ЛИТЕРАТУРА

1. Li Ting Yi. Recent advances in ηonequilibrium dissociating gasdynamics. ARS Journal, 1961, vol 31, No 2.
2. Липман Г., Рошко А. Элементы газовой динамики. ИЛ, 1960.
3. Clarke J., The linearized flow of a dissociating gas. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 7, No. 4.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.
5. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
6. Zinman W. Новые достижения в химической кинетике гомогенных реакций в диссоциирующем воздухе. Вопр. ракетн. техн., 1960, No. 12.
7. Der J. Linearized supersonic nonequilibrium flow past an arbitrary boundary. NASA TR—119, 1961.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОГО СЛОЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. А. Варданян (*Ереван*)

Исследована связь устойчивости плоского слоя несжимаемой неоднородной жидкости с ориентацией магнитного поля. Показано, что область неустойчивых гармоник сужается при увеличении угла между магнитным полем и осью симметрии слоя.

Положим, что плоский слой несжимаемой неоднородной ($\rho = \rho_0 \exp \{- ny / h\}$) жидкости [1] с бесконечной электропроводностью погружен в однородное магнитное поле, направление которого составляет некоторый угол α с осью симметрии слоя

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \{\cos \alpha, \sin \alpha\} \tag{1}$$

Пусть поверхность слоя деформирована так, что [1-3]

$$\xi (x, y) = \frac{a}{\operatorname{sh} kh} \{- \operatorname{ch} ky \sin kx, \operatorname{sh} ky \cos kx\} \tag{2}$$

Запишем зависимость вектора смещения среды ξ от времени в виде

$$\xi (x, y, t) = \xi (x, y) e^{i\omega t} \tag{3}$$

Тогда задача сводится к исследованию дисперсионного уравнения [4]

$$\omega^2 = \delta w \left(\frac{1}{2} \int \rho \xi^2 \, d\tau\right)^{-1} \qquad (\delta w = \delta m + \delta \Omega) \tag{4}$$

Здесь δm и $\delta \Omega$ — изменения потенциальной энергии, [5, 6]:

$$\delta m = \frac{1}{8\pi\lambda} \int\limits_0^\lambda \int\limits_0^h \{[\mathbf{H} \cdot \nabla \xi]^2 + 2\mathbf{H} (\mathbf{H} \nabla)\} \, dy dx + \frac{1}{8\pi\lambda} \int\limits_0^\lambda \left\{ \int\limits_{h + a\cos kx}^{\infty} (\mathbf{H} + \mathbf{b})^2 dy - \int\limits_h^\infty H^2 dy \right\} dx$$

$$\delta \Omega = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \int\limits_0^\lambda \int\limits_0^h (\rho \delta V + V \delta \rho) \, d\sigma + \int\limits_0^\lambda V_s \rho_s dx \right\}$$

Проводя вычисления с точностью до второго порядка относительно амплитуды деформации a, получаем дисперсионное уравнение (4) в следующем виде

$$\omega^2 = \frac{4\pi G M}{h} z \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \left\{ \frac{1}{F_n} \left[C_n - \frac{1}{z (1 + \operatorname{th} z)} \right] + \right. \tag{5}$$

$$\left. + C_n \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \frac{z (\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z) (\sin^2 \alpha \operatorname{ch} z + \cos^2 \alpha \operatorname{sh} z)}{\operatorname{sh}^2 z} \right\}$$

где M — масса единицы длины слоя, λ — длина волны;

$$z = kh, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad H_0 = 4\pi M \sqrt{G}, \quad F_n = \frac{e^n - 1}{n} = 1 + n \int\limits_0^1 e^{n(1-u)} u du$$

$$C_n = \left(1 + n \int\limits_0^1 e^{n(1-u)} u \, du\right) \left(1 + n \int\limits_0^1 e^{n(1-u)} \frac{\operatorname{sh} 2zu}{\operatorname{sh} 2z} \, du\right)^{-1}$$

Вопрос устойчивости слоя, согласно (3), решается знаком функции ω^2, так, что положительному знаку соответствует устойчивое, а отрицательному — неустойчивое состояние слоя. В первом случае ω выступает в роли частоты колебаний, а во втором случае является скоростью нарастания амплитуды возмущения.

Как показывает уравнение (5), величина и знак функции ω^2 зависят от волнового числа z, градиента плотности, магнитного поля $\mathbf{H}$ и его ориентации α.

Когда $n = 0$ и $\alpha = {}^1/_2 m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, получаются результаты Р. С. Оганесяна [2, 3]. При $n \neq 0$ и $\alpha = m\pi$ получаем случай, рассмотренный в работе [1]

$$\omega^2 = 4\pi G\rho_0 e^{-n} \frac{\operatorname{sh}^2 z\,(4z^2 - n^2)}{2z \operatorname{sh} 2z + n \operatorname{ch} 2z - ne^n} \left\{ \frac{e^n - 1}{n} - \frac{1}{z\,(1 + \operatorname{th} z)} + \right.$$
$$\left. + \frac{ne^{-z}\,(2z \operatorname{ch} 2z + n \operatorname{sh} 2z - 2ze^n)}{z \operatorname{sh} z\,(n^2 - 4z^2)} + \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 z \left(\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - 1\right) \right\}$$

Н екоторое несовпадение здесь и в работе [1] объясняется тем, что в данном случае продольная компонента магнитного поля предполагается отличной от нуля и вне слоя, а также ошибкой, допущенной в работе [1] в вычислениях.

В общем случае при данных n, H, α величина и знак функции ω^2 зависят от z, так что при $z < z_*$, имеем $\omega^2 < 0$ (неустойчивость), а при $z < z_*$ имеем $\omega^2 < 0$ (устойчивость); здесь $z_*(n, \mathbf{H}, \alpha)$ единственный корень уравнения

$$C_n - \frac{1}{z\,(1 + \operatorname{th} z)} + C_n F_n \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \frac{z\,(\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)\,(\sin^2 \alpha \operatorname{ch} z + \cos^2 \alpha \operatorname{sh} z)}{\operatorname{sh}^2 z} = 0 \qquad (6)$$

В работе [2] показано, что $z_* = 0.64$ при $\mathbf{H} = 0$, кроме того, в последнем уравнении член, содержащий $\mathbf{H}$, положителен при всех значениях z, поэтому при увеличении $\mathbf{H}$ z_* уменьшается. Следовательно, заменив в уравнении (6) гиперболические функции их значениями при $z \to 0$, можно его привести к виду

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

$$A = 1 - \frac{F_n}{3} \frac{H^2}{H_0^2} \sin^2 \alpha, \qquad B = 1 + F_n \frac{H^2}{H_0^2} \cos^2 \alpha, \qquad C = F_n \frac{H^2}{H_0^2} \sin^2 \alpha - 1$$

В виде иллюстрации приводим значения волнового числа z_* в зависимости от α и n, вычисленные при фиксированных значениях остальных параметров

$\alpha = 0,$	${}^1/_6\pi,$	${}^1/_4\pi,$	${}^1/_3\pi,$	${}^1/_2\pi,$	$n = 0,$	$\frac{H^2}{H_0^2} = 1$
$z_* = 0.41,$	0.36,	0.31,	0.18,	000,		

$n = 0,$	0.5,	1,	$\alpha = \frac{1}{2}\pi,$	$\frac{H^2}{H_0^2} = 0.5$
$z_* = 0.38,$	0,28,	0.12,		

Анализ полученных результатов показывает, что стабилизирующее воздействие магнитного поля на плоский слой жидкости резко зависит от ориентации самого магнитного поля α и от градиента плотности. Причем это стабилизирующее воздействие усиливается (сужается область неустойчивых гармоник $0 < z < z_*$) с возрастанием α и n.

Приношу глубокую благодарность Р. С. Оганесяну за весьма ценные указания.

Поступила 24 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян В. А., Оганесян Р. С. К теории устойчивости плоского слоя гравитационной жидкости с экспоненциально убывающей плотностью при наличии магнитного поля. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Оганесян Р. С. О гравитационной неустойчивости плоскопараллельного слоя проводящей жидкости. Изв. АН АрмССР, 1958, № 4.
3. Оганесян Р. С. О гравитационной неустойчивости слоя с внутренним магнитным полем, направленным вдоль слоя. Изв. АН АрмССР, 1959, № 3.
4. Kruskal M. D., Frieman E. A. Problems et magnetohydrodynamics, Advanc. Appl. Mech., New York, 1958. (Русск. пер., сб. «Проблемы механики», ИЛ, 1961, стр. 153).
5. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. Физматгиз, 1961.
6. Идельсон Н. И. Теория потенциала. ОНТИ, Л.—М. 1936.