэтому не будем рассматривать уравнения для энтропии. Кроме того,

при такой зависимости $\sigma_i(h_1, h_2, h_3)$ имеет место $l_1 = l_2 = l_3 = L/3$. Далее рассматриваются малые промежутки времени, для которых можно считать $\partial u/\partial x = \dot{\varepsilon} = \text{const}$ (отсюда следует, что уравнение для u также можно не рассматривать).

Окончательная система уравнений описания деформации плоского слоя после сделанных упрощений принимает вид

$$(6.1) \quad \frac{dh_1}{dt} = \left(1 - \frac{2}{3}L\right)\dot{\varepsilon}, \quad \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{3}L\dot{\varepsilon}.$$

Напряжения вычисляются по формулам

$$(6.2) \quad \sigma_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} h_1 + \frac{2\lambda}{\rho_0} h_2, \quad \sigma_2 = \frac{\lambda}{\rho_0} h_1 + \frac{2(\lambda + \mu)}{\rho_0} h_2.$$

Критерием протекания пластических деформаций по-прежнему остается неравенство (5.5), которое для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{L}{1-L} \sigma_i \frac{d\left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)}{dt} &= \frac{L}{1-L} \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \geq \\ &\geq \frac{d\left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)}{dt} \geq 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\mu}{\rho_0} \frac{L}{1-L} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\mu} \frac{L}{1-L} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, в нашем случае $L = 0$, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$(6.3) \quad h = |h_1 - h_2| < h_*, \quad \frac{d}{dt} |h_1 - h_2| < 0.$$

Вне этих областей изменения $h_1 - h_2$ считаем $L = \text{const} > 0$.

Таким образом, система (6.1) описания деформации плоского слоя замкнута с помощью выбора двух констант h_* и L , которые характеризуют пластические свойства среды. Заметим, что величина $\varepsilon = \dot{\varepsilon}t$ имеет смысл реальной деформации слоя. Действительно, полная деформация определяется из уравнений (5.2)

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} + \frac{dh_1^p}{dt} - \frac{dh_1}{dt} + \frac{1}{1-L} \left[L \frac{dh_1}{dt} - \frac{L}{3} \frac{d(h_1 + h_2 + h_3)}{dt} \right] &= \\ = \frac{1}{1-L} \frac{dh_1}{dt} - \frac{L}{3(1-L)} \frac{d(h_1 + 2h_2)}{dt} - \frac{1 - \frac{2}{3}L}{1-L} \dot{\varepsilon} - \frac{L}{3(1-L)} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}, \end{aligned}$$

откуда $h_1 + h_1^p = \dot{\varepsilon}t + \text{const}$.

Начнем растягивать слой с постоянной скоростью деформации $\dot{\varepsilon} > 0$. Пока $|h_1 - h_2| < h_*$, имеем ($L = 0$)

$$h_1(t) = \dot{\varepsilon}t, \quad h_2(t) = 0, \quad \sigma_1(t) = [(\lambda + 2\mu)/\rho_0] \dot{\varepsilon}t.$$

Как только становится $h_1 - h_2 = h_*$, считаем $L = \text{const} > 0$. Обозначим этот момент времени t_1

$$h_1(t_1) = \dot{\varepsilon}t_1 = \varepsilon_1 = h_*, \quad \sigma_1(t_1) = [(\lambda + 2\mu)/\rho_0] h_*.$$

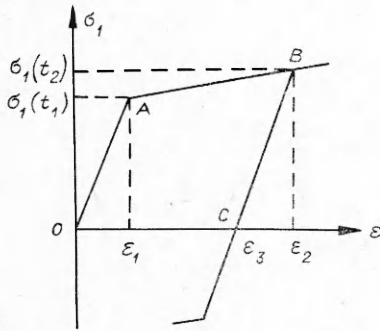
Продолжим растяжение слоя дальше до момента времени t_2 , при этом

$$(6.4) \quad h_1(t) = h_* + \left(1 - \frac{2}{3}L\right) \dot{\varepsilon}(t - t_1), \quad h_2(t) = \frac{1}{3}L \dot{\varepsilon}(t - t_1),$$

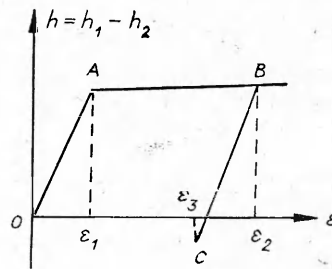
$$\sigma_1(t) = \sigma_1(t_1) + \frac{\lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\mu L}{\rho_0} \dot{\varepsilon}(t - t_1),$$

$$h_1(t) - h_2(t) = h_* + (1 - L)\dot{\varepsilon}(t - t_1).$$

Видно, что при деформации за пределом упругости растет σ_1 ; также растет интенсивность касательных деформаций $h = |h_1 - h_2| > h_*$ (фиг. 2, 3,



Ф и г. 2



Ф и г. 3

участки AB). Выберем какой-либо момент времени, начиная с которого прекратим растяжение стержня и начнем его сжимать со скоростью деформации $-\dot{\varepsilon}$ (в уравнения (6.1) вместо $\dot{\varepsilon}$ нужно подставить $-\dot{\varepsilon}$). На этом участке деформации в силу условий (6.3) полагаем $L = 0$. Решая уравнения (6.1), находим на участке BC

$$h_1(t) = h_1(t_2) - \dot{\varepsilon}(t - t_2), \quad h_2(t) = h_2(t_2),$$

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(t_2) - [(\lambda + 2\mu)/\rho_0] \dot{\varepsilon}(t - t_2),$$

$$h_1(t) - h_2(t) = h_1(t_2) - h_2(t_2) - \dot{\varepsilon}(t - t_2),$$

где $h_1(t_2), h_2(t_2), \sigma_1(t_2)$ определяется из (6.4). Будем сжимать слой, пока не станет $\sigma_1 = 0$. Обозначив этот момент времени t_3 , определим его из уравнения

$$\sigma_1(t_3) = \sigma_1(t_2) - [(\lambda + 2\mu)/\rho_0] \dot{\varepsilon}(t_3 - t_2) = 0.$$

Находим

$$\dot{\varepsilon}(t_3 - t_2) = [\rho_0/(\lambda + 2\mu)] \sigma_1(t_2).$$

В момент времени t_3

$$\sigma_1(t_3) = 0, \quad h_1(t_3) = h_1(t_2) - \dot{\varepsilon}(t_3 - t_2), \quad h_2(t_3) = h_2(t_2).$$

Далее, в этот момент времени

$$\begin{aligned} h_1(t_3) - h_2(t_3) &= h_1(t_2) - h_2(t_2) - \dot{\varepsilon}(t_3 - t_2) = \\ &= h_* + \left(1 - \frac{2}{3}L\right) \dot{\varepsilon}(t_2 - t_1) - \frac{4}{3}L \dot{\varepsilon}(t_2 - t_1) - \dot{\varepsilon}(t_3 - t_2) = \\ &= -\frac{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)L}{\lambda + 2\mu} \dot{\varepsilon}(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

и, поскольку $L > 0$, $\lambda + 2\mu/3 > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$, имеем $h_1(t_3) - h_2(t_3) < 0$. Таким образом, когда $\sigma_1 = 0$, интенсивность касательных деформаций $h_1 - h_2 < 0$.

Заметим следующее:

1. Если стержень опять подвергнуть растяжению с той же скоростью деформации $\dot{\varepsilon}$, то для выхода в область пластичности $|h_1 - h_2| \geq h_*$ необходимо совершить большую деформацию, чем $\varepsilon_1 = h_*$, так как начинаем растяжение при $h_1 - h_2 < 0$. При этом очевидно, что при выходе на пластический участок $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_2)$ (см. фиг. 2). Этот эффект интерпретирует явление упрочнения.

2. Если продолжать сжимать стержень от момента $\sigma_1 = 0$ дальше с той же скоростью деформации, то нужно совершить меньшую деформацию для выхода в область пластичности по той причине, что уже имеется $h_1 - h_2 < 0$. Причем при выходе на пластичность $\sigma_1 < \sigma_1(\varepsilon_1)$ (см. фиг. 2). Это явление имеет характер эффекта Баушингера.

Если рассматривать нелинейную зависимость $\sigma_i = \sigma_i(h_1, h_2, h_3, S)$, $l_i = l_i(h_1, h_2, h_3, S)$ с учетом температуры, то все участки деформирования на фиг. 2,3 будут отличаться от прямолинейных.

Автор выражает благодарность С. К. Годунову за интерес к работе.

Поступила 19 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. — ПММ, 1945, т. 9, № 1, с. 91—100.
2. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М., «Наука», 1973.
4. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. — ПМТФ, 1972, № 6, с. 124—144.
5. Роменский Е. И. Конусы характеристик уравнений нелинейной теории упругости. — ПМТФ, 1974, № 3, с. 126—132.
6. Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И. Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций. — ПМТФ, 1974, № 2, с. 123—128.
7. Rayton R. G. Two dimensional wave front shape induced in a homogeneously strained elastic body by a point perturbing body force. — «Arch. Rat. Mech. Anal.», 1969, vol 32, N 4, p. 311—330.
8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.