нации на оболочку. Изобары при $t = 6.12$ в момент развитого движения оболочки представлены на фиг. 2. Линия *1* соответствует давлению $p = 0.0015$, линии *2 — 6* — давлениям $p = 0.004, 0.0025, 0.0015, 0.0002, 0.000001$ соответственно. Картина изобар отражает взаимодействие торцовых и боковых волн разрежения. На фиг. 3 представлены линии тока продуктов детонации в тот же момент времени.

Пунктиром показана звуковая линия ($c = w$). Результаты свидетельствуют о наличии небольшой дозвуковой зоны в центральной области течения, основная область течения является сверхзвуковой. Дозвуковая зона по мере развития процесса уменьшается.

Авторы благодарят В. А. Одинцова за помощь в работе и ценные советы.

Поступила 1 III 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Walker W. A., Sternberg H. M.* The Chapman-Jouguet isentrope and the underwater shockwave performance of pentolite. Proc. 4-th Sympos. (Internat.) Detonat. White Oak, Md. 1965, Washington, Office Naval Res., 1967.
2. *Каширский А. В., Коровин Ю. В., Одинцов В. А., Чудов Л. А.* Численное решение двумерной нестационарной задачи о движении оболочки под действием продуктов детонации. ПМТФ, 1972, № 4.
3. *Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Левитан Ю. Л., Рождественский Б. Л.* Численный расчет уравнений двумерной газодинамики с детонацией. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 4, № 3. Новосибирск, ВЦСО АН СССР, 1973.
4. *Коровин Ю. В., Чудов Л. А.* Двумерная автомодельная задача о движении продуктов детонации при точечном инициировании. Всесоюзная школа по теоретическим исследованиям численных методов механики сплошных сред. Тезисы докладов, Звенигород, 1973. М., Ин-т проблем механ. АН СССР, 1973.
5. *Каширский А. В., Коровин Ю. В., Чудов Л. А.* Явный разностный метод для расчета двумерных нестационарных задач о движении продуктов детонации. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 19, М., Изд-во МГУ, 1972.

---

УДК 539.374

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ УПРУГОВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ

*П. М. Горбунов*

*(Москва)*

Дано общее решение задачи о движении тела Максвелла в пластомере плоскопараллельного сдвига при квазистатическом сосредоточенном воздействии. При решении использовано физико-математическое моделирование микроструктуры и процессов ползучести распределенной массы упруговязких материалов.

При исследовании физико-механических свойств упруговязких материалов и их характеристик, таких как коэффициент вязкости, модуль сдвига и время релаксации, часто используют пластомер плоскопараллельного сдвига [1,2]. Пластомер представляет собой систему, состоящую из двух жестких стальных пластин, между которыми заключают исследуемую массу материала (фигуру). Сдвиговую силу создают постоянным грузом $P$ посредством стальной струны и направляющего шкива с моментом инерции $I$ и внешним радиусом $R$. При моделировании микроструктуры и процессов ползучести упруговязких материалов в большинстве случаев не учитывают инерцию распределенной массы образца, инерцию присоединенных масс, локальную ползучесть [2–6].

Попытка учесть инерцию распределенной массы в уравнении движения тела Максвелла при сосредоточенной сдвиговой силе предпринята в [7]. Предел функции ползучести (23) в [7] при условии, что коэффициент вязкости $\eta \to \infty$, не согласуется с решением аналогичной задачи [8] для абсолютно упругой системы.

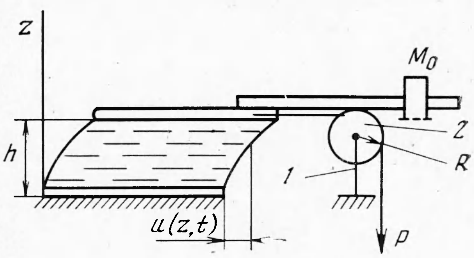
В связи с релаксационными и колебательными процессами внутри движущегося материала (несмотря на то что груз $P$ постоянен) сила на движущейся пластине применяемого пластомера в зависимости от характера этих процессов может быть различной. При анализе конкретных экспериментальных данных эти явления не учитывались.

В данной работе задача о движении тела Максвелла в пластомере плоскопараллельного сдвига при квазистатических воздействиях решена с учетом инерции распределенной массы исследуемого материала и инерции присоединенной массы, являющейся технической характеристикой прибора, а также с учетом изменения внешней сдвиговой силы при движении системы.

Рассмотрим пластомер плоскопараллельного сдвига, схематически изображенный на фигуре: *1* — канифас-блок, *2* — шкив канифас-блока, $M_0$ — приведенная масса верхней пластины и индикаторного штока, $P$ — постоянный груз, действующий на сдвиг, $U(z, t)$ — функция смещения бесконечно тонкого горизонтального слоя материала в направлении действия сдвиговой силы, $z$ — ось координаты, $h$ — расстояние между пластинами пластомера (толщина прослойки материала), жесткое крепление нижней пластины пластомера символически изображено наклонными штрихами.

К движущейся пластине жестко прикреплен индикаторный шток. Их общая масса $M$ в отсутствие внешней нагрузки играет роль присоединенной массы. Когда система находится под действием груза $P$, присоединенная масса $M = M_0 + P / g + I / R^2$ (*г*), где $P / g$ — масса груза, $I / R^2$ — приведенная масса движущегося шкива, $g$ — ускорение свободного падения, а $M_0$, $P$, $I$, $R$ определены выше. Массой струны пренебрегаем.

Далее рассмотрим поведение пластомера, содержащего упруговязкий материал в естественном состоянии [9]. Примем простую структурно-механическую модель — модель Максвелла. Она характеризуется двумя физическими величинами — модулем сдвига $G$ и коэффициентом вязкости $\eta$ исследуемого материала. Выберем условия эксперимента так, чтобы можно было считать $G$ и $\eta$ постоянными по всему образцу. Локальное соотношение между относительным сдвигом $\gamma$ и механическим сдвиговым напряжением $\sigma$ можно записать в виде




(1) $$\eta\dot{\gamma} = \sigma + \tau\dot{\sigma}$$

где $\tau = \eta / G$ — постоянная времени релаксации.

Жесткость образца много меньше жесткости стальных деталей, из которых изготовляется пластомер. Пренебрежем деформациями последних и будем считать, что все элементы массы $M$ смещаются во времени с одинаковыми скоростью и ускорением, оставаясь параллельными самим себе. Можно считать, что масса $M$ сосредоточена в бесконечно тонком слое на верхней границе $S(h)$ образца, где $S(h)$ — площадь контакта верхняя пластина — образец. Следовательно, смещение, скорость и ускорение массы $M$ будут совпадать с $U(h, t)$, $U_t(h, t)$ и $U_{tt}(h, t)$ соответственно, где $U(h, t)$ — смещение верхней пластины, т. е. контактного слоя пластина — образец.

Под действием груза $P$ на поверхности образца $S(h)$ при $\eta \to \infty$ возникает напряжение

(2) $$\sigma(h, t) = \frac{P}{S} - \frac{U_{tt}(h, t)}{S}\left[\frac{P}{g} + \frac{I}{R^2} + M_0\right] - \frac{f}{S}$$

где $f$ — сила, обусловленная внешним трением в подшипниках шкива и внутренним трением струны. На упомянутых пластомерах сила $f$ практически не превышает 2 *Г*, что составляет пренебрежимо малую величину по отношению к используемому грузу $P$, ею можно пренебречь. Примем, что площадь поперечного сечения образца по горизонтальной плоскости в направлении действия сдвиговой силы постоянна по всей области $0 \leqslant z \leqslant h$. Процесс ползучести будем считать изотермическим в связи с тем, что толщина образца 1—2 *мм* и средняя скорость сдвига мала. Длину образца и внешнюю силу сдвига выбираем такими, чтобы движение образца можно было считать простым сдвигом [7].

При изложенных допущениях движение системы описывается функцией $U(z, t)$, дающей горизонтальное смещение бесконечно тонкого слоя материала, находящегося на высоте $z$, а относительный сдвиг этого слоя

(3) $$\gamma = \partial U(z, t) / \partial z$$

Используя соотношения (1) — (3) и метод физико-математического моделирования [9,10], запишем дифференциальное уравнение в частных производных для функции смещения

$$U_{ttt}+\frac{1}{\tau}U_{tt}-\frac{G}{\rho}U_{tzz}=0 \tag{4}$$

где $\rho$ — плотность материала.

Будем считать, что при $t < 0$ груз отсутствует ($P = 0$), а при $t > 0$ $P = \mathrm{const}$, так что

$$U(z, 0) = 0, \quad U_t(z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h \tag{5}$$

Поскольку сила трения в системе пропорциональна скорости смещения $U_t(z, t)$, а $U_t(z, 0) = 0$, то в качестве третьего начального условия можно принять соотношения

$$\rho U_{tt}(z, 0) - G\,U_{zz}(z, 0) = 0 \text{ при } z < h \tag{6}$$

и при $z = h$

$$U_z(h, 0)=\frac{P}{SG}-\frac{M}{SG}U_{tt}(h, 0) \tag{7}$$

Граничные условия движущейся системы при $t > 0$ можно определить согласно [8,11], исходя из равновесия сил вблизи границы при $z \to h$ и соотношений (1) — (3). Запишем их в виде

$$U(0, t) = 0, \quad S\eta\,U_{tz}(h, t) = P - M\,[\tau U_{ttt}(h, t) + U_{tt}(h, t)] \tag{8}$$

При $\rho Sh / M < 1$ и $4\tau S\eta / Mh > 1$ решение уравнения (4) с начальными и граничными условиями (5)—(8) можно записать в виде

$$U(z, t)=\frac{Pz}{S\eta}(t+\tau)-\frac{Pz}{S\eta^2}\left[\frac{Mh}{S}+\frac{\rho h^2}{2}-\frac{\rho z^2}{6}\right]+\frac{P\rho h^3}{S\eta^2}\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k\sin\beta_k z/h}{\beta_k^3(2\beta_k+\sin 2\beta_k)}\left[(3-\xi_k^2)\cos q_k t+\frac{1-3\xi_k^2}{\xi_n}\sin q_k t\right] \tag{9}$$

где $\beta_k$ — положительные решения уравнения

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{M}{S\rho h}\beta \tag{10}$$

$$\xi_k=\sqrt{\frac{4\tau\eta\beta_k^2}{\rho h^2}-1}, \quad q_k=\frac{1}{2\tau}\xi_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Решение (9) в пределе при $M \to 0$ совпадает по форме с решением (23) работы [7], полученным операционным методом, но отличается от него предэкспоненциальным коэффициентом. Если положить в (9) $M = 0$ и взять предел при $\eta \to \infty$, то решение (9) согласуется с решением аналогичной задачи [8] о движении абсолютно упругой системы.

В данном случае в принципе масса $M$ никогда не равна нулю, ее можно только приближать каким-либо способом к $P / g$. Поэтому представляет интерес также предел решения (9) при $M \neq 0$ и $\eta \to \infty$.

$$U(z, t)=\frac{Pz}{SG}-\frac{4Ph}{SG}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k\,\sin(\beta_k z/h)\,\cos\beta_k(G/\rho h^2)^{-1/2}t}{\beta_k(2\beta_k+\sin 2\beta_k)} \tag{11}$$

Решение (9) является общим для описания движения распределенной массы тела Максвелла при данных условиях эксперимента. Его можно применять для исследования материалов, вязкость которых велика, а также в пренебрежении эффектами влияния движущейся системы на внешнюю сдвиговую силу.

При установившемся движении системы влияние технической характеристики прибора (массы $M$) является существенным при $t \gg 2\tau$

$$U(h, t) = \frac{Pht}{S\eta} - \frac{Ph}{S\eta^2}\left[\frac{Mh}{S} + \frac{\rho h^2}{3} - \frac{\eta^2}{G}\right] \tag{12}$$

Видно, что для расчета и учета (в технических конструкциях) действительных характеристик упругих и диссипативных свойств используемых материалов следует делать необходимые поправки.

Автор благодарен А. Н. Губкину, Г. Я. Коренману, И. А. Лукьянову, Э. Г. Позняку и И. В. Разумовской за интерес к работе и обсуждение результатов.

Поступила 3 VI 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабсай О. Ю., Колтунов М. А., Виноградов Г. В.* Аналитическое описание ползучести полимеров в текучем состоянии в линейной области деформирования. Механика полимеров, 1972, № 4.
2. *Мидлман С.* Течение полимеров. М., «Мир», 1971.
3. *Гольдберг И. И.* Механическое поведение полимерных материалов. М., 1970.
4. *Гунькин С. П., Зеленев Ю. В., Молотков А. П.* О прогнозировании деформационных свойств полимерных материалов. ПМТФ, 1973, № 2.
5. *Зеленев Ю. В., Молотков А. П.* О физически обоснованной макроскопической модели линейных полимеров. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской, 1964, т. 147, вып. 8.
6. *Тобольский А. В.* Структура и свойства полимеров. М., «Химия», 1964.
7. *Губанов А. И.* Элементарные деформации упруговязких тел. Ж. техн. физ., 1947, т. 17, вып. 4.
8. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М., «Наука», 1972.
9. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
10. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.