

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

УДК 532.526:532.529

В. Я. Рудяк, Е. Б. Исаков

Новосибирская государственная академия строительства,  
630008 Новосибирск

Впервые задача гидродинамической устойчивости разреженных газовзвесей или суспензий была поставлена в [1]. Рассматривалась двухфазная среда, состоящая из несущей жидкости (газа) и взвешенных в ней твердых частиц. Предполагалось, что на частицы действует сила сопротивления, пропорциональная скорости, их объемная концентрация мала, а распределение в течении равномерное. В этой постановке в [1] было показано, что задача устойчивости сводится к решению уравнения Орра — Зоммерфельда с эффективным комплексным профилем скорости и справедлива теорема Сквайра. Проведенный в [1] качественный анализ свидетельствует о том, что добавление в гомогенную жидкость мелких частиц дестабилизирует течение, а крупных — оказывает стабилизирующее действие.

Систематическое исследование устойчивости течения Пуазейля двухфазной жидкости, выполненное в [2–4], существенно расширило эти выводы. Было установлено, что величина стабилизации монотонно зависит от массовой концентрации дисперсной фазы. Если массовая концентрация достаточно велика, то в широком диапазоне скоростей течения бесконечно малые двумерные возмущения могут быть полностью подавлены. В зависимости от размера частиц и их плотности это приводит либо к увеличению критического числа Рейнольдса (возможно, на 2–3 порядка), либо к разделению области неустойчивости на две несвязные подобласти, в интервале между которыми течение устойчиво к двумерным возмущениям с любой длиной волны.

С практической точки зрения актуальна задача изучения влияния на устойчивость течений двухфазных жидкостей неоднородности распределения дисперсной фазы. Решение этой задачи и является целью настоящей работы. Задача гидродинамической устойчивости изучается на примере течения Пуазейля сильно разреженной двухфазной среды. Частицы предполагаются сферическими и твердыми.

**Постановка задачи.** Уравнения движения фаз сильно разреженной двухфазной среды в безразмерных переменных имеют вид [1] (границы применимости этой модели изучены в [2])

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_f &= 0, & \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{V}_p) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \mathbf{V}_f \cdot \nabla \mathbf{V}_f &= -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V}_f + \frac{\rho_p}{S \text{Re}} (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f), \\ \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial t} + \mathbf{V}_p \cdot \nabla \mathbf{V}_p &= \frac{1}{S \text{Re}} (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_p), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}_f$  и  $\mathbf{V}_p$  — поля скоростей несущей и дисперсной фаз соответственно;  $P$  — давление среды;  $\rho_p$  — массовая концентрация дисперсной фазы;  $\rho_f = 1$  — плотность несущей среды;  $\text{Re} = U_0 L / \nu$  — число Рейнольдса течения;  $U_0$  — характерная скорость потока;  $L$  — харак-

терный линейный масштаб течения;  $\nu$  — вязкость среды; время релаксации гетерогенной среды  $S$  определяется точным видом закона сопротивления, в частности, если справедлив закон Стокса:  $S = (2/9)(a/L)^2(\rho_p^*/\rho_f)$  ( $a$  и  $\rho_p^*$  — размер и плотность материала частиц).

Задача устойчивости течения по отношению к бесконечно малым возмущениям ставится стандартным образом. В [2–4] показано, что теорема Сквайра выполняется при произвольном распределении дисперсной фазы, поэтому рассмотрение можно ограничить случаем двумерных возмущений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_f \\ \mathbf{V}_p \\ \rho_p \end{pmatrix}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \\ f \end{pmatrix}(y) + \begin{pmatrix} \mathbf{v}_f \\ \mathbf{v}_p \\ f_1 \end{pmatrix}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U} \\ f \end{pmatrix}(y) + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_p \\ \varphi \end{pmatrix}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad (2)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = p(x) + p_1(\mathbf{r}, t) = p(x) + \pi(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}.$$

Здесь  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$  — профиль скорости течения;  $\alpha$  и  $\omega$  — волновое число и частота возмущений;  $f$  — распределение частиц дисперсной фазы в невозмущенном течении. Амплитуду возмущений будем считать малой:

$$v_f \ll U, \quad v_p \ll U, \quad f_1 \ll f, \quad p_1 \ll p.$$

В этом случае движение частиц определяется движением несущей среды:

$$u_{px} = \frac{1}{1 + i\alpha S \operatorname{Re}(U - c)} \left( u_{fx} - \frac{S \operatorname{Re}}{1 + i\alpha S \operatorname{Re}(U - c)} \frac{dU}{dy} u_{fy} \right), \quad (3)$$

$$u_{py} = \frac{1}{1 + i\alpha S \operatorname{Re}(U - c)} u_{fy},$$

а система уравнений (1) сводится к уравнению [2, 4]

$$(W - c)\Delta\psi - W''\psi + \frac{d}{dy}(\psi J f') = \frac{1}{i\alpha \operatorname{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (4)$$

где

$$W(y) = U + fJ; \quad J = \frac{U - c}{1 + i\alpha S \operatorname{Re}(U - c)}; \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2; \quad c = \frac{\omega}{\alpha};$$

$\psi$  — функция тока несущей среды ( $u_{fx} = \psi'$ ,  $u_{fy} = -i\alpha\psi$ ).

Рассмотрим течение дисперсной среды в плоском канале, ограниченном твердыми поверхностями при  $y = \pm 1$ , с профилем скорости  $U = 1 - y^2$  (поперечная координата  $y$  обезразмерена на полуширину канала  $L$ ). Двумерные возмущения в таком течении удовлетворяют обычным условиям непротекания и прилипания на границах:

$$\psi(1) = 0, \quad \psi'(1) = 0; \quad (5)$$

$$\psi(-1) = 0, \quad \psi'(-1) = 0. \quad (6)$$

Поскольку задача обладает симметрией относительно плоскости  $y = 0$ , ее решения имеют либо симметричную функцию тока

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'''(0) = 0, \quad (7)$$

либо антисимметричную

$$\psi(0) = 0, \quad \psi''(0) = 0. \quad (8)$$

В течении Пуазейля однородных жидкостей неустойчива лишь симметричная мода. Как уже отмечалось, устойчивость потока можно уменьшить добавлением мелких частиц, однородно распределенных по пространству течения. Такое уменьшение устойчивости вызывается ростом эффективной плотности среды, что эквивалентно увеличению скорости течения и не может породить новую неустойчивую моду. При неоднородном распределении дисперсной фазы эффективная плотность среды становится непостоянной, и необходимы исследования как симметричных возмущений, удовлетворяющих условиям (5), (7), так и антисимметричных, удовлетворяющих (5), (8). Тем не менее подробное изучение поведения симметричной моды имеет самостоятельную ценность. Ясно, что при достаточно малых концентрациях частиц спектр возмущений близок к спектру возмущений в течении однородной жидкости. Для того чтобы мода, устойчивая в чистой жидкости, стала неустойчивой в двухфазной, если это вообще возможно, необходима критическая концентрация частиц. Таким образом, всегда существует интервал концентраций, в котором устойчивость течения определяется поведением именно симметричной моды.

В рамках настоящей работы задача (4), (5), (7) решалась численно с использованием методов ортогонализации и дифференциальной прогонки. Тестирование использованных схем проводилось на задаче о линейной устойчивости течения Пуазейля гомогенной жидкости [2] и показало хорошее согласие результатов с данными [5].

**Результаты расчетов.** Пусть распределение дисперсной фазы имеет вид

$$f(y) = f_V(\sigma) \exp(-y^2/\sigma^2) \quad (-1 \leq y \leq 1), \quad (9)$$

где нормирующий множитель  $f_V$  выбирается таким образом, чтобы при изменении  $\sigma$  сохранялось общее количество частиц в канале. В пределе  $\sigma \rightarrow \infty$  данное распределение превращается в равномерное, а при  $\sigma \ll 1$  приходим к пределу «тонкого пылевого слоя». В таком слое массовая концентрация частиц может быть сколь угодно велика, но поверхностная плотность

$$f_S = \int_{-1}^1 f(y) dy = \int_{-1}^1 f_V(\sigma) \exp(-y^2/\sigma^2) dy$$

конечна. Возрастание массовой концентрации, однако, не означает увеличения числа частиц в системе. Оно обусловлено лишь уменьшением объема пылевого слоя. Начиная с некоторого  $\sigma$ , он становится физически бесконечно тонким, и именно в этом смысле массовая концентрация частиц будет сколь угодно большой.

Выбор распределения дисперсной фазы в форме (9) объясняется несколькими причинами. Во-первых, данная задача представляет интерес с точки зрения управления устойчивостью течения. Очевидно, что создание более или менее тонкого пылевого слоя наиболее экономично и технически осуществимо. Во-вторых, любое иное распределение частиц может быть представлено в виде совокупности тонких слоев. И наконец, если пылевой слой достаточно тонок, точный вид  $f(y)$  становится несущественным, а важна только поверхностная концентрация частиц  $f_S$ .

На рис. 1 изображены кривые нейтральной устойчивости для сред с распределением частиц (9) при различной толщине пылевого слоя  $\sigma$ . Здесь  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $f_S = 0,1$ . Кривая 6 соответствует чистой жидкости, 1 — двухфазному течению с однородным распределением частиц ( $\sigma \rightarrow \infty$  в (9)). Кривые 2–5 отвечают  $\sigma = 2; 1; 0,5; 0,2$ . При уменьшении толщины пылевого слоя  $\sigma$  кривые быстро сходятся к пределу, который отличен как от случая равномерного распределения, так и от случая чистого газа. Этот предел практиче-

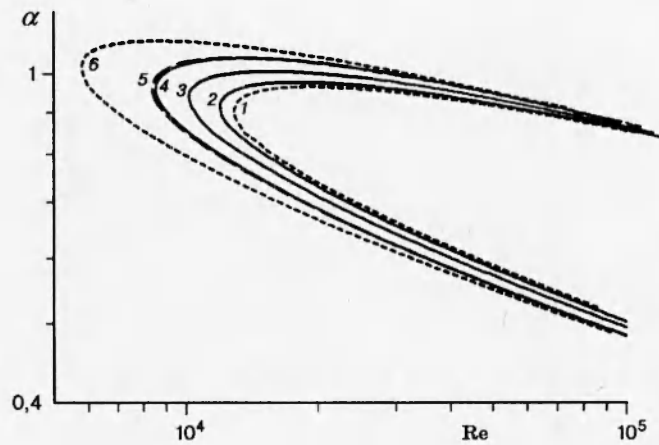


Рис. 1

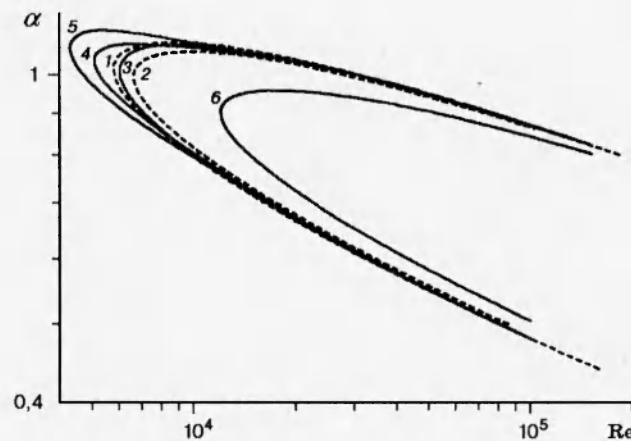


Рис. 2

ски достигается уже при  $\sigma = 0,5$ , и, таким образом, перераспределение частиц в средней области течения  $|y| < 0,5$  слабо отражается на его устойчивости.

Описанный характер устойчивости течений с распределением плотности частиц вида (9) качественно остается одним и тем же в широком диапазоне изменения параметра  $f_S$ . Максимальный стабилизирующий эффект достигается при однородном распределении частиц в потоке (расчеты, показанные на рис. 1, проводились при фиксированном числе частиц в области течения). Уменьшение поверхностной плотности частиц будет приводить к смещению кривых нейтральной устойчивости, получаемых в пределе тонкого пылевого слоя, к кривой нейтральной устойчивости чистой жидкости 6 на рис. 1.

Исследуем теперь поведение возмущений при смещении пылевого слоя относительно оси течения. Поскольку в данной работе изучаются лишь симметричные возмущения, предполагается наличие двух пылевых слоев, расположенных симметрично на расстоянии  $\xi$  от оси течения:

$$f(y) = f_V(\sigma, \xi) \frac{1}{2} \left[ \exp(-(y - \xi)^2 / \sigma^2) + \exp(-(y + \xi)^2 / \sigma^2) \right]. \quad (10)$$

При  $\xi = 0$  имеем симметричный относительно оси пылевой слой (9), при  $\sigma \ll \xi < 1$  — два слоя с поверхностной концентрацией частиц  $f_S/2$ .

На рис. 2 показано, как изменяется устойчивость течения при смещении пылевых сло-

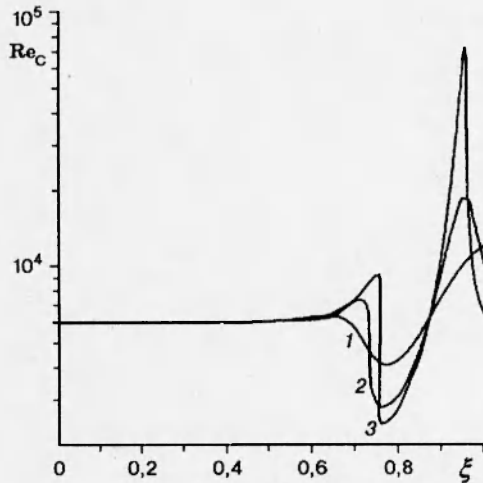


Рис. 3

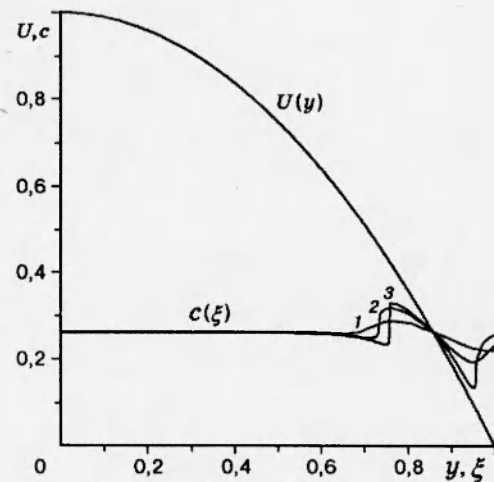


Рис. 4

ев от оси течения к граничным поверхностям. Толщина каждого слоя  $\sigma = 0,1$ , суммарная поверхностная концентрация частиц  $f_S = 0,01$  (поверхностная концентрация в каждом слое  $f_S/2 = 0,005$ ), время релаксации  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Для сравнения даны кривые нейтральной устойчивости чистой жидкости 1 и однородной дисперсной среды 2 ( $f = 0,01$ ,  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ). Устойчивость течения практически не меняется при перераспределении плотности частиц в средней области течения  $\xi = 0 \div 0,5$  (кривые нейтральной устойчивости для  $\xi = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  совпадают с точностью до графического изображения и показаны на рис. 2 линией 3). При дальнейшем смещении слоя к границе устойчивость вначале уменьшается (кривая 4 для  $\xi = 0,72$ ), достигает минимума при  $\xi = 0,77$  (кривая 5), а затем снова растет по мере приближения пылевого слоя к границе (кривая 6 для  $\xi = 1,0$ ).

Такое поведение течения является характерным. Изменение толщины пылевых слоев меняет результаты лишь количественно. На рис. 3 даны зависимости критического числа Рейнольдса  $Re_c(\xi)$  для течений с пылевыми слоями (10) различной толщины  $\sigma$ . Концентрация частиц в каждом слое  $f_S/2 = 0,005$ , время релаксации  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Кривые 1–3 соответствуют толщинам пылевых слоев  $\sigma = 0,1; 0,05; 0,02$ . Видно, что для тонкого слоя максимальная устойчивость течения достигается при расположении слоя не непосредственно у границы, а в некотором промежуточном положении  $\xi \sim 0,95$ . Кроме того, существует еще один локальный максимум устойчивости при  $\xi \sim 0,75$ . Для «толстого» слоя эти эффекты «сглаживаются». Описанная зависимость  $Re_c$  от  $\xi$  связана с резким изменением фазовой скорости возмущения, которое имеет место в окрестности критического слоя и внутри него. На рис. 4 представлена зависимость фазовой скорости возмущения  $c$  от параметра  $\xi$  для разных значений  $\sigma$ , кривые 1–3 отвечают  $\sigma = 0,1; 0,05; 0,02$ .

Важным фактором, определяющим устойчивость течения, является время релаксации частиц пылевого слоя. На рис. 5 приведена зависимость  $Re_c(\xi)$  для различных значений времени релаксации среды  $S$ . Здесь  $\sigma = 0,05$ ,  $f_S = 0,01$ . Кривые 1–5 соответствуют временам релаксации  $S = 4 \cdot 10^{-3}; 10^{-3}; 2,5 \cdot 10^{-4}; 10^{-4}$  и  $10^{-6}$ . Видно, что наибольшее влияние на устойчивость течения оказывают мелкие частицы. Так как при  $SRe \ll 1$  среда ведет себя как однофазная с повышенной плотностью, можно предположить, что основное влияние пылевого слоя на устойчивость течения при малых  $S$  сводится к локальному изменению эффективной плотности среды в окрестности критического слоя. Подобная среда

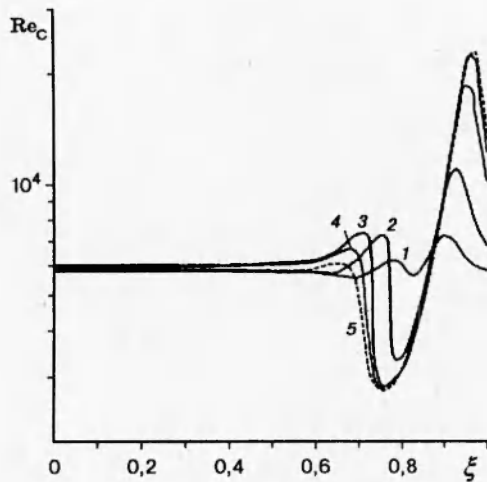


Рис. 5

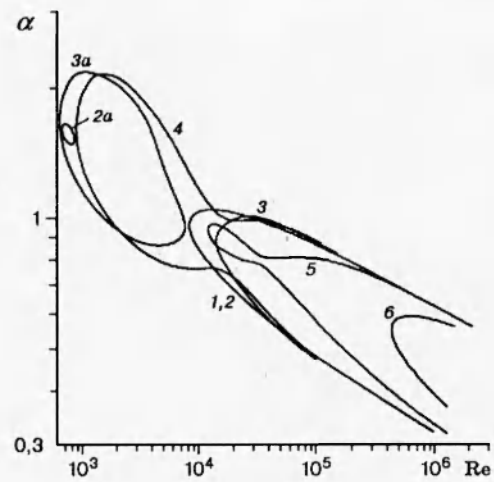


Рис. 6

может быть описана в рамках одножидкостной гидромеханики, соответствующие уравнения имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V},$$

где  $\rho(y)$  — плотность среды;  $\mathbf{V}$  — поле ее скорости. Стандартный вывод приводит к уравнению устойчивости

$$\rho[(U - c)\Delta\psi - U''\psi] + \rho'[(U - c)\psi' - U'\psi] = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (11)$$

которое может быть также получено прямо из (4), если положить в нем  $S = 0$ ,  $\rho(y) = 1 + f(y)$ . В результате решения уравнения (11) с граничными условиями (5), (7) найдена зависимость  $\text{Re}_c(\xi)$  для среды с переменным профилем плотности  $\rho(y)$ , которая совпала с кривой 5 на рис. 5 ( $S = 10^{-6}$ ) с точностью до графического изображения, что и подтверждает сделанное выше предположение. При увеличении  $S$  происходит «развязка» фаз, в результате чего понижается эффективная плотность среды в пылевом слое, и как следствие уменьшается его влияние на устойчивость течения.

С увеличением концентрации частиц в каждом пылевом слое характер устойчивости меняется. На рис. 6 изображены кривые нейтральной устойчивости при  $f_S = 0,1$ ,  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma = 0,1$ . Как и при меньших концентрациях  $f_S$ , перераспределение частиц в средней области течения слабо влияет на его устойчивость (кривая 1 на рис. 6 соответствует  $\xi = 0 \div 0,5$ ). Однако по мере приближения пылевого слоя к критическому при относительно малых скоростях течения ( $\text{Re} < 1000$ ) наряду с основной областью неустойчивости (кривая 2, с точностью до построения совпадающая с кривой 1) возникает новая подобласть неустойчивости для той же моды возмущений (кривая 2a для  $\xi = 0,58$ ). Размеры этой подобласти быстро растут (кривые 3a и 3 для  $\xi = 0,7$ ), и в конце концов она сливается с основной областью неустойчивости (кривая 4 для  $\xi = 0,75$ ). Затем при смещении пылевого слоя к границе течения его устойчивость вновь увеличивается вплоть до  $\text{Re}_c > 400000$  (кривая 5 соответствует  $\xi = 0,887$ , 6 —  $\xi = 1,0$ ).

**Энергетический анализ.** Скорость роста энергии возмущений двухфазной среды

определяется соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{E}_f + \bar{E}_p) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} dy (v_f^2 + \rho_p v_p^2),$$

где  $\Omega$  — область течения. Далее

$$\begin{aligned} \frac{dE_f}{dt} &= \int_{\Omega} dy \mathbf{v}_f \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{V}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right), \\ \frac{dE_p}{dt} &= \int_{\Omega} dy \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \mathbf{V}_p \cdot \nabla \mathbf{v}_p \right) + \int_{\Omega} dy \frac{v_p^2}{2} \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \mathbf{V}_p \cdot \nabla \rho_p \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда функции (2) и учитывая малость амплитуды возмущений, получим

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} dy \mathbf{v}_f \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) + \int_{\Omega} dy f \mathbf{v}_p \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v}_p \right). \quad (12)$$

Используя для упрощения формулы (12) линеаризованные уравнения (1), (3) и учитывая, что на границах области  $\Omega$  выполняется  $\mathbf{v}_f = 0$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \int_{\Omega} dy \tau_f U' - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} dy (\nabla \mathbf{v}_f) : (\nabla \mathbf{v}_f) - \\ &\quad - \int_{\Omega} dy f \tau_p U' - \frac{1}{S \text{Re}} \int_{\Omega} dy f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p)^2, \quad \tau_i = \langle v_{ix} v_{iy} \rangle \quad (i = f, p). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\tau_f$ ,  $\tau_p$  — напряжения Рейнольдса несущей и дисперсной фаз соответственно.

В однофазной жидкости рост энергии возмущений связан с двумя первыми слагаемыми (13). Первое из них соответствует переходу энергии среднего течения в энергию возмущений и наиболее существенно в окрестности критического слоя. Второй член квадратичен и описывает вязкую диссипацию энергии возмущений вблизи границы течения. Третье и четвертое слагаемые (13) связаны с работой межфазной силы, причем третье показывает, что частицы включаются в механизм взаимодействия возмущений с основным потоком, а четвертое снова имеет квадратичный вид и обусловлено вязкой диссипацией энергии при взаимном движении фаз.

Проанализировать это выражение в общем случае для произвольных  $S$  и  $f$  не просто. Мы ограничимся анализом (13) для частного случая, когда  $S \text{Re} \ll 1$ . Используя связь полей скоростей частиц  $\mathbf{v}_p$  и несущей жидкости  $\mathbf{v}_f$  (3), легко установить, что с точностью до членов, линейных по  $S \text{Re}$ , имеем  $\tau_f = \tau_p$ , а  $\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f = 0$ . Учитывая это, находим

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} dy (1 + f) \tau_f U' - \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} dy (\nabla \mathbf{v}_f) : (\nabla \mathbf{v}_f). \quad (14)$$

Последний член в этом выражении всегда отрицателен, и рассматриваемое течение может быть неустойчиво, когда

$$\frac{dE}{dt} > 0 \quad \text{или} \quad - \int_{\Omega} dy (1 + f) \tau_f U' > \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} dy (\nabla \mathbf{v}_f) : (\nabla \mathbf{v}_f). \quad (15)$$

Если частицы в потоке распределены однородно, то  $f = \text{const}$ , а  $\tau_f$  практически совпадает с соответствующим выражением для гомогенной жидкости  $\tau_{f0}$  (последнее легко устано-

вить, например, анализируя уравнение (4)). Значение  $\tau_{f0}$  в течении Пуазейля заметно отличается от нуля лишь в окрестности критического слоя. Поскольку в гомогенной жидкости существует диапазон чисел Рейнольдса, где течение Пуазейля устойчиво, то ясно, что такое же течение двухфазной жидкости с однородным распределением частиц в потоке и с  $SRe \ll 1$  также будет устойчивым в некоторой области значений чисел Рейнольдса. Так как первый член в выражении (14) в двухфазной жидкости будет в  $1 + f$  раз больше, чем в гомогенной, то двухфазное течение дестабилизируется при меньших числах Рейнольдса, чем гомогенное течение. Из (15) следует грубая оценка соотношения критических чисел Рейнольдса течений гомогенной  $Re_{c0}$  и двухфазной жидкостей  $Re_c$ :

$$Re_c = Re_{c0}/(1 + f).$$

При неоднородном распределении частиц в потоке характер поведения напряжений Рейнольдса несущей жидкости  $\tau_f$  может существенно отличаться от поведения  $\tau_{f0}$ . Это видно уже из анализа уравнения для функции тока (4), которое в рассматриваемой ситуации сводится к (11), где  $\rho = 1 + f$ . Это уравнение от обычного уравнения Орра — Зоммерфельда отличается множителем  $(1 + f)$  при первом члене в левой части и наличием второго члена. Для распределения (10) функция  $f'$  (как и  $\rho'$ ) меняет знак вблизи точки  $y = \xi$ . Абсолютное значение этой функции почти везде мало, и вторым членом в (11) можно пренебречь, если только  $\xi$  не лежит вблизи критического слоя. В критическом слое функция тока резко изменяется, и учет этого члена необходим. Знакопеременность превращает его вблизи критического слоя при  $y > \xi$  сначала в дополнительную (к вязкой) диссипативную силу, что приводит к стабилизации течения по сравнению с однородной жидкостью, а затем — в активную силу, приводящую к росту напряжений Рейнольдса и как следствие — к развитию неустойчивости на докритических для гомогенной жидкости режимах течения. Именно такое поведение и наблюдалось в численных расчетах, результаты которых описаны в предыдущем разделе.

Проведенный качественный анализ справедлив при  $SRe \ll 1$ , тем не менее описанные механизмы развития неустойчивости течения и его стабилизации сохраняются и при других значениях параметра  $SRe$ . Однако при  $SRe \gtrsim 1$  важное значение приобретает и сила межфазного взаимодействия. Покажем это для случая достаточно тонких пылевых слоев, поверхностная концентрация частиц в которых сравнительно невелика. В этом случае распределение (10) можно заменить на

$$f(y) = \frac{1}{2} f_S [\delta(y - \xi) + \delta(y + \xi)] = f_S \delta_\xi(y) \quad (f_S \ll 1)$$

и считать, что параметры возмущенного течения близки к параметрам гомогенной жидкости  $\omega_0, \mathbf{v}_{f0}, \tau_{f0}, E_0$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + f_S \omega_1, \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{f0} + f_S \mathbf{v}_{f1}, \quad \tau_f = \tau_{f0} + f_S \tau_{f1}, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{dE_0}{dt} + f_S \frac{dE_1}{dt} - f_S \frac{dE_1}{dt}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что в гомогенной жидкости для нейтральных возмущений  $\mathbf{v}_{f0}$

$$\frac{dE_0}{dt} = - \int_{\Omega} dy \tau_{f0} U' - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} dy (\nabla \mathbf{v}_{f0}) : (\nabla \mathbf{v}_{f0}) = 0.$$



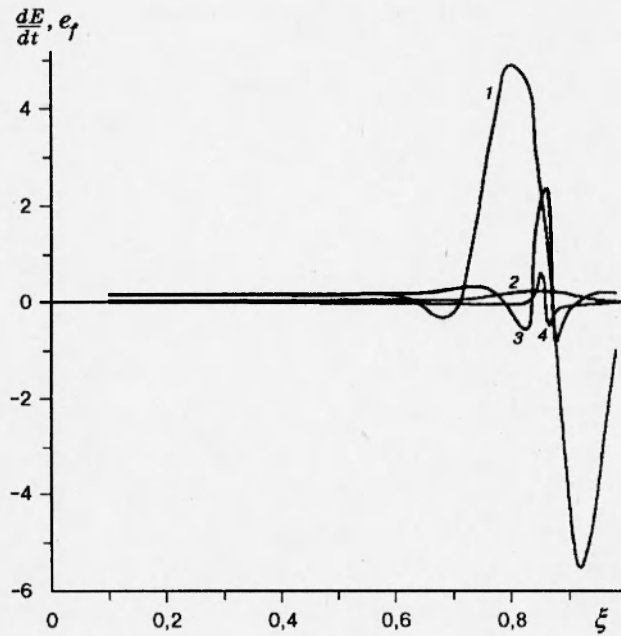


Рис. 7

Подставляя функции (16) в уравнение (13), получаем

$$\frac{dE_1}{dt} = - \int_{\Omega} dy \tau_{f1}(y) U'(y) - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} dy (\nabla \mathbf{v}_{f0}) : (\nabla \delta_{\xi} \mathbf{v}_{f1}) - \tau_{p0}(\xi) U'(\xi) - \frac{1}{S \text{Re}} (\mathbf{v}_{f0}(\xi) - \mathbf{v}_{p0}(\xi))^2. \quad (17)$$

Знак  $dE_1/dt$  определяет, повышается или понижается устойчивость течения при добавлении частиц. Два первых слагаемых в (17) связаны с изменением собственной функции возмущений, вызванным тем, что меняется эффективная плотность среды. Два последних члена описывают работу межфазной силы. Они могут быть определены с помощью (3) при известной функции возмущений для однородной жидкости  $\mathbf{v}_{f0}$ . Объединим слагаемые попарно в соответствии с их смыслом:  $dE_1/dt = e_{\rho}(\xi) + e_f(\xi)$ .

На рис. 7 показаны зависимости  $dE_1/dt(\xi)$  и  $e_f(\xi)$  для мелко- и крупнодисперсной среды. Видно, что для мелкодисперсной среды ( $S = 10^{-6}$ ) основной вклад в  $dE_1/dt$  (кривая 1) дает не  $e_f$  (кривая 2), а  $e_{\rho}$ , т. е. изменение профиля плотности среды в окрестности критического слоя имеет определяющее значение для устойчивости течения. Для крупнодисперсной среды слагаемые  $e_{\rho}$  и  $e_f$  сравнимы по порядку величины (кривые 3 и 4 — соответственно  $dE_1/dt$  и  $e_f$  для  $S = 10^{-2}$ ).

**Заключение.** Расчеты, обзор которых дан в предыдущих разделах, свидетельствуют о том, что свойства устойчивости течения Пуазейля двухфазной среды радикально меняются с добавлением в поток частиц. Эти изменения существенно зависят от того, однородным или неоднородным будет их распределение. Если частицы достаточно крупные, то степень неоднородности их распределения будет существенно меньше влиять на характер развития неустойчивости, нежели это имеет место для мелких частиц. Важно подчеркнуть, что одни и те же частицы в зависимости от условий (формы распределения, концентрации, скорости течения и т. п.) могут и стабилизировать, и дестабилизировать течение. Это позволяет использовать частицы для эффективного управления развитием

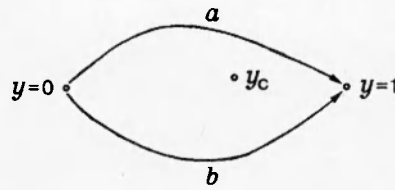


Рис. 8

неустойчивости в течении.

В данной работе изучалось поведение лишь симметричной моды возмущений. Исследования, проведенные при участии авторов, показали, что при определенных условиях и достаточной концентрации частиц в слое дестабилизируется, по крайней мере, еще одна (антисимметричная (5), (8)) мода возмущений. Подробное описание изменения спектра возмущений, однако, выходит за рамки настоящей работы.

Многообразие возможных профилей концентрации дисперсной фазы  $f(y)$  не позволяет провести исчерпывающее исследование влияния произвольного распределения частиц на устойчивость течения. Однако, как уже отмечалось, любое распределение дисперсной фазы можно рассматривать в виде совокупности пылевых слоев. Поэтому качественное представление об устойчивости течений с иными профилями концентрации частиц можно составить, исходя из результатов данной работы. Принципиальным является изменение структуры уравнения для возмущений в случае неоднородного распределения. В уравнении появляется дополнительный член, который в случае однородного распределения частиц отсутствует. Это существенно изменяет сложившиеся критерии устойчивости. Рассмотрим, в частности, невязкий предел уравнения (4). При этом будем считать, что при  $Re \rightarrow \infty$  одновременно  $SRe \rightarrow 0$  (такая ситуация вполне возможна и имеет место, например, в крупномасштабных течениях, поскольку  $Re \sim L$ , а  $S \sim L^{-2}$ ). Тогда из (11) следует уравнение для возмущений:

$$\rho\psi'' + \rho'\psi' - \rho\alpha^2\psi - \frac{(\rho U')}{(U - c)}\psi = 0. \quad (18)$$

Как известно [6], решения уравнения Рэлея, полученные интегрированием вдоль действительной оси, совпадают с предельными для уравнения Орра — Зоммерфельда лишь в случае нарастающих возмущений. Можно показать, не прибегая к сложному анализу, что уравнение (18) обладает теми же свойствами по отношению к «вязкому» уравнению (11). Действительно, решение уравнения Рэлея в комплексной плоскости неоднозначно из-за существования особой точки  $y_c$ , определяемой условием  $U(y_c) = c$ , где  $U$  — аналитическое продолжение функции профиля скорости в комплексную плоскость. Поэтому в комплексной плоскости существует два класса путей, по-разному обходящих особую точку  $y_c$  (эти пути обозначены  $a$  и  $b$  на рис. 8). Решения невязкой задачи вдоль одного пути не совпадают с решениями вдоль другого. «Истинный» путь устанавливается анализом предельного поведения решения уравнения Орра — Зоммерфельда при исчезающей вязкости ( $Re \rightarrow \infty$ ). Такой анализ был сделан в [6] и, в частности, привел к уже названному выводу: путь интегрирования вдоль действительной оси можно использовать лишь для нарастающих возмущений. Но, как легко видеть, критические точки уравнения (18) совпадают с критическими точками уравнения Рэлея. Кроме того, существует непрерывный переход  $\rho(y) \rightarrow 1$ , превращающий (11) в уравнение Орра — Зоммерфельда, а (18) — в уравнение

Рэлея. Так как критическая точка  $y_c$  не меняется, классы путей  $a$  и  $b$  при этом переходят сами в себя. Таким образом, при интегрировании (18) путь нужно выбирать по тем же правилам, что и при интегрировании уравнения Рэлея.

Пусть существует нарастающее решение (18):  $\text{Im } c > 0$ . Умножим это уравнение на функцию  $\psi^*$ , комплексно-сопряженную с  $\psi$ , и вычтем из полученного уравнения комплексно-сопряженное к нему уравнение. В результате имеем

$$\rho(\psi''\psi^* - \psi^{*''}\psi) + \rho'(\psi'\psi^* - \psi^{*'}\psi) = \frac{c - c^*}{|U - c|^2}(\rho U')'|\psi|^2.$$

Очевидно, обе части этого уравнения чисто мнимые. Если ввести действительную величину

$$G = -i/2\rho(\psi'\psi^* - \psi^{*'}\psi),$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dy}G = \frac{\text{Im } c}{|U - c|^2}(\rho U')'|\psi|^2.$$

На границах области выполняется условие  $\psi = 0$ , в результате чего  $G$  обращается в нуль. Отсюда ясно, что величина  $dG/dy$  должна менять знак на интервале между границами течения. Следовательно, где-то на этом интервале выполняется условие  $(\rho U')' = 0$ . Таким образом, приходим к новому условию, необходимому для существования нарастающих возмущений. Это условие является обобщением теоремы Рэлея о точке перегиба для сред с переменным профилем плотности.

Приведенные рассуждения заставляют предположить, что свойства спектра возмущений в течениях гетерогенных сред могут качественно отличаться от таковых в однородных течениях. Изучению свойств этого спектра и, в частности, исследованию поведения иных мод неустойчивости авторы намерены посвятить отдельную работу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech. 1962. V. 13, pt 1. P. 120–128.
2. Рудяк В. Я., Исаков Е. Б. Устойчивость гетерогенных сред. I. Устойчивость плоско-го течения Пуазейля. Новосибирск, 1994. (Препр. / Новосиб. гос. акад. строительства; № 2(4)–94).
3. Рудяк В. Я., Исаков Е. Б. Устойчивость плоского течения Пуазейля разреженных суспензий и газовзвесей // Изв. вузов. Авиационная техника. 1994. № 4. С. 21–24.
4. Исаков Е. Б., Рудяк В. Я. Устойчивость течений разреженных газовзвесей и суспензий в плоском канале // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5.
5. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50, pt 4. P. 689–703.
6. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

Поступила в редакцию 21/II 1995 г.