

УДК 532.59

## МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СОУДАРЯЮЩИХСЯ СТРУЙ

Е. А. Карабут

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mail: karabut@hydro.nsc.ru

Исследуются малые нестационарные возмущения решения известной задачи о стационарном соударении с одинаковой скоростью двух плоских струй идеальной несжимаемой жидкости. Прямыми вычислениями найден дискретный спектр линейной задачи. Показано, что метод Фурье неприменим, поскольку собственные функции не ограничены.

**Ключевые слова:** идеальная несжимаемая жидкость, свободная поверхность, устойчивость в линейном приближении, метод разделения переменных, численное определение спектра.

**Введение.** Одной из первых работ, посвященных изучению устойчивости плоских стационарных струйных течений в линейном приближении, является работа [1], в которой исследованы на устойчивость известные классические течения: кавитационное обтекание пластины; соударение двух струй одинаковой толщины; истечение жидкости из щели, образованной двумя плоскостями; полый вихрь. Анализ этих течений основан на возможности представления комплексного потенциала возмущенного течения в виде

$$w = G_1 e^{\lambda t} + G_2 e^{\bar{\lambda} t}, \quad (1)$$

где  $t$  — время; функции  $G_1, G_2$  не зависят от времени. В работе [1] возмущения называются устойчивыми, если  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , и неустойчивыми, если  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Возмущения, для которых  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , названы нейтральными. Основным результатом работы [1] состоит в определении собственных значений  $\lambda$ .

Представление (1) использовалось при решении различных струйных задач (см., например, [2–6]). В то же время существует ряд работ, в которых либо выражается некоторое сомнение в возможности применения (1), либо утверждается ошибочность этого представления. Например, в работе [2] предлагается относиться “с известной осторожностью” к выводам [1] об устойчивости течений, поскольку асимптотическая зависимость возмущений от  $t$  (при  $t \rightarrow \infty$ ) необязательно должна быть экспоненциальной. В работе [7] утверждается, что применение метода Фурье к решению вопроса об устойчивости без анализа класса начальных возмущений может привести к упущениям и даже ошибкам. В качестве примера ошибочной работы названа [1]. При исследовании вопросов устойчивости следует помнить о задаче с начальными данными. Примеры ошибок метода Фурье, когда поиск решения в виде линейной суперпозиции собственных функций вида (1) не дает правильного ответа, можно найти в работе [8].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2260.2008.1).

В данной работе выясняется возможность применения представления (1) в стационарной задаче о соударении двух струй. Несмотря на использование (1), корректная постановка спектральной задачи для нахождения  $\lambda$  в литературе отсутствует. Первая часть статьи посвящена математической постановке спектральной задачи. Формулировка этой задачи достаточно сложна, хотя ее физическая постановка проста и естественна: комплексная скорость возмущенного течения должна быть ограниченной функцией во всей области течения. Иными словами, величина  $\lambda$  должна подбираться таким образом, чтобы собственные функции (1) были ограничены. Получение аналитического решения спектральной задачи вследствие ее сложности затруднено, поэтому во второй части настоящей работы полученная спектральная задача решается численно.

**Стационарное соударение струй.** Рассмотрим известную классическую задачу о стационарном соударении двух плоских струй идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1). Две струи движутся под некоторым углом навстречу друг другу с единичной скоростью. В результате их взаимодействия образуются две расходящиеся струи. На свободной поверхности сформировавшегося струйного течения поддерживается нулевое давление, поверхностное натяжение отсутствует. Пусть  $a_j = e^{i\theta_j}$  — комплексные скорости струй. Здесь  $j$  — номер струи. Аргумент  $\theta_j$  характеризует угол, под которым направлена  $j$ -я струя. Считаем, что  $j = 1, 3$  соответствуют сходящимся струям, а  $j = 2, 4$  — расходящимся. Обозначим через  $h_j$  ширину  $j$ -й струи ( $j = \overline{1, 4}$ ), взятую с положительным знаком, если струи являются сходящимися, и с отрицательным знаком, если струи являются расходящимися ( $h_1 > 0, h_3 > 0, h_2 < 0, h_4 < 0$ ). Поместим начало декартовой системы координат  $X, Y$  ( $Z = X + iY$ ) в критической точке, т. е. в точке, в которой скорость жидкости равна нулю. Конформное отображение единичного круга, расположенного в некоторой вспомогательной плоскости  $\zeta$ , на область течения (см. рис. 1), а также комплексная скорость  $U$ , выраженная через  $\zeta$ , даются формулами [9]

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} \ln \left( 1 - \frac{\zeta}{a_j} \right), \quad U(\zeta) = \zeta. \quad (2)$$

Точки  $a_j$ , расположенные на единичной окружности  $|\zeta| = 1$ , являются прообразами бесконечно удаленных точек струй в плоскости  $Z$ .

Отметим, что решение задачи соударения двух сходящихся струй с заданными па-

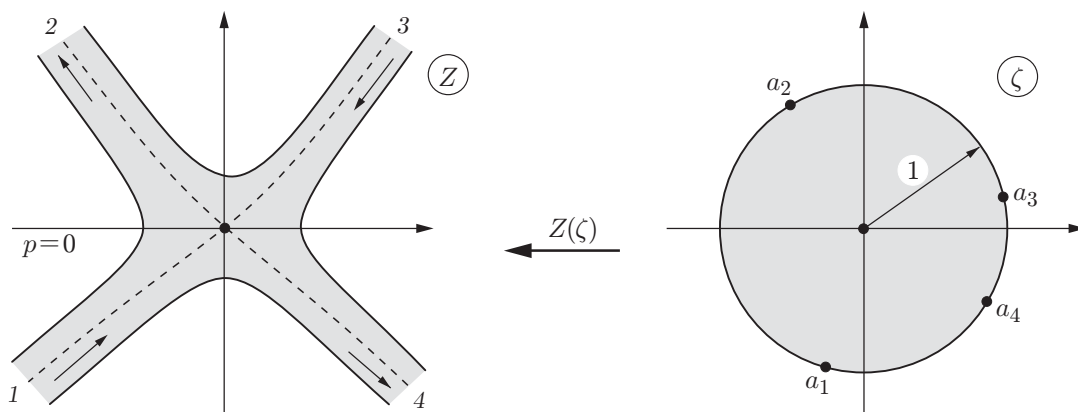


Рис. 1. Конформное отображение  $Z(\zeta)$  круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости  $\zeta$  на область течения в плоскости  $Z$  в случае стационарного взаимодействия струй:

1, 3 — сходящиеся струи; 2, 4 — расходящиеся струи; стрелки — направления скорости струй

раметрами не является единственным. Если параметры струй  $h_1, h_3, a_1, a_3$  заданы, то параметры расходящихся струй  $h_2, h_4, a_2, a_4$  нельзя определить однозначно. Для нахождения четырех параметров расходящихся струй существует только три уравнения:

$$\sum_{j=1}^4 h_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 h_j a_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} = 0.$$

Поэтому при фиксированных параметрах сходящихся струй формулы (2) описывают однопараметрическое семейство струйных конфигураций с различными расходящимися струями.

Все ли струйные конфигурации равноправны? Исследование на устойчивость задачи о соударении струй позволяет получить ответ на этот вопрос, поскольку устойчивые струйные конфигурации более предпочтительны.

**Нестационарное взаимодействие струй.** Рассмотрим случай нестационарного взаимодействия струй, когда на некоторую стационарную струйную конфигурацию, задаваемую формулами (2), накладывается нестационарное возмущение (рис. 2). Считаем, что в начальный момент времени  $t = 0$  возмущение сосредоточено в конечной области плоскости  $Z$  и не затрагивает бесконечно удаленных точек.

В отличие от стационарного случая (2) конформное отображение единичного круга  $|\zeta| < 1$  во вспомогательной плоскости  $\zeta$  на область течения, а также комплексная скорость представляют собой функции времени:  $Z(\zeta, t), U(\zeta, t)$ . Следует отметить, что в данном случае плоскость  $\zeta$  не является плоскостью годографа. Четырем бесконечно удаленным точкам в плоскости  $Z$  не могут быть поставлены в соответствие фиксированные точки в плоскости  $\zeta$ , так как конформное отображение является трехпараметрическим. По крайней мере, для одной из четырех точек координаты в плоскости  $\zeta$  будут зависеть от времени. В общем случае считаем, что бесконечно удаленным точкам в плоскости  $Z$  соответствуют четыре подвижные точки  $\zeta = c_j(t)$  в плоскости  $\zeta$ , расположенные на единичной окружности  $|c_j(t)| = 1$ .

Для нахождения двух аналитических функций  $Z(\zeta, t), U(\zeta, t)$  существует два операторных уравнения [10]

$$i\zeta(Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t) + R(\zeta, t) = 0, \quad R(\zeta, t) = S(i\zeta U_\zeta \bar{U}); \quad (3)$$

$$\frac{Z_t}{\zeta Z_\zeta} - \frac{A}{\zeta} + \bar{A}\zeta + iB = Q(\zeta, t), \quad Q(\zeta, t) = S\left(\frac{\bar{U}}{\zeta Z_\zeta}\right). \quad (4)$$

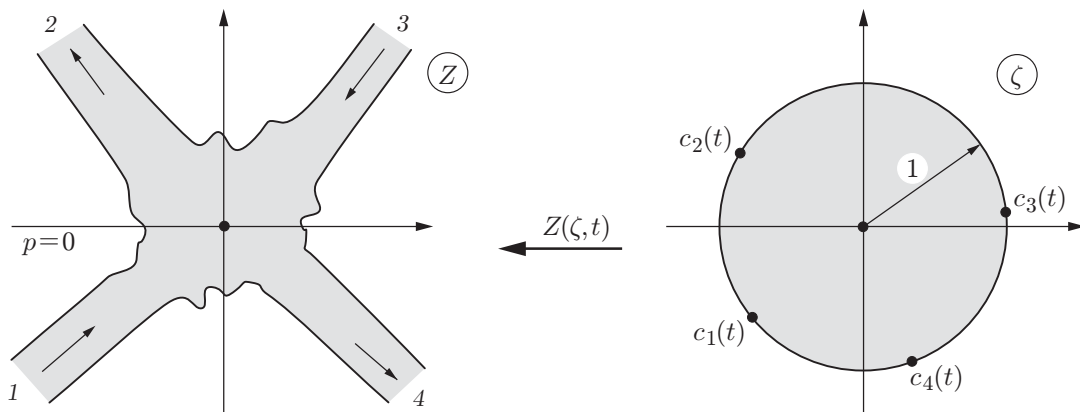


Рис. 2. Конформное отображение  $Z(\zeta, t)$  круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости  $\zeta$  на область течения в плоскости  $Z$  в задаче о нестационарном соударении струй (обозначения те же, что на рис. 1)

Здесь  $S$  — оператор Шварца, восстанавливающий аналитическую в единичном круге функцию по значению ее действительной части на границе круга  $|\zeta| = 1$ . При этом предполагается, что мнимая часть найденной функции в центре круга ( $\zeta = 0$ ) равна нулю. Комплекснозначная функция времени  $A(t)$  и вещественнозначная функция  $B(t)$  в (4) считаются заданными. Эти функции определяются выбранной нормировкой конформного отображения. Например, если задана нормировка

$$Z(0, t) = \text{const}, \quad \arg Z_\zeta(0, t) = \text{const}, \quad (5)$$

то  $A = 0$ ,  $B = 0$ .

Возмущения на струях распространяются со скоростью самих струй, поэтому достигают бесконечности только за бесконечное время. Иными словами, любые возмущения на струях, первоначально сосредоточенные в конечной области плоскости  $Z$ , не могут за конечное время вызвать возмущения в бесконечно удаленных точках. Поэтому ниже рассматриваются нестационарные струйные течения, скорость, толщина и направление струй которых на бесконечности не меняются.

**Линейная задача.** Рассмотрим случай нестационарного взаимодействия струй, когда возмущения струйной конфигурации, представленной на рис. 2, предполагаются малыми, т. е. будем искать решение системы (3), (4), незначительно отличающееся от стационарного решения (2):

$$Z(\zeta, t; \varepsilon) = Z^{(0)}(\zeta) + \varepsilon Z^{(1)}(\zeta, t) + \dots, \quad U(\zeta, t; \varepsilon) = U^{(0)}(\zeta) + \varepsilon U^{(1)}(\zeta, t) + \dots, \\ c_n(t; \varepsilon) = a_n + \varepsilon c_n^{(1)}(t) + \dots$$

Здесь  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр; функции  $Z^{(0)}(\zeta)$ ,  $U^{(0)}(\zeta)$  определяются формулами (2). Функции  $A$ ,  $B$ , задающие выбранную нормировку конформного отображения, также считаются известными и представляются в виде аналогичных степенных рядов

$$A(t; \varepsilon) = A^{(0)} + \varepsilon A^{(1)}(t) + \dots, \quad B(t; \varepsilon) = B^{(0)} + \varepsilon B^{(1)}(t) + \dots$$

Отметим, что для стационарного течения (2) условие (5) всегда выполнено, поэтому  $A^{(0)} = 0$ ,  $B^{(0)} = 0$ .

Для нахождения неизвестных функций  $Z^{(1)}(\zeta, t)$ ,  $U^{(1)}(\zeta, t)$  требуется решить систему уравнений [10]

$$-\zeta Z_t^{(1)} + U_\zeta^{(1)} - U^{(1)}/\zeta + U_t^{(1)}\zeta Z_\zeta^{(0)} = -u_0/\zeta - \bar{u}_0\zeta; \quad (6)$$

$$Z_t^{(1)}\zeta Z_\zeta^{(0)} + Z_\zeta^{(1)} + U^{(1)}Z_\zeta^{(0)}/\zeta = \\ = \zeta^2 (Z_\zeta^{(0)})^2 (q_0/\zeta^3 + q_1/\zeta^2 + q_2/\zeta + q_3 - \bar{q}_0\zeta^3 - \bar{q}_1\zeta^2 - \bar{q}_2\zeta - \bar{q}_3). \quad (7)$$

Линейная система дифференциальных уравнений (6), (7) имеет нестандартный вид. В соответствии с терминологией работы [11] эта система называется нагруженной, поскольку ее правая часть содержит неизвестные функции и их производные в начале координат  $\zeta = 0$ . Например,  $u_0 = U^{(1)}(0, t)$  в (6) — значение комплексной скорости в начале координат. Функции времени  $q_j(t)$  в правой части (7) определяются через коэффициенты рядов

$$U^{(1)}/Z_\zeta^{(0)} = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \dots, \quad Z_\zeta^{(1)}/(Z_\zeta^{(0)})^2 = d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \dots$$

по следующим формулам:

$$q_0 = b_0, \quad q_1 = b_1 + d_0, \quad q_2 = b_2 + d_1 + A^{(1)}, \quad q_3 = (b_3 + d_2 - iB^{(1)})/2. \quad (8)$$

**Спектральная задача.** Если коэффициенты линейной системы не зависят от времени, то метод разделения переменных состоит в поиске решения в виде произведения функции  $e^{\lambda t}$  и некоторой функции  $\zeta$ . Однако для системы (6), (7) такой подход неприменим, поскольку в ней наряду с неизвестными величинами содержатся комплексно-сопряженные неизвестные. Данный подход можно реализовать, только если взять реальную и мнимую часть системы (6), (7) и рассматривать, таким образом, систему четырех вещественных уравнений. Можно также, сохранив комплексную форму записи уравнений, сразу искать решение в виде

$$U^{(1)}(\zeta, t) = U^{(+)}(\zeta) e^{\lambda t} + U^{(-)}(\zeta) e^{\bar{\lambda} t}, \quad Z^{(1)}(\zeta, t) = Z^{(+)}(\zeta) e^{\lambda t} + Z^{(-)}(\zeta) e^{\bar{\lambda} t}. \quad (9)$$

Поскольку в плоскости  $Z$  возмущения не достигают бесконечности, при  $\zeta = c_n(t)$  комплексная скорость остается ограниченной и равной скорости невозмущенного течения. Таким образом, имеем

$$U(c_n(t), t) = a_n.$$

Дифференцируя это равенство по  $\varepsilon$  и рассматривая предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$U^{(1)}(a_n, t) + c_n^{(1)} = 0.$$

Следовательно, функция  $U^{(1)}(\zeta, t)$  является ограниченной при  $\zeta \rightarrow a_n$ . Таким образом, имеем следующую спектральную задачу.

**ЗАДАЧА 1.** Найти собственное значение  $\lambda$  и собственные функции  $U^{(+)}(\zeta)$ ,  $U^{(-)}(\zeta)$ ,  $Z^{(+)}(\zeta)$ ,  $Z^{(-)}(\zeta)$ , так чтобы функции  $U^{(+)}(\zeta)$ ,  $U^{(-)}(\zeta)$  были ограниченными при  $\zeta \rightarrow a_n$ .

Ниже сформулированная задача решается численно. Если функция аналитична, то она ограничена. Решения, для которых комплексная скорость аналитична при  $\zeta = a_n$ , рассматривались в [10]. Имеет смысл рассмотреть еще одну, более простую спектральную задачу.

**ЗАДАЧА 2.** Найти собственное значение  $\lambda$  и собственные функции  $U^{(+)}(\zeta)$ ,  $U^{(-)}(\zeta)$ ,  $Z^{(+)}(\zeta)$ ,  $Z^{(-)}(\zeta)$ , так чтобы функции  $U^{(+)}(\zeta)$ ,  $U^{(-)}(\zeta)$  были аналитическими функциями в окрестности точек  $\zeta = a_n$ .

Задача 2 также решалась численно. Отметим, что все решения задачи 2 являются также решениями задачи 1.

**Разделение переменных.** Функции  $t$ , входящие в (6), (7), также следует искать в виде, аналогичном представлению (1):

$$q_j = q_j^{(+)} e^{\lambda t} + q_j^{(-)} e^{\bar{\lambda} t}, \quad u_0 = u_0^{(+)} e^{\lambda t} + u_0^{(-)} e^{\bar{\lambda} t}. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в систему (6), (7) и приравнивая члены при  $e^{\lambda t}$ , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$-\zeta \lambda Z^{(+)} + U_{\zeta}^{(+)} - U^{(+)} / \zeta + \lambda U^{(+)} \zeta Z_{\zeta}^{(0)} = -u_0^{(+)} / \zeta - \overline{u_0^{(-)}} \zeta; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & Z^{(+)} \lambda \zeta Z_{\zeta}^{(0)} + Z_{\zeta}^{(+)} + U^{(+)} Z_{\zeta}^{(0)} / \zeta = \\ & = \zeta^2 [Z_{\zeta}^{(0)}]^2 (q_0^{(+)} / \zeta^3 + q_1^{(+)} / \zeta^2 + q_2^{(+)} / \zeta + q_3^{(+)} - \overline{q_0^{(-)}} \zeta^3 - \overline{q_1^{(-)}} \zeta^2 - \overline{q_2^{(-)}} \zeta - \overline{q_3^{(-)}}). \end{aligned} \quad (12)$$

Приравнивая члены при  $e^{\bar{\lambda} t}$ , получаем еще два аналогичных уравнения

$$-\zeta \bar{\lambda} Z^{(-)} + U_{\zeta}^{(-)} - U^{(-)} / \zeta + \bar{\lambda} U^{(-)} \zeta Z_{\zeta}^{(0)} = -u_0^{(-)} / \zeta - \overline{u_0^{(+)}} \zeta; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & Z^{(-)} \bar{\lambda} \zeta Z_{\zeta}^{(0)} + Z_{\zeta}^{(-)} + U^{(-)} Z_{\zeta}^{(0)} / \zeta = \\ & = \zeta^2 [Z_{\zeta}^{(0)}]^2 (q_0^{(-)} / \zeta^3 + q_1^{(-)} / \zeta^2 + q_2^{(-)} / \zeta + q_3^{(-)} - \overline{q_0^{(+)}} \zeta^3 - \overline{q_1^{(+)}} \zeta^2 - \overline{q_2^{(+)}} \zeta - \overline{q_3^{(+)}}). \end{aligned} \quad (14)$$

**Восьмипараметрическое семейство решений.** Полученная система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (11)–(14) содержит большое количество констант:  $q_j^{(+)}$ ,  $u_0^{(+)}$ ,  $q_j^{(-)}$ ,  $u_0^{(-)}$ . Все эти константы выражаются через значения функций  $Z^{(+)}(\zeta)$ ,  $U^{(+)}(\zeta)$ ,  $Z^{(-)}(\zeta)$ ,  $U^{(-)}(\zeta)$  и их производных при  $\zeta = 0$ . Количество независимых констант можно определить, решая систему четырех уравнений (11)–(14) в виде степенных рядов по степеням  $\zeta$ . Такое решение допустимо, поскольку рассматриваются аналитические функции.

Покажем, что имеется только восемь свободных констант, которые могут быть произвольными комплексными числами. Остальные константы выражаются через них. Иными словами, система четырех дифференциальных уравнений (11)–(14) имеет восьмипараметрическое семейство решений, аналитических при  $\zeta = 0$ .

Введем обозначения

$$M_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{(a_j)^n}.$$

Подставляя разложение

$$Z_\zeta^{(0)} = -M_2 - M_3\zeta - M_4\zeta^2 - \dots$$

и ряды

$$\begin{aligned} Z^{(+)}(\zeta) &= z_0^{(+)} + z_1^{(+)}\zeta + z_2^{(+)}\zeta^2 + \dots, & U^{(+)}(\zeta) &= u_0^{(+)} + u_1^{(+)}\zeta + u_2^{(+)}\zeta^2 + \dots, \\ Z^{(-)}(\zeta) &= z_0^{(-)} + z_1^{(-)}\zeta + z_2^{(-)}\zeta^2 + \dots, & U^{(-)}(\zeta) &= u_0^{(-)} + u_1^{(-)}\zeta + u_2^{(-)}\zeta^2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

в первое уравнение (11), приравнявая в нем члены при  $\zeta$ ,  $\zeta^2$ , получаем два алгебраических уравнения

$$-\lambda z_0^{(+)} + u_2^{(+)} - \lambda u_0^{(+)} M_2 = -\overline{u_0^{(-)}}, \quad -\lambda z_1^{(+)} + 2u_3^{(+)} - \lambda u_0^{(+)} M_3 - \lambda u_1^{(+)} M_2 = 0. \quad (16)$$

Приравнявая члены при  $\zeta^{-1}$ ,  $\zeta^0$ ,  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$  во втором уравнении (12), находим еще четыре уравнения

$$\begin{aligned} -u_0^{(+)} &= q_0^{(+)} M_2, & z_1^{(+)} - u_0^{(+)} M_3 - u_1^{(+)} M_2 &= q_0^{(+)} 2M_2 M_3 + q_1^{(+)} M_2^2, \\ -\lambda z_0^{(+)} M_2 + 2z_2^{(+)} - u_0^{(+)} M_4 - u_1^{(+)} M_3 - u_2^{(+)} M_2 &= \\ &= q_0^{(+)} (2M_2 M_4 + M_3^2) + q_1^{(+)} 2M_2 M_3 + q_2^{(+)} M_2^2, & (17) \\ -\lambda z_0^{(+)} M_3 - \lambda z_1^{(+)} M_2 + 3z_3^{(+)} - u_0^{(+)} M_5 - u_1^{(+)} M_4 - u_2^{(+)} M_3 - u_3^{(+)} M_2 &= \\ &= 2q_0^{(+)} (M_2 M_5 + M_3 M_4) + q_1^{(+)} (2M_2 M_4 + M_3^2) + 2q_2^{(+)} M_2 M_3 + (q_3^{(+)} - \overline{q_3^{(-)}}) M_2^2. \end{aligned}$$

Аналогично, приравнявая члены при  $\zeta$ ,  $\zeta^2$  в (13), получаем два алгебраических уравнения

$$-\bar{\lambda} z_0^{(-)} + u_2^{(-)} - \bar{\lambda} u_0^{(-)} M_2 = -\overline{u_0^{(+)}}, \quad -\bar{\lambda} z_1^{(-)} + 2u_3^{(-)} - \bar{\lambda} u_0^{(-)} M_3 - \bar{\lambda} u_1^{(-)} M_2 = 0. \quad (18)$$

Приравнявая члены при  $\zeta^{-1}$ ,  $\zeta^0$ ,  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$  во втором уравнении (14), имеем четыре уравнения

$$\begin{aligned} -u_0^{(-)} &= q_0^{(-)} M_2, & z_1^{(-)} - u_0^{(-)} M_3 - u_1^{(-)} M_2 &= q_0^{(-)} 2M_2 M_3 + q_1^{(-)} M_2^2, \\ -\bar{\lambda} z_0^{(-)} M_2 + 2z_2^{(-)} - u_0^{(-)} M_4 - u_1^{(-)} M_3 - u_2^{(-)} M_2 &= \\ &= q_0^{(-)} (2M_2 M_4 + M_3^2) + q_1^{(-)} 2M_2 M_3 + q_2^{(-)} M_2^2, & (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{\lambda}z_0^{(-)}M_3 - \bar{\lambda}z_1^{(-)}M_2 + 3z_3^{(-)} - u_0^{(-)}M_5 - u_1^{(-)}M_4 - u_2^{(-)}M_3 - u_3^{(-)}M_2 = \\ & = 2q_0^{(-)}(M_2M_5 + M_3M_4) + q_1^{(-)}(2M_2M_4 + M_3^2) + 2q_2^{(-)}M_2M_3 + (q_3^{(-)} - \overline{q_3^{(+)}})M_2^2. \end{aligned}$$

К найденным уравнениям необходимо добавить еще три уравнения, полученные из условия нормировки конформного отображения. Пусть, например, выполнено условие (5). Тогда

$$Z(0, t; \varepsilon) = \text{const}, \quad \text{Im} \ln Z_\zeta(0, t; \varepsilon) = \text{const}. \quad (20)$$

Дифференцируя первое уравнение в (20) по  $\varepsilon$  и переходя затем к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем  $Z^{(1)}(0, t) = 0$ . Отсюда следуют два уравнения

$$z_0^{(+)} = 0, \quad z_0^{(-)} = 0. \quad (21)$$

Дифференцируя второе уравнение в (20) по  $\varepsilon$  и переходя затем к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , находим  $\text{Im} Z_\zeta^{(1)}(0, t)/Z_\zeta^{(0)}(0, t) = 0$ . Следовательно,

$$(z_1^{(+)} e^{\lambda t} + z_1^{(-)} e^{\bar{\lambda}t})/M_2 - (\overline{z_1^{(+)}} e^{\bar{\lambda}t} + \overline{z_1^{(-)}} e^{\lambda t})/\overline{M_2} = 0.$$

Приравнивая в этом выражении члены при одинаковых экспонентах, получаем последнее алгебраическое уравнение

$$z_1^{(+)}\overline{M_2} = \overline{z_1^{(-)}}M_2. \quad (22)$$

Таким образом, имеется 12 уравнений (16)–(19) и три уравнения (21), (22), которые в сумме дают систему 15 линейных однородных алгебраических уравнений, содержащих 23 комплексные неизвестные:

$$u_0^{(\pm)}, u_1^{(\pm)}, u_2^{(\pm)}, u_3^{(\pm)}; z_0^{(\pm)}, z_1^{(\pm)}, z_2^{(\pm)}, z_3^{(\pm)}; q_0^{(\pm)}, q_1^{(\pm)}, q_2^{(\pm)}, q_3^{(\pm)} - \overline{q_3^{(-)}}.$$

Уравнения (8) уже содержатся в полученной системе. Других уравнений, связывающих константы, в задаче не возникает. Если, например, дополнительно рассмотреть уравнения, получаемые приравниванием членов при более высоких степенях  $\zeta$  в (11), (12) или в (13), (14), то каждое такое уравнение добавляет одну неизвестную. Поэтому разность между количеством неизвестных констант и количеством уравнений останется неизменной:  $23 - 15 = 8$ .

Таким образом, общее решение системы (16)–(19), (21), (22) зависит от восьми свободных комплексных констант, обозначаемых  $\delta_j$  ( $j = \overline{1, 8}$ ), в качестве которых примем следующие константы:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= q_0^{(+)}, \quad \delta_2 = q_1^{(+)}, \quad \delta_3 = q_2^{(+)}, \quad \delta_4 = q_3^{(+)} - \overline{q_3^{(-)}}, \\ \delta_5 &= -\overline{q_2^{(-)}}, \quad \delta_6 = -\overline{q_1^{(-)}}, \quad \delta_7 = -\overline{q_0^{(-)}}, \quad \delta_8 = (z_1^{(+)}/M_2 + \overline{z_1^{(-)}}/\overline{M_2})/2. \end{aligned}$$

Тогда остальные константы, входящие в систему линейных алгебраических уравнений (16)–(19), (21), (22), выражаются через  $\delta_j$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} z_0^{(+)} &= 0, \quad z_0^{(-)} = 0, \quad z_1^{(+)} = \delta_8 M_2, \quad z_1^{(-)} = \overline{\delta_8} M_2, \\ u_0^{(+)} &= -\delta_1 M_2, \quad u_0^{(-)} = \overline{\delta_7} M_2, \\ u_1^{(+)} &= \delta_8 - \delta_1 M_3 - \delta_2 M_2, \quad u_1^{(-)} = \overline{\delta_8} + \overline{\delta_7} M_3 + \overline{\delta_6} M_2, \\ u_2^{(+)} &= -\delta \lambda M_2^2 - \delta_7 \overline{M_2}, \quad u_2^{(-)} = \overline{\delta_7 \lambda} M_2^2 + \overline{\delta_1} \overline{M_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При более высоких степенях  $\zeta$  все коэффициенты рядов (15) также линейно выражаются через  $\delta_j$ .

В новых обозначениях система уравнений (11), (12) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -Z^{(+)}\lambda\zeta + U_{\zeta}^{(+)} - U^{(+)}/\zeta + U^{(+)}\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)} &= \delta_1 M_2/\zeta - \delta_7 \overline{M_2}\zeta, \\ Z^{(+)}\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)} + Z_{\zeta}^{(+)} + U^{(+)}Z_{\zeta}^{(0)}/\zeta &= \\ &= \zeta^2(Z_{\zeta}^{(0)})^2(\delta_1/\zeta^3 + \delta_2/\zeta^2 + \delta_3/\zeta + \delta_4 + \delta_5\zeta + \delta_6\zeta^2 + \delta_7\zeta^3). \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично система (13), (14) записывается в виде

$$\begin{aligned} -Z^{(-)}\bar{\lambda}\zeta + U_{\zeta}^{(-)} - U^{(-)}/\zeta + U^{(-)}\bar{\lambda}\zeta Z_{\zeta}^{(0)} &= -\bar{\delta}_7 M_2/\zeta + \bar{\delta}_1 \overline{M_2}\zeta, \\ Z^{(-)}\bar{\lambda}\zeta Z_{\zeta}^{(0)} + Z_{\zeta}^{(-)} + U^{(-)}Z_{\zeta}^{(0)}/\zeta &= \\ &= \zeta^2(Z_{\zeta}^{(0)})^2(-\bar{\delta}_7/\zeta^3 - \bar{\delta}_6/\zeta^2 - \bar{\delta}_5/\zeta - \bar{\delta}_4 - \bar{\delta}_3\zeta - \bar{\delta}_2\zeta^2 - \bar{\delta}_1\zeta^3). \end{aligned} \quad (25)$$

Параметры  $\delta_j$ , входящие в правую часть (24), (25), могут быть произвольными комплексными числами. Таким образом, в силу линейности систем (24), (25) их общее решение можно представить в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} Z^{(+)}(\zeta) &= \sum_{j=1}^8 \delta_j Z_j^{(+)}(\zeta), & U^{(+)}(\zeta) &= \sum_{j=1}^8 \delta_j U_j^{(+)}(\zeta), \\ Z^{(-)}(\zeta) &= \sum_{j=1}^8 \bar{\delta}_j Z_j^{(-)}(\zeta), & U^{(-)}(\zeta) &= \sum_{j=1}^8 \bar{\delta}_j U_j^{(-)}(\zeta), \end{aligned} \quad (26)$$

где функции  $Z_j^{(+)}(\zeta)$ ,  $Z_j^{(-)}(\zeta)$ ,  $U_j^{(+)}(\zeta)$ ,  $U_j^{(-)}(\zeta)$  определяются из решения дифференциальных уравнений, не содержащих  $\delta_j$ . Например, из (24) следует, что функции  $Z_1^{(+)}(\zeta)$ ,  $U_1^{(+)}(\zeta)$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} -Z_1^{(+)}\lambda\zeta + U_1^{(+)\prime} - U^{(+)}/\zeta + U^{(+)}\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)} &= M_2/\zeta, \\ Z_1^{(+)}\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)} + Z_1^{(+)\prime} + U^{(+)}Z_{\zeta}^{(0)}/\zeta &= (Z_{\zeta}^{(0)})^2/\zeta. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $\zeta$ . Из (23) следует, что к системе (27) нужно добавить данные Коши при  $\zeta = 0$  следующего вида:

$$U_1^{(+)}(0) = -M_2, \quad Z_1^{(+)}(0) = 0.$$

Аналогично устанавливается, что остальные пары функций  $U_j^{(+)}(\zeta)$ ,  $Z_j^{(+)}(\zeta)$  найдутся из решения некоторых задач Коши для неоднородной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, причем левая однородная часть каждой системы одинакова и совпадает с левой частью системы (27), а правая неоднородная часть зависит от номера  $j$ . Эти рассуждения справедливы и для функций  $U_j^{(-)}(\zeta)$ ,  $Z_j^{(-)}(\zeta)$ .

**Сведение задачи к дифференциальному уравнению.** Представление (26) содержит 32 функции, причем это количество можно уменьшить. Вместо каждой из систем первого порядка (24), (25) можно получить по одному дифференциальному уравнению второго порядка для функций  $U^{(+)}$  и  $U^{(-)}$ . Однако для этих уравнений точка  $\zeta = 0$  является



Правые части  $E_j$  уравнений и данные Коши  $D_j, R_j$

| $j$ | $E_j$   | $D_j$  | $R_j$             |
|-----|---|--------|-------------------|
| 1   | $M_2[\lambda Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + \zeta(\lambda Z_{\zeta}^{(0)})^2] + \lambda Z_{\zeta}^{(0)}(Z_{\zeta}^{(0)} + M_2)/\zeta$ | $-M_3$ | $-\lambda M_2^2$  |
| 2   | $\lambda[Z_{\zeta}^{(0)}]^2$  | $-M_2$ | 0                 |
| 3   | $\lambda\zeta[Z_{\zeta}^{(0)}]^2$   | 0      | 0                 |
| 4   | $\lambda\zeta^2[Z_{\zeta}^{(0)}]^2$   | 0      | 0                 |
| 5   | $\lambda\zeta^3[Z_{\zeta}^{(0)}]^2$   | 0      | 0                 |
| 6   | $\lambda\zeta^4[Z_{\zeta}^{(0)}]^2$   | 0      | 0                 |
| 7   | $\lambda\zeta^5[Z_{\zeta}^{(0)}]^2 - \lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)}\overline{M_2}$  | 0      | $-\overline{M_2}$ |
| 8   | 0   | 1      | 0                 |

особой (несмотря на то что сами функции  $U^{(\pm)}(\zeta)$  в этой точке особенностей не имеют). Для того чтобы избавиться от этой особой точки, введем новые неизвестные функции

$$V^{(+)}(\zeta) = (U^{(+)}(\zeta) + \delta_1 M_2)/\zeta, \quad V^{(-)}(\zeta) = (U^{(-)}(\zeta) - \overline{\delta_7} M_2)/\zeta,$$

которые согласно (23) при  $\zeta = 0$  особенностей не имеют. Поскольку эти функции аналитичны при  $\zeta = 0$ , из (23) получаем данные Коши

$$\begin{aligned} V^{(+)}(0) &= \delta_8 - \delta_1 M_3 - \delta_2 M_2, & V^{(+)\prime}(0) &= -\delta_1 \lambda M_2^2 - \delta_7 \overline{M_2}, \\ V^{(-)}(0) &= \overline{\delta_8} + \overline{\delta_7} M_3 + \overline{\delta_6} M_2, & V^{(-)\prime}(0) &= \overline{\delta_7} \lambda M_2^2 + \overline{\delta_1} M_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Избавляясь от  $Z^{(+)}$  в (24), для функции  $V^{(+)}$  получаем неоднородное уравнение вида

$$V^{(+)\prime\prime} + 2\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)} V^{(+)\prime} + [2\lambda Z_{\zeta}^{(0)} + \lambda\zeta Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + (\lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)})^2] V^{(+)} = \sum_{j=1}^8 \delta_j E_j^{(+)}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} E_1^{(+)} &= \lambda\zeta^{-1}(Z_{\zeta}^{(0)})^2 + M_2[\lambda Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + \zeta(\lambda Z_{\zeta}^{(0)})^2 + \lambda Z_{\zeta}^{(0)}/\zeta], \\ E_j^{(+)} &= \lambda\zeta^{j-2}(Z_{\zeta}^{(0)})^2 \quad (j = \overline{2, 6}), \quad E_7^{(+)} = \lambda\zeta^5(Z_{\zeta}^{(0)})^2 - \lambda\zeta Z_{\zeta}^{(0)}\overline{M_2}, \quad E_8^{(+)} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные уравнения получаем для  $V^{(-)}$ :

$$V^{(-)\prime\prime} + 2\overline{\lambda}\zeta Z_{\zeta}^{(0)} V^{(-)\prime} + [2\overline{\lambda} Z_{\zeta}^{(0)} + \overline{\lambda}\zeta Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + (\overline{\lambda}\zeta Z_{\zeta}^{(0)})^2] V^{(-)} = \sum_{j=1}^8 \overline{\delta}_j E_j^{(-)}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} E_1^{(-)} &= -\overline{\lambda}\zeta^5(Z_{\zeta}^{(0)})^2 + \overline{M_2}\overline{\lambda}\zeta Z_{\zeta}^{(0)}, & E_j^{(-)} &= -\overline{\lambda}\zeta^{6-j}(Z_{\zeta}^{(0)})^2 \quad (j = \overline{2, 6}), \\ E_7^{(-)} &= -\overline{\lambda}\zeta^{-1}(Z_{\zeta}^{(0)})^2 - M_2[\overline{\lambda} Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + \zeta(\overline{\lambda} Z_{\zeta}^{(0)})^2 + \overline{\lambda} Z_{\zeta}^{(0)}/\zeta], & E_8^{(-)} &= 0. \end{aligned}$$

Правая часть уравнений (29), (30) представлена в виде линейной комбинации известных функций с коэффициентами  $\delta_j$  и  $\overline{\delta}_j$ . Поэтому общее решение дифференциальных уравнений (29), (30) записывается в виде линейной комбинации восьми функций  $V_j(\zeta; \lambda)$ . Каждая из этих функций находится из восьми задач Коши, поставленных в точке  $\zeta = 0$  для восьми дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка с одинаковыми левыми однородными частями. Правые части  $E_j$ , а также данные Коши  $D_j, R_j$ , т. е. значение функции  $V_j(\zeta; \lambda)$  и ее производной по  $\zeta$  при  $\zeta = 0$ , представлены в таблице. Из вида дифференциальных уравнений (29), (30) и данных Коши (28) следует

**Теорема.** Пусть функции  $V_j(\zeta; \lambda)$  ( $j = \overline{1, 8}$ ) находятся из решений задач Коши

$$V_j'' + 2\lambda\zeta Z_\zeta^{(0)} V_j' + [2\lambda Z_\zeta^{(0)} + \lambda\zeta Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + (\lambda\zeta Z_\zeta^{(0)})^2] V_j = E_j; \quad (31)$$

$$V_j(0; \lambda) = D_j, \quad V_j'(0; \lambda) = R_j. \quad (32)$$

Тогда функции  $V^{(+)}$ ,  $V^{(-)}$  записываются в виде

$$V^{(+)} = \sum_{j=1}^8 \delta_j V_j(\zeta; \lambda), \quad V^{(-)} = - \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j V_{8-j}(\zeta; \bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 V_8(\zeta; \bar{\lambda}), \quad (33)$$

где  $\delta_j$  — произвольные комплексные числа.

**Решение в окрестности особых точек.** Буквой  $j$  ( $j = \overline{1, 8}$ ) в дальнейшем будет обозначаться номер задачи Коши (31), (32), а буквой  $n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) — номер точки  $\zeta = a_n$ . В этих точках, вообще говоря, решения уравнений (31) имеют особенности. Распорядимся имеющимися свободными коэффициентами  $\delta_j$  в представлении (33) таким образом, чтобы функции  $V^{(+)}(\zeta)$ ,  $V^{(-)}(\zeta)$  были аналитическими в окрестности всех четырех точек  $\zeta = a_n$ . Иными словами, попытаемся решить сначала более простую задачу 2.

Общее решение уравнения (31) есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, которое не зависит от  $j$ . В окрестности конечной регулярной особой точки  $\zeta = a_n$  для однородного дифференциального уравнения

$$V_j'' + 2\lambda\zeta Z_\zeta^{(0)} V_j' + [2\lambda Z_\zeta^{(0)} + \lambda\zeta Z_{\zeta\zeta}^{(0)} + (\lambda\zeta Z_\zeta^{(0)})^2] V_j = 0 \quad (34)$$

можно построить два специальных частных линейно независимых решения  $R_n(\zeta; \lambda)$ ,  $G_n(\zeta; \lambda)$ , называемых решениями Фробениуса [12]. Поскольку разность характеристических показателей равна целому числу, одно из решений содержит логарифм:

$$R_n(\zeta; \lambda) = (\zeta - a_n)^{1-\lambda h_n/\pi} [1 + O(\zeta - a_n)], \quad (35)$$

$$G_n(\zeta; \lambda) = R_n(\zeta; \lambda) \ln(\zeta - a_n) + (\zeta - a_n)^{-\lambda h_n/\pi} [-\pi a_n / (\lambda h_n) + O((\zeta - a_n)^2)].$$

Отметим, что каждое из этих решений не является, вообще говоря, функцией, аналитической при  $\zeta = a_n$ .

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (31) записывается в виде

$$V_j(\zeta; \lambda) = \alpha_j^{(n)}(\lambda) R_n(\zeta; \lambda) + \beta_j^{(n)}(\lambda) G_n(\zeta; \lambda) + \Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda) \quad (n = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, 8}), \quad (36)$$

где первые два слагаемых представляют собой линейную комбинацию с некоторыми коэффициентами  $\alpha_j^{(n)}(\lambda)$ ,  $\beta_j^{(n)}(\lambda)$  фундаментальной пары (35), т. е. общее решение однородного уравнения (34), а функция  $\Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda)$  представляет собой частное решение неоднородного уравнения (31). В качестве частного решения выберем решение, аналитическое при  $\zeta = a_n$ . Такое решение существует и единственно. Это можно показать, найдя решение в виде степенного ряда

$$\Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k (\zeta - a_n)^k. \quad (37)$$

Действительно, уравнение (31) можно представить в виде

$$(\zeta - a_n)^2 V_j'' + (\zeta - a_n) V_j' P(\zeta) + V_j Q(\zeta) = R(\zeta) \quad (j = 1, 8). \quad (38)$$

Здесь функции  $P(\zeta)$ ,  $Q(\zeta)$ ,  $R(\zeta)$  являются аналитическими в точке  $\zeta = a_n$  (см. таблицу), т. е. раскладываются в степенные ряды

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\zeta - a_n)^k, \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\zeta - a_n)^k, \quad R = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\zeta - a_n)^k.$$

Найдем решение уравнения (38) в виде степенного ряда (37). Приравнивая члены при одинаковых степенях  $\zeta - a_n$ , можно показать, что коэффициенты степенного ряда (37) определяются единственным образом по рекуррентным формулам

$$v_0 = r_0/q_0, \quad v_1 = (r_1 - v_0q_1)/(p_0 + q_0), \quad \dots \quad (39)$$

Радиус сходимости ряда (37) равен расстоянию от точки  $\zeta = a_n$  до ближайшей особой точки  $\zeta = a_k$  ( $k \neq n$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ).

Подставляя (36) в первую формулу (33), получаем

$$V^{(+)}(\zeta) = R_n(\zeta; \lambda) \sum_{j=1}^8 \alpha_j^{(n)}(\lambda) \delta_j + G_n(\zeta; \lambda) \sum_{j=1}^8 \beta_j^{(n)}(\lambda) \delta_j + \sum_{j=1}^8 \delta_j \Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda). \quad (40)$$

В формуле (40) при  $\zeta = a_n$  последняя сумма является аналитической функцией в силу аналитичности  $\Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda)$ . Поэтому, для того чтобы функция  $V^{(+)}(\zeta)$  являлась аналитической, необходимо потребовать отсутствия в (40) неаналитических функций  $R_n(\zeta; \lambda)$ ,  $G_n(\zeta; \lambda)$ , т. е. выполнения уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \alpha_j^{(n)}(\lambda) \delta_j = 0, \quad \sum_{j=1}^8 \beta_j^{(n)}(\lambda) \delta_j = 0 \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (41)$$

Аналогично, используя второе уравнение (33), получаем

$$\begin{aligned} V^{(-)}(\zeta) = & -R_n(\zeta; \bar{\lambda}) \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \alpha_{8-j}^{(n)}(\bar{\lambda}) - G_n(\zeta; \bar{\lambda}) \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \beta_{8-j}^{(n)}(\bar{\lambda}) - \\ & - \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \Psi_{8-j}^{(n)}(\zeta; \bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 \alpha_8^{(n)}(\bar{\lambda}) R_n(\zeta; \bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 \beta_8^{(n)}(\bar{\lambda}) G_n(\zeta; \bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 \Psi_8^{(n)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для того чтобы функция  $V^{(-)}(\zeta)$  в (42) являлась аналитической, необходимо потребовать выполнения условий

$$- \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \alpha_{8-j}^{(n)}(\bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 \alpha_8^{(n)}(\bar{\lambda}) = 0, \quad - \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \beta_{8-j}^{(n)}(\bar{\lambda}) + \bar{\delta}_8 \beta_8^{(n)}(\bar{\lambda}) = 0 \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (43)$$

Уравнения (41), (43) дают линейную однородную систему 16 уравнений относительно восьми неизвестных  $\delta_j$ . Из условия нетривиальной разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для нахождения  $\lambda$  в задаче 2.

Систему (41), (43) целесообразно записать не через  $\alpha_j^{(n)}$ ,  $\beta_j^{(n)}$ , а через функции  $\Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda)$ . Если выполнены уравнения (41), (43), то из (40), (42) следует, что

$$V^{(+)}(\zeta) = \sum_{j=1}^7 \delta_j \Psi_j^{(n)}(\zeta; \lambda), \quad V^{(-)}(\zeta) = - \sum_{j=1}^7 \bar{\delta}_j \Psi_{8-j}^{(n)}(\zeta; \bar{\lambda}) \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (44)$$

При выводе уравнений (44) учтено, что  $\Psi_8^{(n)}(\zeta; \lambda) \equiv 0$  ( $n = \overline{1, 4}$ ). Действительно, из таблицы следует, что  $E_8 = 0$ , т. е. при  $j = 8$  уравнение (31) является однородным и единственное решение, аналитическое при  $\zeta = a_n$ , — это тождественный нуль.

Подставляя  $\zeta = 0$  в уравнения (44), а также в производные этих уравнений по  $\zeta$  и сравнивая найденные выражения с данными Коши (28), получаем линейную систему 16 уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^7 \delta_j \Psi_j^{(n)}(0; \lambda) + \delta_1 M_3 + \delta_2 M_2 - \delta_8 = 0, \quad \sum_{j=1}^7 \delta_j \Psi_j^{(n)'}(0; \lambda) + \delta_1 \lambda M_2^2 + \delta_7 \overline{M_2} = 0, \\ \sum_{j=1}^7 \delta_j \overline{\Psi_{8-j}^{(n)}(0; \bar{\lambda})} + \delta_6 \overline{M_2} + \delta_7 \overline{M_3} + \delta_8 = 0, \\ \sum_{j=1}^7 \delta_j \overline{\Psi_{8-j}^{(n)'}(0; \bar{\lambda})} + \delta_1 M_2 + \delta_7 \lambda \overline{M_2^2} = 0 \quad (n = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (45)$$

равносильную системе (41), (43).

Таким образом, имеет место

**Утверждение 1.** Решениями задачи 2 являются значения  $\lambda$ , при которых переопределенная система (45) имеет нетривиальные решения  $\delta_j$ .

Возможности аналитического исследования системы (45) ограничены, поскольку уравнение (34) не проинтегрировано. Это сложное уравнение, квадратично зависящее от параметра  $\lambda$ . Однако если в однородном уравнении (34) выполнить замену переменных  $V_j = e^{-\lambda \Phi} v$ , где

$$\Phi = \int_0^{\zeta} \zeta Z_{\zeta}^{(0)} d\zeta = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^4 h_n \ln(1 - \zeta/a_n) —$$

комплексный потенциал невозмущенного решения, то уравнение примет более простой вид

$$v_{\zeta\zeta} + \lambda Z_{\zeta}^{(0)} v = 0. \quad (46)$$

Уравнение (46) содержит  $\lambda$  только в первой степени и может быть решено приближенно при больших значениях  $|\lambda|$  методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна. В [10] показано, что величина  $1/Z_{\zeta}^{(0)}$  является многочленом четвертой степени:

$$Z_{\zeta}^{(0)} = - \frac{M_2}{(1 - \zeta/a_1)(1 - \zeta/a_2)(1 - \zeta/a_3)(1 - \zeta/a_4)}.$$

Поэтому в наиболее простом случае лобового столкновения струй одинаковой ширины (рис. 3, а) имеем  $Z_{\zeta}^{(0)} = -4\pi^{-1}/(1 - \zeta^4)$ . В этом случае уравнение (46) принимает простую форму, но по-прежнему не интегрируется. Однако после замены независимой переменной  $\mu = \zeta^2$  для функции  $v(\mu)$  получаем дифференциальное уравнение класса Гойна [12].

**Численное решение.** Система (45) удобна для численного исследования, поскольку функции  $\Psi_j^{(n)}(\lambda, \zeta)$  легко находятся путем суммирования степенных рядов (37). На основе рекуррентных формул (39) разработан алгоритм, с использованием которого для любых допустимых  $j$  и  $n$  ( $j = \overline{1, 8}$ ;  $n = \overline{1, 4}$ ) можно найти до 100 коэффициентов степенного

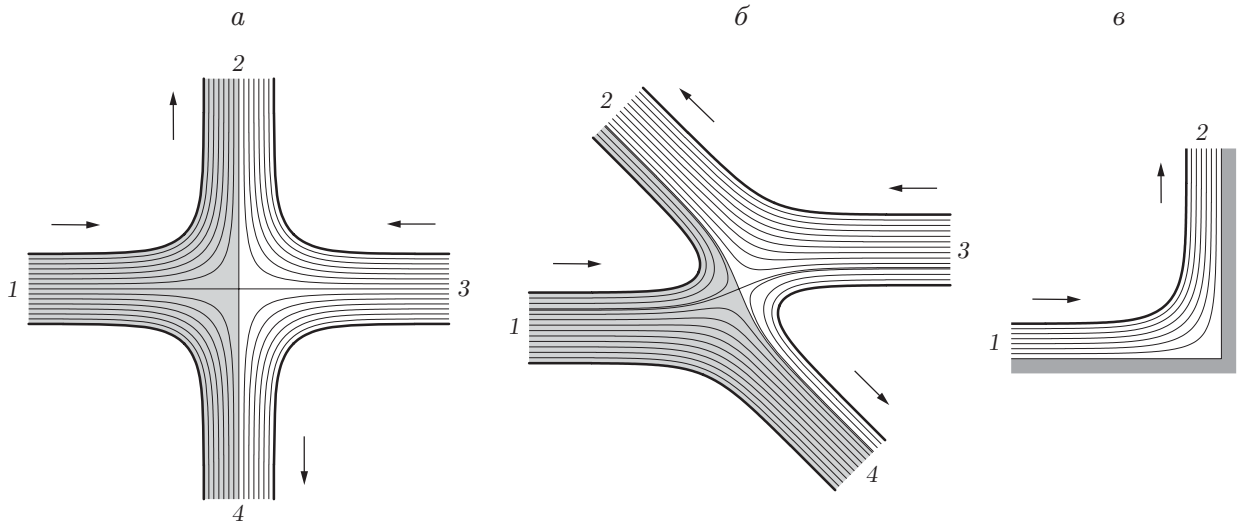


Рис. 3. Стационарные струйные течения, малые нестационарные возмущения которых исследовались в данной работе:  
*a* — лобовое соударение без сдвига; *б* — лобовое соударение со сдвигом (угол между струями равен  $45^\circ$ ); *в* — обтекание угла, равного  $90^\circ$ ; 1, 3 — сходящиеся струи, 2, 4 — расходящиеся струи

ряда (37). Поскольку при  $\zeta = 0$  сходимость ряда (37) не гарантирована, для суммирования расходящегося степенного ряда применялась методика, основанная на использовании аппроксимантов Паде [13–17]. Аппроксимантом Паде называется отношение двух многочленов, которые подбираются таким образом, чтобы при разложении в степенной ряд этого отношения получившиеся начальные коэффициенты ряда были максимально близки к начальным коэффициентам суммируемого степенного ряда.

Контроль точности суммирования Паде осуществлялся изменением количества используемых коэффициентов степенных рядов, изменением используемой длины мантиссы в вещественной арифметике, а также численным интегрированием уравнения (31) с помощью метода Рунге — Кутты. Установлено, что при использовании аппроксимантов Паде [30/30] (в случае, когда степени многочленов в числителе и знаменателе равны 30) точность определения  $\Psi_j^{(n)}(0; \lambda)$ ,  $\Psi_j^{(n)'}(0; \lambda)$  составляет приблизительно 10 знаков после запятой.

При заданном значении  $\lambda$  численно находилась матрица системы (45), имеющая размерность  $8 \times 16$ . В круге  $|\lambda| \lesssim 10^6$  комплексной плоскости  $\lambda$  осуществлялось сканирование с целью нахождения таких значений  $\lambda$ , при которых переопределенная система (45) имеет нетривиальные решения  $\delta_j$ . Численно установлено, что таких решений не существует. Система (45) имеет только тривиальные решения  $\delta_j = 0$ . Таким образом, задача 2 не имеет решений. Решений вида (9), для которых комплексная скорость аналитична одновременно во всех четырех точках  $\zeta = a_n$ , не существует.

Ослабим требования и для некоторой одной точки  $\zeta = a_n$  вместо аналитичности решения потребуем его ограниченности. Для этого достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\operatorname{Re}(-\lambda h_n / \pi) > 0. \tag{47}$$

Действительно, в этом случае

$$\lim_{\zeta \rightarrow a_n} (\zeta - a_n)^{-\lambda h_n / \pi} = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow a_n} (\zeta - a_n)^{1 - \lambda h_n / \pi} \ln(\zeta - a_n) = 0.$$

Следовательно, в окрестности точки  $\zeta = a_n$  функции (35) ограничены. Поэтому согласно (40), (42) ограниченными являются также функции  $V^{(+)}(\zeta)$ ,  $V^{(-)}(\zeta)$ . Отметим, что, поскольку величины  $h_n$  для сходящихся или расходящихся струй имеют один и тот же знак, условие (47) выполняется одновременно для двух точек  $\zeta = a_n$ . Для двух остальных точек  $\zeta = a_n$  функции  $R_n(\zeta; \lambda)$ ,  $G_n(\zeta; \lambda)$  не ограничены, поэтому потребуем, чтобы в формулах (40), (42) они отсутствовали, т. е. потребуем в этих точках аналитичности функций  $V^{(+)}(\zeta)$ ,  $V^{(-)}(\zeta)$ .

Пусть, например, неравенство (47) выполнено при  $n = 2, 4$ , иными словами, потребуем ограниченности решения на двух расходящихся струях. Поскольку  $h_2 < 0$ ,  $h_4 < 0$ , неравенство (47) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (48)$$

Таким образом, если потребовать аналитичности решения для двух сходящихся струй, т. е. выполнения уравнений (45) только при  $n = 1, 3$ , а затем из найденных значений  $\lambda$  выбрать такие, для которых выполнено (48), то ограниченность решения в бесконечно удаленных точках на всех четырех струях будет обеспечена. Аналогично можно потребовать ограниченности решения при  $n = 1, 3$  и его аналитичности при  $n = 2, 4$ .

**Утверждение 2.** *Решениями задачи 1 являются значения  $\lambda$ , при которых система уравнений, полученная из (45) при  $n = 1, 3$ , имеет нетривиальное решение и выполнено неравенство  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , а также значения  $\lambda$ , при которых система уравнений, полученная из (45) при  $n = 2, 4$ , имеет нетривиальное решение и одновременно выполнено неравенство  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .*

Рассмотрим первый случай, т. е. найдем решение задачи 1, являющееся аналитическим на сходящихся струях. Уравнение для определения  $\lambda$  получается приравнением к нулю определителя (размерностью  $8 \times 8$ ) однородной системы восьми линейных уравнений относительно восьми неизвестных  $\delta_j$ , которая получается из (45), если взять уравнения только для  $n = 1, 3$ . Решая это уравнение и отбрасывая значения  $\lambda$ , лежащие в левой полуплоскости, получаем искомые собственные значения.

Такие вычисления были выполнены для двух струйных конфигураций (см. рис. 3, а, б). Рис. 4 соответствует струйной конфигурации, представленной на рис. 3, б, т. е. лобовому столкновению со сдвигом двух струй единичной ширины, причем угол между сходящимися и расходящимися струями составляет  $45^\circ$ . На рис. 4 в каждой точке сплошной линии в плоскости  $\lambda$  реальная часть определителя равна нулю. Соответственно в каждой точке пунктирной линии равна нулю мнимая часть определителя. Искомые собственные значения, отмеченные светлыми точками, находятся в месте пересечения сплошной и пунктирной линий. Темные точки соответствуют вещественным собственным значениям  $\lambda_k = \pi k$  ( $k \leq 1$ ). Эти собственные значения будем называть тривиальными. Для найденных собственных значений  $\lambda$  комплексная скорость будет аналитична в окрестности точек  $\zeta = a_1$ ,  $\zeta = a_3$ , соответствующих сходящимся струям. Для обеспечения ограниченности комплексной скорости на расходящихся струях необходимо среди найденных собственных значений оставить только те, которые лежат в правой полуплоскости (48). Однако, как показано на рис. 4, такое собственное значение только одно:  $\lambda = \pi$ . Все остальные собственные числа лежат в левой полуплоскости.

Ситуация не меняется и для других струйных конфигураций. На рис. 5 представлена аналогичная картина в плоскости  $\lambda$  для течения, показанного на рис. 3, а (лобовое соударение двух струй без сдвига). В этом случае количество комплексных собственных значений уменьшается, а на вещественной оси появляется большое количество нетривиальных собственных значений. Однако по-прежнему почти все собственные значения лежат в левой полуплоскости.

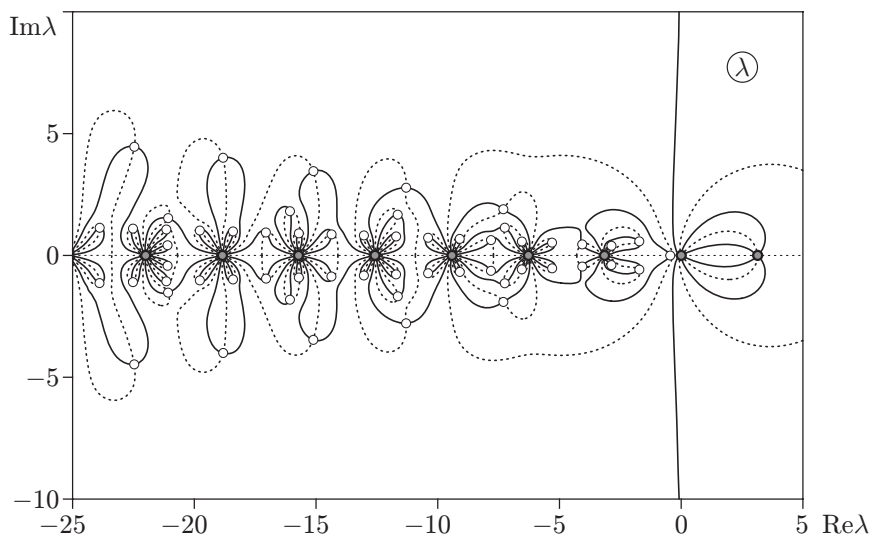


Рис. 4. Спектральная картина для течения, представленного на рис. 3,б: светлые точки — собственные значения  $\lambda$ , темные точки — собственные значения, определяемые формулой  $\lambda = \pi k$  ( $k$  — целое число, меньшее двух); сплошные линии — линии, вдоль которых реальная часть определителя системы (45) равна нулю; пунктирные линии — линии, вдоль которых мнимая часть равна нулю

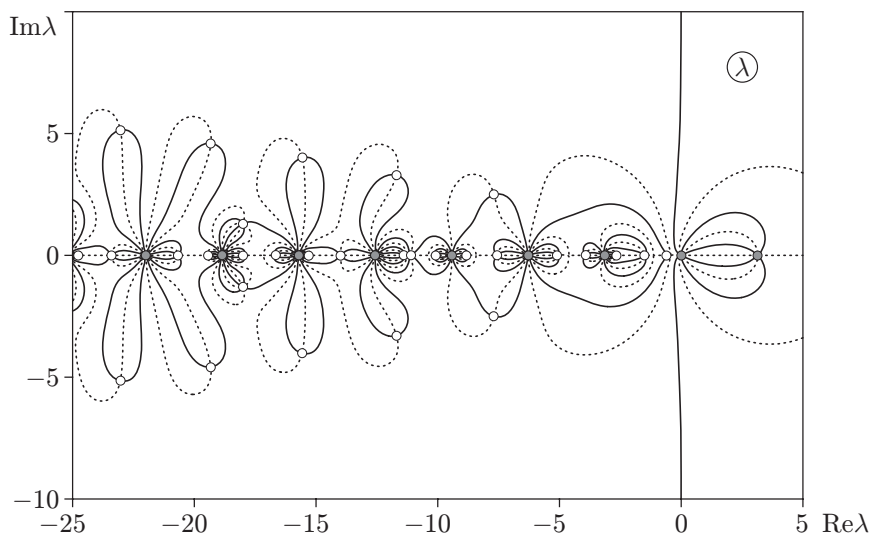


Рис. 5. Спектральная картина для течения, представленного на рис. 3,а (обозначения те же, что на рис. 4)

Таким образом, установлено, что все собственные функции, кроме одной, являющиеся аналитическими на сходящихся струях, на расходящихся струях являются неограниченными.

Аналогичный результат можно получить, если искать собственные функции, аналитические на расходящихся струях. На сходящихся струях эти функции будут неограниченными. Если в системе (45) приравнять к нулю определитель уравнений при  $n = 2, 4$ , то полученные картины в плоскости  $\lambda$  совпадут с картинами, представленными на рис. 4, 5, если для последних выполнить замену  $\text{Re } \lambda \rightarrow -\text{Re } \lambda$ .

Таким образом, с помощью численно-аналитических методов удалось найти только одно решение задачи 1.

Для проверки использованного алгоритма нахождения собственных значений и для контроля его точности создан вспомогательный независимый алгоритм, предназначенный для исследования малых возмущений в задаче обтекания потоком прямого угла (см. рис. 3, в). Это простейшее течение в задаче о соударении струй, малые возмущения которого должны содержать только моды, симметричные относительно координатных осей. В этом состоит отличие рассматриваемого течения от течения, представленного на рис. 3, а, которое должно содержать не только симметричные собственные функции, но и антисимметричные.

Следует отметить, что для течения, представленного на рис. 3, в, дисперсионное уравнение для определения собственных значений  $\lambda$  записывается в виде  $\Psi'(0; \lambda) = 0$ . Функция  $\Psi(\zeta; \lambda)$  является решением дифференциального уравнения

$$\Psi''(1 - \zeta^4)^2 - \Psi' \frac{8\lambda\zeta}{\pi} (1 - \zeta^4) + \Psi \left( \frac{16\lambda^2\zeta^2}{\pi^2} - \frac{8\lambda}{\pi} (1 - \zeta^4) - \frac{16\lambda\zeta^4}{\pi} \right) = \frac{16\lambda}{\pi^2} (1 - \zeta^4),$$

аналитическим в точке  $\zeta = 1$ . Такая функция единственна и находится численно с использованием суммирования Паде.

На рис. 6 представлены линии, полученные с использованием вспомогательного алгоритма. Вдоль сплошных линий равна нулю реальная часть  $\Psi'(0; \lambda)$ , вдоль пунктирных —

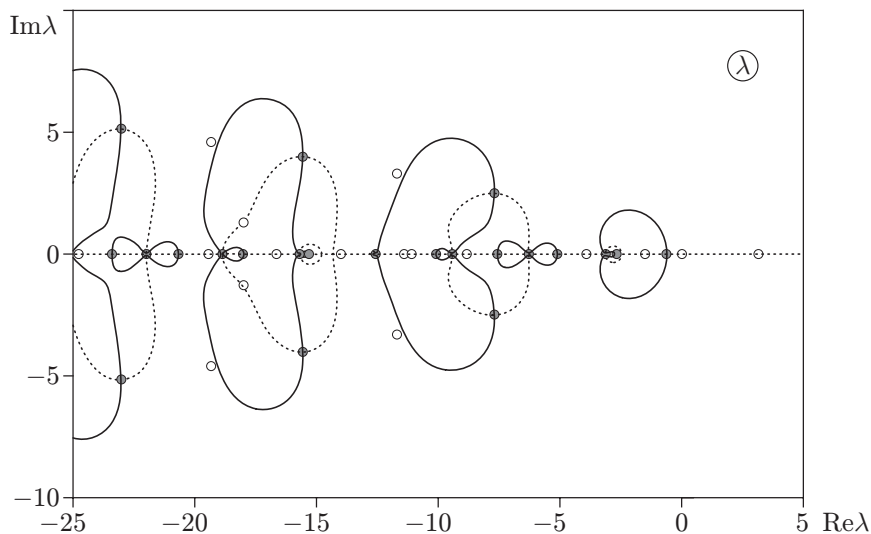


Рис. 6. Спектральные картины для течений, представленных на рис. 3, а, в: сплошные линии — линии, вдоль которых реальная часть  $\Psi'(0; \lambda)$  равна нулю; пунктирные линии — линии, вдоль которых мнимая часть равна нулю; точки — собственные значения, перенесенные с рис. 5



мнимая. Точками отмечены собственные значения, перенесенные с рис. 5. Темные точки расположены в месте пересечения сплошных и пунктирных линий. Это свидетельствует о работоспособности основного и вспомогательного алгоритмов. Собственные значения, отмеченные темными и светлыми точками, соответствуют симметричным и антисимметричным возмущениям течения, представленного на рис. 3, а.

**Заключение.** Метод разделения переменных в задаче о малых возмущениях соударяющихся струй позволяет получить решения вида (1). Построению и анализу таких решений посвящена настоящая работа. Условие нетривиальной разрешимости системы (или половины системы) (45) дает дисперсионное уравнение на параметр  $\lambda$ . Выполнено численное решение этого уравнения.

В результате детального численного анализа установлено, что все собственные функции, за исключением одной, всегда являются не ограниченными на большом расстоянии от области взаимодействия струй (либо на сходящихся, либо на расходящихся струях). Вопрос о том, можно ли, используя линейную комбинацию таких функций, решить задачу Коши с ограниченными во всех точках жидкости начальными данными, остается открытым.

Сходные проблемы возникают в других областях математической физики, например при решении задачи об уединенной волне на поверхности жидкости конечной глубины, распространяющейся вдоль оси  $x$ . Если линеаризовать эту задачу на решении, соответствующем состоянию покоя, то собственные функции, ограниченные при  $x \rightarrow -\infty$ , будут не ограниченными при  $x \rightarrow \infty$ . Остается неясным, каким образом из таких решений можно построить решение, ограниченное всюду. Именно поэтому принято считать, что уединенная волна — существенно нелинейное явление.

По мнению автора данной работы, метод Фурье неприменим в задаче о соударении струй, а также в других струйных задачах, в которых присутствует сносовая неустойчивость. Несмотря на то что найденные решения имеют физический смысл: рост возмущений на бесконечности означает неустойчивость одиночной струи в лагранжевых координатах, анализ найденных собственных значений  $\lambda$  не позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости данной струйной конфигурации, т. е. об устойчивости в эйлеровых координатах. Утверждение о неустойчивости всех струйных конфигураций, доказанное в работах [1, 5, 6] на основе представления (1), является малообоснованным и требует дополнительной проверки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fox J. L., Morgan G. W. On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces // Quart. Appl. Math. 1954. V. 11, N 4. P. 439–456.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
3. Curle N. Unsteady two-dimensional flows with free boundaries // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 235, N 1202. P. 375–395.
4. Козин Н. С. Об устойчивости плоского полого вихря // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 60–64.
5. Уткин А. В., Дремин А. Н. Неустойчивость течения, возникающего при симметричном соударении струй идеальной жидкости // Физика горения и взрыва. 1986. Т. 22, № 3. С. 103–109.
6. Уткин А. В. Неустойчивость течения, возникающего при соударении струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 102–107.
7. Козин Н. С. Малые возмущения струи, вытекающей из щели // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 4. С. 641–646.

8. **Кэйз К. М.** Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 37–46.
9. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
10. **Карабут Е. А.** Малые возмущения в задаче о соударении струй. Основные уравнения // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 36–54.
11. **Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф.** Разностный метод решения начально-краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1560–1562.
12. **Славянов С. Ю.** Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей / С. Ю. Славянов, В. Лай. СПб.: Невский диалект, 2002.
13. **Карабут Е. А.** Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. 1. Нахождение коэффициентов степенных рядов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 78. С. 56–73.
14. **Карабут Е. А.** Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. 2. Нахождение особых точек // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 80. С. 63–81.
15. **Карабут Е. А.** Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. 3. Замена переменных в степенных рядах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 81. С. 57–77.
16. **Карабут Е. А.** Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. 4. Асимптотические свойства коэффициентов степенных рядов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 88. С. 65–88.
17. **Karabut E. A.** Semi-analytical investigation of unsteady free-boundary flows // Intern. Ser. Numer. Math. 1991. V. 99. P. 215–224.

*Поступила в редакцию 9/IX 2009 г.*

---