

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ, В КОТОРОЙ ПРОИСХОДИТ
МНОГОКРАТНАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ

Н. Н. Магретова, Н. Т. Пащенко, Ю. П. Райзер

(Москва)

Рассмотрена ионизационная релаксация в ударной волне очень большой амплитуды, за фронтом которой атомы многократно ионизованы. При расчете структуры ударной волны и кинетики ионизации принята во внимание электронная теплопроводность, которая играет важную роль. Предложен и использован упрощенный способ расчета кинетики многократной ионизации. Результаты расчета структуры показывают, что вследствие теплопроводностного прогрева газ сильно ионизируется уже перед скачком уплотнения, а электронная теплопроводность проходит через максимум.

Ионизационная релаксация за фронтом ударной волны в газе изучалась и экспериментально, и теоретически, однако при этом рассматривались только не чрезмерно сильные волны, в которых происходит лишь слабая ионизация атомов¹. Один из основных моментов здесь — это вопрос о механизме первичной ионизации, о «затравочных» электронах, от которых начинается электронная лавина, развивающаяся путем ионизации атомов за счет электронных ударов. В большинстве работ считается, что первичные электроны появляются при атом-атомных столкновениях, хотя обсуждалась и возможность начальной ионизации за счет действия светового излучения. Существенной особенностью процесса ионизационной релаксации является различие температур электронов и тяжелых частиц — атомов и ионов. В ударной волне кинетическая энергия набегающего потока превращается в тепловую энергию тяжелых частиц, эта энергия постепенно передается от атомов и ионов электронам, которые ионизируют атомы. Вследствие замедленности обмена энергией между тяжелыми и легкими частицами и получается отставание электронной температуры от атомной.

Рассчитывалась также структура ударной волны в частично или полностью ионизованном газе в предположении постоянства степени ионизации. Здесь была выяснена существенная роль электронной теплопроводности, благодаря которой электронный газ прогревается перед скачком уплотнения до температуры, близкой к равновесной температуре за ударной волной. Вычисления показали, что при сильной ионизации электронная теплопроводность и обмен энергией между электронами и ионами в равной степени влияют на структуру релаксационного слоя в ударной волне. Заметим, что при рассмотрении кинетики ионизации электронная теплопроводность никогда не принималась во внимание, возможно потому, что при слабой ионизации она не играет столь существенной роли.

Ниже изучается структура очень сильных ударных волн с равновесными температурами порядка сотни тысяч градусов и выше, когда атомы оказываются многократно ионизованными. Кинетику многократной ионизации в условиях, близких к осуществляющимся в ударных волнах, рассматривали ранее В. А. Бронштэн и А. Н. Чигорин^[3] в связи с проблемой движения в атмосфере метеорных тел, обладающих очень большими скоростями (см. также^[4, 5]). Однако эти расчеты, весьма показательные и, кажется, единственные в своем роде, не дают еще полного представления о действительной структуре ударной волны, так как они сделаны без учета электронной теплопроводности. Последняя, как будет видно из дальнейшего, играет важную роль в установлении распределения электронной температуры, которой, в первую очередь, определяется скорость ионизации. Не учитывалась при расчете и гидродинамика — объем газа считался постоянным и выравнивание электронной и атомной температур происходило при неизменном запасе полной внутренней энергии. (Кроме того, ниже пересмотрен и иначе решен вопрос о скоростях реакций ионизации ионов различной кратности.)

Надо сказать, что рассматриваемая здесь задача в математическом отношении существенно отличается от других ранее решавшихся задач о структуре ударной волны. Как обычно, дело сводится к нахождению интегральной кривой, соединяющей особые

¹ Изложение этого вопроса можно найти, например, в книге^[1]; довольно полная библиография есть в одной из последних работ^[2].

точки системы, и околоравновесные состояния, и установление равновесия определяются поведением интегральной кривой системы в окрестности особых точек. Однако, в отличие от ранее рассмотренных задач [6, 7], одновременный учет кинетики ионизации и электронной теплопроводности приводит к тому, что приходится исследовать поведение кривой в окрестности особой точки не на фазовой плоскости, а в фазовом пространстве, что намного усложняет как само качественное исследование, так и численный счет. Если численное интегрирование на плоскости в окрестности седловой точки не представляет особых трудностей ввиду специфического характера седла, то в пространственном случае дело обстоит не так просто — особая точка типа обобщенного седла является обычным седлом в одних плоскостях и узлом в других, и небольшая ошибка при численном интегрировании может привести к уходу от искомого решения.

1. Перейдем к постановке задачи. Рассмотрим плоскую ударную волну в системе координат, связанной с волной, т. е. одномерное стационарное движение газа в бесконечном пространстве. Перед волной газ, вообще говоря, холодный и не ионизован, за волной температура столь высока, что атомы многократно ионизованы. Термодинамически равновесное состояние газа за волной полностью определяется начальной плотностью и каким-либо параметром, характеризующим амплитуду волны, например скоростью фронта или температурой за фронтом. Это состояние (степень ионизации, плотность и т. д.) может быть рассчитано на основе известных соотношений на ударном разрыве и термодинамических функций ионизованного газа (см., например, [1, 8])¹.

Вязкостью и теплопроводностью тяжелых частиц пренебрегаем, заменяя вязкий слой разрывом. Вязкость электронного газа также несущественна, но электронная теплопроводность, которая существенно больше ионно-атомной, действует как перед, так и за скачком уплотнения. Температуры электронного и атомно-ионного газа считаются различными.

Газ рассматривается как одноатомный, ибо в столь сильной ударной волне, в которой происходит многократная ионизация, молекулы (если холодный газ молекулярный) диссоциируют чрезвычайно быстро и при относительно низких температурах.

Излучение и лучистый теплообмен не учитываются [1]. Если плотность газа высока, допустим, порядка плотности атмосферного воздуха, длина пробега излучения, определяющая пространственный масштаб области лучистого теплообмена, гораздо больше зон ионизационной релаксации и электронного прогрева перед фронтом, которые в рассматриваемой задаче только и интересны. Если же газ разреженный, нагретая область прозрачна для излучения, плотность излучения в ней гораздо меньше термодинамически равновесной, и излучение вообще мало влияет на структуру ударной волны.

Вопрос о первичной ионизации холодного газа в случае сильной ударной волны вообще не возникает, так как при температурах нагретой области в сотни тысяч градусов излучение всегда достаточно интенсивно для того, чтобы создать небольшое количество электронов перед волной, которые и начинают электронную лавину. Структура ударной волны практически не зависит от величины начальной ионизации.

Введем некоторые обозначения и определения. В каждом состоянии в газе содержатся ионы различных кратностей m . Все тяжелые частицы для краткости будем называть ионами; атомы — это ионы с зарядом $m = 0$.

Пусть $N = \sum N_m$ — полное число тяжелых частиц в 1 м.м^3 , где N_m — плотность m -ионов; суммирование по m всегда начинаем с $m = 0$.

¹ Соотношения на разрыве можно получить из системы уравнений, описывающих структуру волны, устремляя пространственную координату к бесконечности в обе стороны.

Пусть I_1, I_2, \dots — потенциалы последовательных ионизаций атома; $I_0 = 0, I_{m+1}$ — потенциал ионизации m -иона. Потенциальная энергия m -иона, т. е. энергия, затраченная на его образование из атома путем отрыва первых m электронов, есть $Q_m = I_1 + I_2 + \dots + I_m$. Средняя потенциальная энергия, приходящаяся на один ион при данном ионном составе,

$$\langle Q \rangle = \sum \alpha_m Q_m, \quad \alpha_m = \sum N_m / N$$

Здесь α_m — концентрация m -ионов. Ионы ионизируются электронными ударами и необходимая для этого энергия черпается непосредственно из запаса тепловой энергии электронного газа.

Обозначим температуру и давление ионов через T и p ($p = NkT$), электронов — T_e и p_e ($p_e = N_e k T_e$), где N_e — плотность электронов. Газ считаем электронейтральным, т. е. электронную и ионную компоненты жестко связанными. При этом $N_e = \sum m N_m$, т. е. среднее зарядовое число ионов $\langle m \rangle = \sum m \alpha_m$ совпадает со степенью ионизации атомов $\alpha = N_e / N$, а макроскопические скорости одинаковы для обеих компонент.

Жесткость связи электронного и ионного газа обеспечивается сильным кулоновским полем поляризации E , возникающим вследствие фактически всегда существующего небольшого разделения зарядов. Из-за ничтожно малой инерции электронов кулоновская сила, действующая на электроны, с точностью до малой порядка отношения масс электронов и ионов m_e / M уравнивается силой градиента электронного давления — $N_e e E = -dp_e / dx$. Равная и противоположная сила действует на 1 см^3 ионного газа.

В сделанных предположениях система гидродинамических уравнений для одномерного стационарного течения многокомпонентной смеси имеет вид (см., например, [1])

$$\frac{d}{dx} (N_m u) = q_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad \sum_{m=0} N_m = N \quad (1.1)$$

$$M N u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{dp_e}{dx} \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[N_e u \left(\frac{5}{2} k T_e \right) \right] = -\frac{dS}{dx} + \frac{dp_e}{dx} u + \omega_{ie} - \sum Q_m q_m \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[N u \left(\frac{5}{2} k T + \frac{M u^2}{2} \right) \right] = -\frac{dp_e}{dx} - \omega_{ie} \quad (1.4)$$

$$\omega_{ie} = \frac{3}{2} \frac{N_e k (T - T_e)}{\tau_{ei}}$$

$$S = -\kappa_e \frac{dT_e}{dx} \quad (1.5)$$

Здесь q_m — скорость изменения числа m -ионов в $1 \text{ см}^3/\text{сек}$, связанная с реакциями ионизации m - и $(m-1)$ -ионов и рекомбинации m - и $(m+1)$ -ионов, S — поток тепла за счет теплопроводности, κ_e — коэффициент электронной теплопроводности, член с малой кинетической энергией электронов $1/2 m_e u^2$ опущен, ω_{ie} — скорость передачи энергии от ионов электронам, τ_{ei} — характерное время обмена.

Система (1.1) — (1.5) имеет три интеграла, выражающие законы сохранения потоков массы, импульса и энергии. Первый интеграл получается, если просуммировать все уравнения (1.1) и учесть, что реакции не меняют полного числа частиц

$$N u = N_0 D \quad (1.6)$$

где N_0 — число ионов в 1 см^3 исходного газа (индексом 0 отмечаем величины перед волной), D — скорость распространения ударной волны по холодному газу. Второй интеграл следует из (1.1), (1.6).

$$MNu^2 + p + p_e = MN_0D^2 + p_0 + p_{e0} \quad (1.7)$$

Для получения третьего интеграла сложим уравнения (1.3), (1.4) и воспользуемся соотношениями (1.1) и (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}(kT + \alpha kT_e) + \langle Q \rangle + \frac{Mu^2}{2} + \frac{S}{N_0D} = \\ = \frac{5}{2}(kT_0 + \alpha_0 kT_{e0}) + \langle Q_0 \rangle + \frac{MD^2}{2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соотношение (1.6) позволяет переписать уравнение неразрывности в виде уравнений кинетики для концентраций

$$N_0D \frac{d\alpha_m}{dx} = q_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

Система дифференциальных уравнений ионной энергии (1.1), теплопроводностного потока тепла (1.5), кинетики ионизации (1.9) и интегралов сохранения (1.6) — (1.8) вместе с граничными условиями, о которых будет сказано ниже, служит для определения структуры ударной волны.

2. Упростим систему уравнений и выпишем кинетические константы. Знание ионного состава газа α_m необходимо для нахождения степени ионизации $\alpha = \sum \alpha_m m$ и потенциальной энергии ионов $\langle Q \rangle$. Но уравнение кинетики можно записать и прямо для степени ионизации, оно вытекает из (1.9)

$$N_0D \frac{d\alpha}{dx} = q_e = \sum m q_m \quad (2.1)$$

Поэтому если бы удалось источник электронов q_e и среднюю потенциальную энергию ионов $\langle Q \rangle$ приближенно представить в зависимости не от совокупности концентраций ионов α_m , а только от степени ионизации α , это позволило бы заменить ряд уравнений (1.9) одним уравнением (2.1), что значительно упростило бы громоздкую исходную систему.

Сделаем это при помощи способа, предложенного одним из авторов [1,9] для упрощения расчетов термодинамических функций газов в области многократной ионизации. Положим, что зарядовое число m , принимающее фактически целочисленные значения, является непрерывно меняющейся величиной, и соединим дискретные точки I_m и Q_m непрерывными кривыми $I(\alpha)$ и $Q(\alpha)$. Обычно ионизация развивается путем последовательного оголения атомов, так что в каждый момент в газовой частице содержатся в заметном количестве ионы только двух, самое большее трех сортов. Иными словами, распределение α_m , которое заменяется непрерывной функцией, имеет вид пика по m относительно среднего значения $\langle m \rangle$. Это позволяет положить приближенно, что в каждом состоянии все ионы обладают одним дробным зарядом $\langle m \rangle$, совпадающим со степенью ионизации α . В этом приближении потенциал ионизации эквивалентных ионов можно считать равным $I(\alpha)$, а среднюю потенциальную энергию $\langle Q \rangle = Q(\alpha)$. В области первой ионизации, при $\alpha < 1$ естественно положить $I = I_1$, $Q = \alpha I_1$.

Источник электронов q_e представляет собой разность между скоростями ионизации и рекомбинации ионов. Возможны два пути ионизации атомов и ионов электронным ударом; 1) прямой отрыв электронов с основного

уровня и 2) многоступенчатая ионизация, когда атом или ион сначала возбуждается при электронном ударе, а затем ионизируется сразу или после нескольких еще более возбуждающих соударений. Как показывают оценки, второй путь чаще всего оказывается более эффективным, так как сечения возбуждения и ионизации быстро возрастают по мере повышения уровня. Не будем учитывать ионизацию с основного уровня и захватов электронов на основной уровень, а также фоторекомбинацию (последнее возможно при не чрезмерно низкой плотности).

Оценки показывают, что равновесие между заселенностью возбужденных состояний ионов (атомов) и свободными электронами устанавливается гораздо быстрее, чем изменяется концентрация электронов. Это значит, что распределение ионов по возбужденным уровням можно приближенно считать квазистационарным, полагая, что оно следует за сравнительно медленным развитием ионизации. В условиях квазистационарности, выполняющихся, если потенциал ионизации ионов значительно выше kT_e и число возбужденных частиц гораздо меньше числа невозбужденных, появление или исчезновение каждого электрона сопровождается исчезновением или появлением соответствующего иона в основном состоянии без опережения или запаздывания во времени.

Но непосредственной причиной исчезновения и появления ионов в основном состоянии являются процессы возбуждения и дезактивации электронными ударами¹, следовательно

$$q_e = K^* N_e N - K' N_e N^* = K^* N_e N (1 - N^* / N_p^*)$$

где K^* и K' — константы скоростей возбуждения и дезактивации, N^* — плотность возбужденных ионов, N_p^* — термодинамически равновесная величина; последнее равенство следует из принципа детального равновесия. Поскольку N^* находится в термодинамическом равновесии с фактической плотностью электронов, в условиях многократной ионизации $N^* \sim N_e N$, поэтому окончательно

$$N_0 D \frac{d\alpha}{dx} = K^* \alpha N^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_p}\right) \quad (2.2)$$

где α_p — термодинамически равновесная степень ионизации. В приближении эквивалентных ионов с дробным зарядом эта величина согласно [1,9] определяется из уравнения

$$I(\alpha) = kT_e \ln \frac{AT_e^{3/2}}{\alpha N}, \quad A = 2 \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{3/2} \quad (2.3)$$

Формулу (2.2) можно записать, исходя непосредственно из выражения для разности скоростей ионизации и рекомбинации, принципа детального равновесия и предположения о совпадении скоростей ионизации и возбуждения (последнее соответствует мгновенной ионизации возбужденных атомов). Приведенный выше вывод вернее поясняет физическое содержание формулы (2.2)².

¹ Дезактивацию путем высвечивания не учитываем, она компенсируется возбуждением при поглощении захваченного резонансного излучения.

² В области слабой однократной ионизации формула типа (2.2) имеет несколько другой вид, так как скорость рекомбинации пропорциональна $N_e N_+ N_e \sim \alpha^3$, а не α^2 , как в (2.2) ($N^* \sim N_e N_+ \sim N_e^2$, а не $N_e N$). Член в скобках равен $(1 - \alpha^2 / \alpha_p^2)$ вместо $(1 - \alpha / \alpha_p)$. Но рекомбинация в ударной волне играет роль только при приближении к конечному состоянию многократно ионизованного газа, поэтому всюду в волне можно использовать формулу (2.2).

Константа скорости возбуждения равна $K^* = \langle v_e \sigma(\epsilon) \rangle$, где $\sigma(\epsilon)$ — сечение возбуждения электронами с энергией ϵ , v_e — их скорость, угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению. В случае ионов сечение почти постоянно у порога, $\sigma(\epsilon) = \sigma(I^*) = \sigma(I^* - \text{потенциал возбуждения})$ и

$$K^* = \sigma \langle v_e \rangle \left(\frac{I^*}{kT_e} + 1 \right) \exp \frac{-I^*}{kT_e}, \quad \langle v_e \rangle = \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

где $\langle v_e \rangle$ — средняя тепловая скорость. У нейтральных атомов сечение линейно растет от порога, $\sigma = \sigma(\epsilon) = C(\epsilon - I^*)$ и вместо (2.4) получается чуть отличная формула, в которой в скобках вместо единицы стоит двойка, а $\sigma = \sigma(kT) = CkT$.

Имеющиеся в литературе данные по сечениям возбуждения ионов столь скудны и несовершенны, что здесь возможен только самый ориентировочный выбор σ .

В соответствии с результатами расчетов в приближении Борна для кулоновского поля, сделанных применительно к водородоподобным ионам [10], можно положить $\sigma = 1.8\pi a_0^2 / (m + 1)^4$, где a_0 — борковский радиус и $m \geq 1$.

Величина σ оказывается завышенной, и в [10] рекомендуется уменьшить ее в 5 раз. Кроме того, если учесть происхождение зарядового множителя $(m + 1)^{-4}$, то при применении формулы к неводородоподобным ионам представляется естественным заменить $(m + 1)^{-4}$ квадратом отношения водородного и истинного потенциалов ионизации: $(m + 1)^{-4} \rightarrow (I_H / I)^2$. В качестве потенциала возбуждения будем брать величину $I^* = 3/4 I$, как для водородоподобных атомов. Пренебрегая еще единицей по сравнению с I^* / kT_e , получаем

$$K^* = 0.54 \sqrt{2\pi} a_0^2 \left(\frac{I_H^2}{I} \right) \left(\frac{1}{m_e kT_e} \right)^{1/2} \exp \frac{-3I^*}{4kT_e} \quad (2.5)$$

Эта формула, непригодная, вообще говоря, для описания возбуждения атомов (см., например, [1]), дает приемлемые результаты и в этом случае, если в качестве потенциала брать его истинную величину I_1 (при $\alpha < 1$). Так и было сделано, тем более, что вариация предэкспоненциального множителя в формуле для K^* особенно в малосущественной области первой ионизации, как показали специальные расчеты, вообще слабо сказывается на результатах расчета структуры ударной волны.

Что же касается остальных двух кинетических констант: времени обмена энергией электрона с ионами τ_{ei} и коэффициента электронной теплопроводности κ_e , то их значения подсчитывались по известным формулам (см., например, [1])

$$\tau_{ei} = \frac{3 \sqrt{m_e} (kT_e)^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} \Lambda e^4 z N_e}, \quad \kappa_e = \zeta \frac{k (kT_e)^{5/2}}{\sqrt{2\pi} \Lambda e^4 \sqrt{m_e} z} \quad (2.6)$$

где Λ — кулоновский логарифм, который здесь считается постоянным и равным его значению в конечном состоянии, z — зарядовое число ионов, коэффициент ζ слабо зависит от z и принимается равным $\zeta = 5.25$.

Задание начального состояния газа перед волной и какого-либо параметра, характеризующего амплитуду ударной волны, например скорости распространения волны D , делает математическую задачу решения системы полностью определенной. Так как в уравнения не включены члены, описывающие источник создания начальных электронов, то перед волной следует задать малую, но конечную начальную степень ионизации. По

той же причине начальные температуры и давления $T_0 = T_{e0}$ и $p_0, p_{e0} = \alpha p_0$ следует считать отличными от нуля, хотя в рассматриваемых очень сильных ударных волнах они много меньше соответствующих величин за фронтом. Задаваемые начальные значения T_{e0}, α_0 и N_0 не независимы, они должны удовлетворять условию Саха, чтобы начальное состояние газа было термодинамически равновесным. Конечные значения параметров T_k, N_k, α_k определяются, как обычно, по начальным и скорости волны D .

3. Исследуем качественно полученную систему уравнений. Перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{L_i}, \quad \theta_e = \frac{kT_e}{2\varepsilon_0}, \quad \theta = \frac{kT}{2\varepsilon_0}, \quad i = \frac{I}{2\varepsilon_0}, \quad q = \frac{Q}{2\varepsilon_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}$$

принимая в качестве масштаба энергии частицы начальную кинетическую энергию атома $\varepsilon_0 = MD^2/2$, а в качестве масштаба длины — характерную длину ионизации, соответствующую конечному состоянию за фронтом волны $L_i = N_0 D / K^* N_k^2$ (см. формулу (2.2)).

Подставим вместо давлений p и p_e их выражения $p = NkT$ и $p_e = N_e kT_e$ и исключим u с помощью (1.6). Разрешая далее систему относительно производных от температур и степени ионизации, получим после ряда преобразований систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\xi} &= f_1(\alpha, \theta, \theta_e) = \frac{i_k}{i} \left(\frac{\theta_k}{\theta_e}\right)^{1/2} \left(\frac{n}{\delta}\right)^2 \alpha \exp\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{i}{\theta_e} - \frac{i_k}{\theta_k}\right)\right] \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_p}\right) \\ \frac{d\theta_e}{d\xi} &= f_2(\alpha, \theta, \theta_e) = \frac{2}{5} \frac{L_i}{L_s} \frac{z}{\alpha_k} \left(\frac{\theta_k}{\theta}\right)^{5/2} \left[\frac{5}{2}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) + q - q_0\right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = f_3(\alpha, \theta, \theta_e) = F \frac{L_i}{L_\omega} \frac{\alpha^2 z}{\alpha_k^3} \left(\frac{n}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\theta_k}{\theta_e}\right)^{3/2} (\theta_e - \theta) + \frac{2Fn^2\theta}{2-an} (\alpha f_2 + \theta_e f_1)$$

и алгебраическое уравнение для плотности

$$n^2\theta - an + 1 = 0 \quad (3.2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\theta = \theta + \alpha\theta_e, \quad a = 1 + \frac{\theta_0}{\theta_e}, \quad \delta = \frac{N_k}{N_0}, \quad F = \left(3 - \frac{2n^2\theta}{2-an}\right)^{-1} \quad (3.3)$$

Характерные масштабы длины

$$L_s = \frac{2}{5} \frac{\kappa_e}{\alpha_k k N_0 D}, \quad L_\omega = \frac{2}{3} \frac{D\tau_{ei}}{\alpha_k \delta}$$

для теплопроводности и обмена энергией между электронами и ионами соответствуют конечному состоянию газа.

Выбирая в качестве независимой переменной монотонно меняющуюся величину α , сведем систему (3.1) к двум уравнениям в фазовом пространстве

$$\frac{d\theta_e}{d\alpha} = \frac{f_2(\alpha, \theta, \theta_e)}{f_1(\alpha, \theta, \theta_e)}, \quad \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{f_3(\alpha, \theta, \theta_e)}{f_1(\alpha, \theta, \theta_e)} \quad (3.4)$$

при этом плотность n связана с фазовыми переменными тем же конечным соотношением (3.2).

Таким образом, для решения задачи о структуре ударной волны нужно найти интегральную кривую системы (3.4) в фазовом пространстве α, θ, θ_e , соединяющую равновесные точки $\alpha_0, \theta_0, \theta_{0e}$ и $\alpha_k, \theta_k, \theta_{ek}$ перед и за волной. Эти точки являются особыми точками системы, поскольку в них все f_i одновременно обращаются в нуль (можно показать, что других особых точек у системы нет). Для нахождения такой кривой нужно знать ее поведение в окрестности особых точек, этим описываются околоравновесные состояния и процесс установления равновесия.

Поведение интегральной кривой в окрестности особой точки определяется характером этой особенности; в свою очередь, принадлежность особой точки к тому или иному типу определяется корнями характеристического уравнения $|a_j^i - \lambda \delta_j^i| = 0$, где a_j^i — производные от правых частей системы f_i по их аргументам y^i , подсчитанные в особых точках. В рассматриваемом случае аргументы — это α, θ, θ_e . Здесь δ_j^i — символ Кронекера.

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы — уравнение третьего порядка

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0$$

где J_k — инварианты, составленные из коэффициентов матрицы $\|a_j^i\|$.

Легко видеть (см. уравнения (3.1), (3.2)), что коэффициенты a_j^i и, следовательно, J_k , выражаются через равновесные параметры и выбранные характерные длины. Соответствующие оценки показывают, что в околоравновесном состоянии перед волной самым быстрым процессом (самая малая характерная длина) является нагрев электронного газа за счет теплопроводности, а самым медленным — обмен энергией между электронами и тяжелыми частицами. Эти оценки свидетельствуют о существенном влиянии электронной теплопроводности на структуру волны — прогрев электронного газа перед волной может привести здесь к заметной ионизации. В околоравновесном состоянии за волной самым быстрым процессом является обмен энергией, приводящий к выравниванию электронной и ионной температур, а самым медленным — ионизация.

Вернемся к анализу корней характеристического уравнения. Тип особой точки определяется знаками вещественных частей этих корней, а знаки можно определить, пользуясь, например, теоремой Раусса, согласно которой число корней вещественного многочлена, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в первом столбце определенным образом составленной схемы Раусса [11].

В рассматриваемом случае этот столбец имеет вид

$$1, \quad -J_1, \quad J_2 - J_3 / J_1, \quad -J_3 \quad (3.5)$$

Таким образом, нужно определить знаки и порядки величин коэффициентов характеристического уравнения, что можно сделать, пользуясь полученными соотношениями между характерными длинами и порядками величин равновесных параметров. Вычисления, которые ввиду их громоздкости не приводятся, показывают, что для обеих особых точек в столбце Раусса (3.5) знак меняется только один раз, т. е. знаки вещественных частей различны (один корень в правой полуплоскости, два — в левой) и обе особые точки являются обобщенными седлами [12]. Более детальное исследование показывает, что эти обобщенные седла являются трехветвевыми седло-узлами с устойчивыми двухветвевыми узлами [13].

Как известно, в задачах о структуре ударной волны, когда в уравнениях не учитывается вязкость, не существует, вообще говоря, непрерывной кривой, соединяющей особые точки (являющиеся в таком случае седло-

выми точками). Внутри структуры есть разрыв — вязкий скачок уплотнения, на котором в данном случае терпят разрыв температура ионов, плотность и, следовательно, скорость, а электронная температура и степень ионизации непрерывны. Положение разрыва в фазовом пространстве определяется тем условием, что при переходе через скачок величины, терпящие разрыв, должны удовлетворять соотношениям типа Рэнкина — Гюнио.

Как уже было показано, у характеристического уравнения один корень в правой полуплоскости и два — в левой. Это означает, что из точки перед волной выходит одна интегральная кривая, а в точку за волной входят две, и для того чтобы выбрать из них соответствующую рассматриваемой задаче, нужно исследовать асимптотику решения в окрестности этой точки. Пользуясь полученными соотношениями между характерными длинами, выражающими тот факт, что в околоравновесном состоянии за волной обмен протекает «быстрее», чем ионизация-рекомбинация или вынос тепла теплопроводностью ($L_\omega \ll L_s \ll L_i$), и, следовательно, в этой области температуры практически одинаковы, запишем асимптотическую систему в виде

$$\theta = \theta_e \quad (3.6)$$

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{\theta}{1+\alpha} \left\{ 1 + \frac{2i(2-an)}{\theta[5(2-an)-2]} \right\}, \quad n = \frac{a(1 + \sqrt{1-4\theta/a^2})}{2\theta}$$

Очевидно, обе температуры, оставаясь одинаковыми, уменьшаются до своего равновесного значения ($d\theta/d\alpha < 0$) и, следовательно, электронная температура в волне проходит через максимум (в предыдущих работах утверждалось, что электронная температура в волне монотонно возрастает).

Таким образом, из двух интегральных кривых, входящих в точку за волной, нужно выбирать ту, для которой температуры обеих компонент близки и убывают при приближении к равновесию.

Проведенный качественный анализ позволил численно проинтегрировать систему уравнений, описывающих структуру ударной волны. Если на фазовой плоскости седло является идеальным вариантом для начала счета, то в пространстве дело сложнее, поскольку обобщенное седло в одних плоскостях является обычным седлом, а в других — узлом, и небольшое отклонение в счете может увести от нужного решения. Процесс счета был следующим: от особых точек навстречу друг другу считались части интегральной кривой до их стыковки на вязком скачке. Условия сохранения на вязком скачке можно преобразовать к соотношениям, связывающим безразмерные плотности и температуры ионов перед и за скачком (параметры без индекса характеризуют состояние газа перед скачком, за скачком эти параметры снабжены индексом единица)

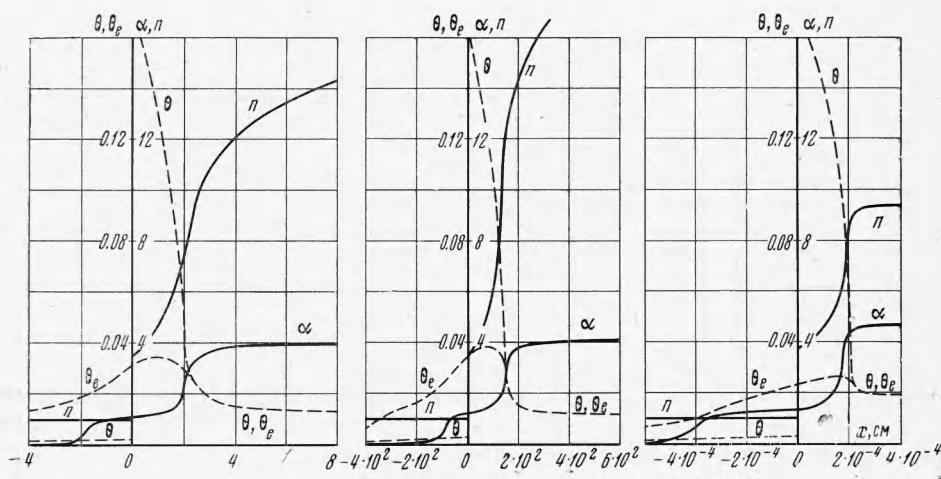
$$n_1 = \frac{4n}{5n^2\theta + 1}, \quad \theta_1 = \theta + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.7)$$

Для каждой точки интегральной кривой перед скачком α , θ , θ_e и определяемого ею по уравнению (3.2) значения n находились по формулам (3.7) значения n_1 и θ_1 . Совокупность этих значений образует геометрическое место точек в фазовом пространстве, удовлетворяющих условиям типа Рэнкина — Гюнио.

Пересечение интегральной кривой, исходящей из точки за скачком, с полученным геометрическим местом точек дает положение скачка в фазовом пространстве и истинные параметры за скачком n_1 , θ_1 , α , θ_e , а сле-

довательно, и их значения перед скачком n , θ , α , θ_e . При счете интегральной кривой за скачком удобнее отходить от конечной особой точки по асимптотической системе (3.6), для которой эта точка не является особой. При вычислении плотности по квадратному уравнению (3.2) в области за скачком радикал нужно брать со знаком плюс, а перед скачком — со знаком минус. Распределение параметров по координате ζ или x можно получить после решения уравнений в фазовом пространстве с помощью квадратур.

4. Перейдем к обсуждению результатов расчетов. Структура ударной волны считалась для воздуха для нескольких значений начальной плотности и скорости ударной волны. Кривые потенциалов ионизации $I(\alpha)$ и потенциальных энергий ионов $Q(\alpha)$ получены с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа по дискретным значениям для целочисленных z , значения эти находились с помощью таблиц [6]. Начальная степень ионизации во всех расчетах принималась равной $\alpha_0 = 0.01$. Специальная проверка показала, что вариация α_0 в разумных пределах не влияет практически на решение.



Фиг. 1

Фиг. 2

Фиг. 3

На фиг. 1—3 построены распределения температур плотности и степени ионизации для трех приводимых ниже вариантов начальных данных

h , км	N_0 , см ⁻³	D , км·сек ⁻¹	T° , К
80	$3.5 \cdot 10^{15}$	57.9	9 000
100	$4.2 \cdot 10^{13}$	56	7 500
0	$5.4 \cdot 10^{20}$	75	16 783

Здесь h — высота над уровнем моря, соответствующая начальной плотности воздуха N_0 . Полученные распределения подтверждают существенное влияние электронной теплопроводности на структуру волны — прогрев электронного газа перед фронтом оказывается столь значительным, что первая ионизация происходит уже перед скачком. В этом существенное отличие от предыдущих работ (например, [3, 5]), где при расчете релаксационной зоны авторы исходили из значений ионной температуры за вязким скачком, а для электронной концентрации и температуры — из их невозмущенных значений: такие начальные данные счета не могли не оказать влияния на распределение параметров в волне.

Еще одной особенностью является максимум в профиле электронной температуры. Его существование объясняется сравнительно быстрым в этой области обменом, который приводит к выравниванию температур еще до завершения ионизации, когда продолжается охлаждение вследствие расхода энергии на ионизацию. Выравнивание температур, как видно из графиков, происходит непосредственно за точкой максимума на нисходящей ветви профиля электронной температуры, это — область самых больших градиентов всех параметров. Здесь резко возрастает плотность ионов и электронная концентрация и резко падает температура газа, теплопроводностный поток направлен назад. За областью больших градиентов следует медленный выход параметров на равновесные значения, в этой области вклад процесса рекомбинации становится заметным.

Расчеты были проведены на электронной машине БЭСМ-3М.

Поступила 23 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966
2. Chubb D. L. Ionizing shock structure in a monatomic gas. *Phys. Fluids*, 1968, vol. 11, No. 11.
3. Бронштейн В. А., Чигорин А. Н. Установление равновесной ионизации и температуры в сильной ударной волне в воздухе. *Теплофизика высоких температур*, 1964, т. 2, № 6.
4. Бронштейн В. А. Уравнения кинетики ионизации в сильной ударной волне в воздухе. *Геомagnetизм и аэрoномия*, 1963, т. 3, № 3.
5. Бронштейн В. А. Проблемы движения в атмосфере крупных метеоритных тел, М., Изд-во АН СССР, 1963.
6. Jaffrin M. Y., Probstein R. F. Structure of a plasma shock wave. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, No 10.
7. Jaffrin M. Y. Shock structure in a partially ionized gas. *Phys. Fluids*, 1965, vol. 8, No 4.
8. Кузнецов Н. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1965.
9. Райзер Ю. П. Простой метод оценки степени ионизации и термодинамических функций идеального газа в области многократной ионизации. *ЖЭТФ*, 1959, т. 36, вып. 5.
10. Ситон М. Теория возбуждения и ионизации электронным ударом. В сб.: «Атомные и молекулярные процессы», М., «Мир», 1964.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
12. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
13. Reun J. W. Classification and description of the singular points of a system of three-linear differential equations. *Z. angew. Math. und Phys.*, 1964, vol. 15, N. 5, p. 540.