УДК 539.374

Р. Г. Якупов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ГРУНТЕ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ДЕЙСТВУЕТ ПОДВИЖНАЯ НАГРУЗКА

Задача о воздействии подвижной нагрузки на подземные сооружения связана с исследованием взаимодействия конструкции с окружающей средой и падающей волной, очень сложна, решается численными методами. Но получить достаточно строгие аналитические решения также важно. Они необходимы для проверки точности численных схем и имеют самостоятельное значение.

1. Пусть по поверхности полупространства, заполненного мягким грунтом, движется волна нагрузки длиной l с постоянной скоростью фронта D. Волну принимаем треугольной формы, которая по мере распространения не меняется, функция давления в волне имеет вид (рис. 1)

$$p_{00} = P_0(1 + y)H(Dt_0 - x_0),\ -1 \leqslant y \leqslant 0, \tag{1.1}$$

где $H(Dt_0 - x_0)$— единичная функция; $y = y_0/l$; $y_0 = x_0 - Dt_0$. В полупространстве на глубине H_0 находится круговая тонкостенная пустотелая цилиндрическая оболочка радиусом R_0 и толщиной стенки h. Требуется определить напряжения и деформации оболочки под действием волны нагружения, возникающей в полупространстве в результате действия подвижной нагрузки (1.1).

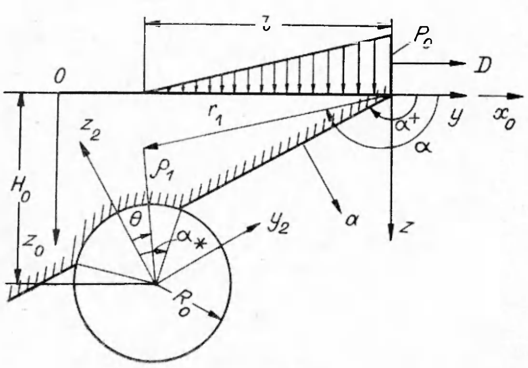

Рис. 1

При определении параметров волны и движения среды используем метод [1], где решена квазистатическая задача о распространении двумерных волн в идеальной неупругой среде. Принимаем, что диаграмма объемной деформации среды при нагружении и разгружении линейна, но различна. На фронте происходит мгновенное нагружение, за фронтом — разгрузка среды.

Рассмотрим случай, когда скорость D больше скорости распространения нагрузочных деформаций в грунте a, меньше скорости деформаций разгрузки ($a \leqslant D \leqslant a_1$). Тогда движение среды происходит в области в виде клина, заключенной между фронтом волны нагружения и границей среды. Давление в грунте в области возмущения в подвижной цилиндрической системе координат r_1, α (см. рис. 1), связанной с фронтом нагрузки, определяется по формуле

$$p(r_1, \alpha) = p_0 \left\{1 + \frac{r_1 \sin(\alpha + \beta + \zeta)}{\sin(\beta + \zeta)} - \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^{\alpha_n} \sin\left[\alpha_n(\alpha - \alpha^+) + \zeta\right]}{\alpha_n[\pi n - (\zeta + \beta)]}\right\},\quad r_1 \leqslant 1, \tag{1.2}$$

$$p(r_1, \alpha) = p_0 \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^{-\beta_n} \sin\left[\beta_n(\alpha - \alpha^+) - \zeta\right]}{\beta_n[\pi n + (\zeta + \beta)]},\quad r_1 > 1.$$

Здесь $p_0 = \frac{P_0}{\rho D^2}$; $r_1 = kr$; $k^2 = 1 - \frac{D^2}{a_1^2}$; $\sin\beta = \frac{a}{D}$; $\operatorname{tg}\zeta = \frac{k}{k_1}$; $k_1 = \operatorname{ctg}\beta$; $a^2 = \frac{K_н}{\rho}$; $a_1^2 = \frac{K_р}{\rho}$; $\alpha_n = \frac{1}{\beta}(\pi n - \zeta)$; $\beta_n = \frac{1}{\beta}(\pi n + \zeta)$; ρ — плотность среды;

α^+ — угловая координата фронта возмущения в среде; $K_н$, $K_р$ — объемные модули упругости нагрузочной и разгрузочной ветвей диаграммы сжатия. Координаты полярной и прямоугольной подвижной систем координат связаны зависимостями $r^2 = z^2 + y_1^2, y_1 = yk^{-1}$, $z = r\sin\alpha$, $y_1 = r\cos\alpha$. В подвижной системе координат параметры волны и движения среды от времени не зависят.

При совпадении скоростей ($D = a$) угол $\beta = \pi/2$,

$$p(r_1, \alpha) = p_0\left\{1 + r_1\left[\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1\right)\cos\alpha + \frac{2}{\pi}(\ln r_1 - 1)\sin\alpha\right] - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^{(2n+1)}\cos[(2n+1)(\alpha - \alpha^+)]}{\pi n(2n+1)}\right\}, \quad r_1 \leqslant 1, \tag{1.3}$$
$$p(r_1, \alpha) = p_0 \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^{-(2n+1)}\cos[(2n+1)(\alpha-\alpha^+)]}{\pi(n+1)(2n+1)}, \quad r_1 > 1.$$

Если считать разгрузку среды жесткой, т. е. происходящей без изменения ранее приобретенной плотности, то давление за фронтом волны нагружения в среде имеет вид

$$p(r_1, \alpha) = p_0\left\{1 + \frac{r_1\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta} + \right. \tag{1.4}$$
$$\left. + \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^n r_1^{\varkappa_n}\sin[\varkappa_n(\alpha - \alpha^+) + \beta]}{\varkappa_n(\pi n - 2\beta)}\right\}, \quad r_1 \leqslant 1,$$
$$p(r_1, \alpha) = p_0\left\{-\frac{\sin\alpha}{2r_1\beta} + \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^n r_1^{-\gamma_n}\sin[\gamma_n(\alpha - \alpha^+) - \beta]}{\gamma_n(\pi n + 2\beta)}\right\}, \quad r_1 > 1,$$

где $\varkappa_n = 1 - \pi n/\beta$; $\gamma_n = 1 + \pi n/\beta$. Возможны также случаи $D > a_1$ или $a_1 = \infty$, $\beta = \pi/2$, которые рассматриваются аналогично.

В начальный момент времени фронт волны нагружения соприкасается с оболочкой в точке $\theta = 0$ (см. рис. 1). С течением времени фронт волны продвигается, увеличивается угол обхвата волной оболочки, который обозначим $\pm\alpha_*(t)$. В пределах угла $-\alpha_* \leqslant \theta \leqslant \alpha_*$ оболочка подвергается действию волновой нагрузки, фронт которой перемещается в окружном направлении. В последующем для описания давления используем полярную систему координат ρ_1, θ, связанную с центром оболочки. Путем параллельного переноса и поворота координатных осей y, z переходим к системе y_2, z_2 и затем к полярной системе ρ_1, θ, причем учитываем изменение масштаба по оси r, которое использовано при выводе формул (1.2)—(1.4). Системы координат r_1, α и ρ_1, θ связаны соотношениями

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\Delta_1/\Delta_2), \; r_1 = \Delta_1\sin\alpha + \Delta_2\cos\alpha. \tag{1.5}$$

Здесь $\Delta_1 = Hk - \rho_1\cos(\theta - \beta)$; $\Delta_2 = \rho_1\sin(\theta-\beta) - \frac{1}{\sin\beta}(H\cos\beta - \rho_1) - t$; $H = H_0/l$; $\rho_1 = \rho_*/l$; $t = Dt_0/l$. Между координатой фронта волновой нагрузки и временем в период обхвата существует зависимость

$$\alpha_*(t) = \arccos\left(1 - \frac{t\sin\beta}{R}\right), \quad t\sin\beta < R, \quad \alpha_*(t) = \pi/2, \; t\sin\beta > R, \; R = R_0/l.$$

Безразмерное время обхвата половины оболочки нагрузкой $t_+ = R/\sin\beta$.

Численный пример. Полупространство заполнено песчаным грунтом плотностью $\rho = 1{,}35 \cdot 10^3$ кг/м^3, диаграмма сжатия которого описывается степенной зависимостью $p = p^0\varepsilon^n$, где $p^0 = 372$ МПа, ε — объемная деформация, показатель степени $n = 3$ [2]. При определении давления (1.2)—(1.4) диаграмму аппроксимируем линейными функциями с объемными модулями упругости $K_н = 11{,}3$ МПа, $K_р = 180$ МПа. Значению $K_н$ соответствует скорость упругой волны в данном грунте $a = 91$ м/с,

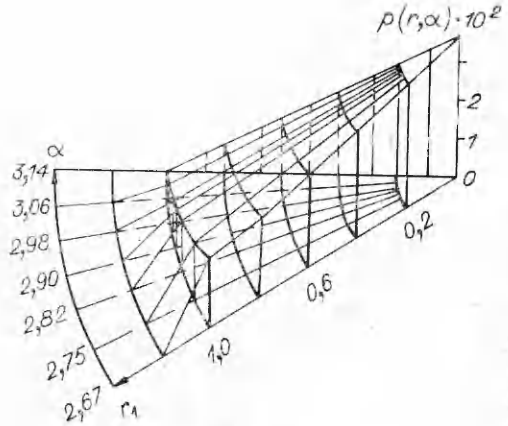

Рис. 2

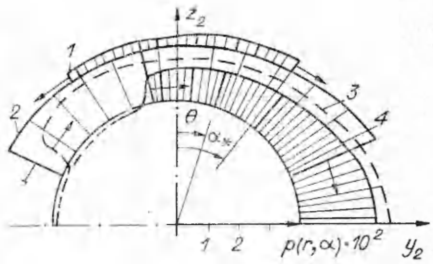

Рис. 3

которая получена экспериментально в [2]. Принимая коэффициент Пуассона грунта $\nu_0 = 0{,}25$, находим параметры Ляме среды $\lambda = \mu = 6{,}75$ МПа. Параметры волны нагрузки: $P_0 = 2$ МПа, $l = 2$ м, $D = 200$ м/с. Оболочка расположена на глубине $H_0 = 1$ м, радиус оболочки $R_0 = 0{,}5$ м, $h = 0{,}01$ м.

На рис. 2 приведена эпюра давления в грунте в зависимости от координат r_1 и α. Как видно, в пределах $0 \leqslant r \leqslant 1$ давление на фронте волны скачкообразно возрастает, затем с увеличением угла α уменьшается и при $\alpha = \pi$ приходит к значению, определяемому формулой (1.1). При $r_1 > 1{,}2$ давление мало, в узкой зоне вблизи $\alpha \sim \alpha^+$ фронта оно положительно, с увеличением α меняет знак и на границе $z = 0$ приходит к нулю. Изменение давления по радиусу в диапазоне $0 \leqslant r \leqslant 1$ близко к линейному.

В случае воздействия давления (1.2)—(1.4) подземные сооружения оказываются нагруженными подвижной нагрузкой. На рис. 3 представлен график давления на круговой цилиндрической поверхности радиуса $\rho_* = 0{,}2275$ м в зависимости от угла θ при $t = 0{,}05$; $0{,}15$; $0{,}30$; $0{,}40$ (линии *1*—*4*). Стрелками показано направление движения фронта нагрузки в данные моменты времени. Как видно, вначале давление в области $-\alpha_* \leqslant \theta \leqslant \alpha_*$ близко к равномерному. С увеличением времени угол обхвата оболочки возрастает, давление становится неравномерным, в момент времени $t_+ = 0{,}25$ α_* достигает значения $\pm\pi/2$.

2. Отражение плоской ударной пластической волны от плоской преграды при нормальном падении и падении под углом рассмотрено в [3, 4]. При определении волновой нагрузки оболочку считаем жесткой, неподвижной, дифракционными явлениями пренебрегаем и применяем принцип изолированного элемента. Тогда, используя результаты [3, 4], выражение локального коэффициента отражения записываем в форме

$$K_0 = K_* \cos\theta, \tag{2.1}$$

где $K_* = 1 + \sqrt{n}$ — коэффициент отражения при нормальном падении фронта волны; θ — угол падения в момент отражения. После отражения давление на оболочку изменяется так, как изменяется давление (1.2)—(1.4) в области $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ в окрестности радиуса R_0.

В случае перемещения оболочки как жесткого цилиндра или деформации окружающая среда оказывает этому перемещению сопротивление. Силу сопротивления среды принимаем пропорциональной радиальному перемещению оболочки и равной $L_* w_0$ (L_* — коэффициент пропорциональности (постели), w_0 — радиальное перемещение оболочки).

Используем безразмерные величины

$$w = w_0/R_0, \quad v = v_0/R_0, \quad p = P/\rho D^2, \quad b^2 = h^2/(12R_0^2),$$

уравнения движения оболочки запишем в виде [5]

$$(2.2)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial\theta}+b^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right)+(1+q_*)w+$$
$$+\beta_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\beta_2 p_*(\theta,t).$$

Здесь $\beta_1=(1-\nu^2)\rho_0 D^2R_0^2/(El^2)$; $\beta_2=(1-\nu^2)\rho D^2R_0K_*/(Eh)$; $q_*=(1-\nu^2)R_0^2L_*/(Eh)$; $p_*(\theta,t)=p(\theta,t)\cos\theta$; $p(\theta,t)$— давление, определяется по формулам (1.2)—(1.5); причем $-\alpha_*(t)\leqslant\theta\leqslant\alpha_*(t)$;$w_0$, v_0 — радиальная и окружная компоненты перемещения оболочки; ρ_0, ν, E — плотность, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала оболочки. Для перемещений принимаем начальные условия

$$w(\theta,t)=\frac{\partial}{\partial t}w(\theta,t)=v(\theta,t)=\frac{\partial}{\partial t}v(\theta,t)=0\quad(t=0).$$

Давление на оболочку несимметрично относительно оси $\theta=0$, и прогибы отыскиваем в виде разложения

$$(2.3)\qquad w=\sum_{m=0}^{\infty}[W_{1m}(t)\cos m\theta+W_{2m}(t)\sin m\theta],$$
$$v=\sum_{m=1}^{\infty}[V_{1m}(t)\sin m\theta+V_{2m}(t)\cos m\theta].$$

Внешнюю нагрузку раскладываем в ряд

$$(2.4)\qquad p_*(\theta,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta),$$

где $a_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\alpha_*(t)}^{+\alpha_*(t)}p(\theta,t)\cos\theta\cos m\theta\,d\theta$ $(m=0,1,2,3,\ldots)$; $b_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\alpha_*(t)}^{+\alpha_*(t)}p(\theta,t)\times$ $(m=1,2,3,\ldots)$

$$\times\cos\theta\sin m\theta\,d\theta.$$

Выражение для коэффициента постели L_* получено в [6] путем совместного решения уравнений движения оболочки и окружающей упругой среды при действии гармонической волны сжатия, имеет сложную структуру, зависит от физических, геометрических параметров среды и оболочки, от формы деформирования. Здесь используем статический вариант этих коэффициентов

$$(2.5)\qquad L_*=L_0=2(\lambda+2\mu)/R_0,\quad L_*=L_m=4\mu(m+1)/(R_0m),$$

которые соответствуют осесимметричному движению и движению оболочки с образованием m диаметральных узловых линий.

Подставляя выражения (2.3)—(2.5) в уравнения движения (2.2) и приравнивая коэффициенты при $\sin m\theta$ и $\cos m\theta$ для каждого m нулю, приходим к системе

$$(2.6)\qquad \beta_1\ddot W_0+\omega_0^2W_0=-\beta_2\frac{a_0}{2},\quad m=0,$$
$$\left.\begin{aligned}&\beta_1\ddot W_{1m}+\omega_m^2W_{1m}=-\beta_2a_m,\quad V_{1m}=-\frac{1}{m}W_{1m}\\&\beta_1\ddot W_{2m}+\omega_m^2W_{2m}=-\beta_2b_m,\quad V_{2m}=\frac{1}{m}W_{2m}\end{aligned}\right\}m\geqslant1,$$

где $\omega_m^2=b^2(m^2-1)^2+q_m$; $\omega_0^2=1+b^2+q_0$; $q_m=(1-\nu^2)R_0^2L_m/(Eh)$; $q_0=(1-\nu^2)R_0^2L_0/(Eh)$; точка обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (2.6) решаем методом вариации произвольных постоянных

$$W_0(t) = -\frac{\beta_2}{2\beta_1\omega_0^*}\int_0^t a_0(\tau)\sin\omega_0^*(t-\tau)\,d\tau, \tag{2.7}$$

$$W_{1m}(t) = -\frac{\beta_2}{\beta_1\omega_m^*}\int_0^t a_m(\alpha_*, \tau)\sin\omega_m^*(t-\tau)\,d\tau,$$

$$W_{2m} = -\frac{\beta_2}{\beta_1\omega_m^*}\int_0^t b_m(\alpha_*, \tau)\sin\omega_m^*(t-\tau)\,d\tau.$$

Здесь $\omega_0^* = \omega_0/\sqrt{\beta_1}$; $\omega_m^* = \omega/\sqrt{\beta}$. Величина W_1 соответствует движению оболочки как жесткого цилиндра.

С помощью решений (2.7) и формулы $M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)R_0^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial\theta}\right)$ находим напряжения в оболочке. После преобразований выражения для безразмерного перемещения и напряжения изгиба приводим к виду

$$w(\theta, t) = W_0(t) - \frac{\Lambda}{h}\sum_{m=2}^{\infty} F_m(\theta, t), \quad \sigma_u(\theta, t) = \tag{2.8}$$

$$= -\frac{\Lambda}{2R_0}\sum_{m=2}^{\infty}(m^2-1)F_m(\theta, t),$$

где $F_m(\theta, t) = \frac{1}{\omega_m^*}\int_0^t\int_{-\alpha_*}^{+\alpha_*} p(x, \tau)\cos x\cos m(x-\theta)\sin\omega_m^*(t-\tau)\,dx\,d\tau$; $\Lambda = l^2\rho K_*/(\pi R_0\rho_0)$. Размерное и безразмерное напряжения связаны соотношением $\sigma_u = \sigma_{u*}(1-\nu^2)/E$.

На рис. 4 представлен график напряжений в оболочке в зависимости от θ в моменты времени $t = 0{,}2$ и $0{,}3$ (сплошная и штриховая линии). Все вычисления произведены с помощью ЭВМ «Электроника-ДЗ-28». При суммировании рядов (1.2) — (1.4) и (2.8) число членов ряда в частичной сумме Σ_n определялось каждый раз из условия $S_{n+1}/\Sigma_n \leqslant 0{,}05$, где S_{n+1} — $(n+1)$-й член ряда. Напряжения по формуле (2.8) определены в фиксированных точках сечения оболочки в зависимости от времени через интервал 0,05. Время, необходимое для расчета в заданной точке, составляет ~ 2 мин. По этим данным построены графики на рис. 4.

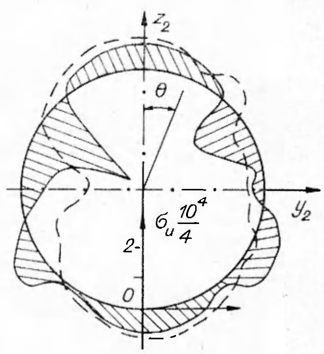

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капустянский С. М.** Распространение и отражение двумерных пластических волн // Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 1.
2. **Рыков Г. В., Скобеев А. М.** Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках.— М.: Наука, 1978.
3. **Зволинский Н. В., Рыков Г. В.** Отражение пластической волны от преграды // ПММ.— 1963.— Т. 27, вып. 1.
4. **Ковшов А. Н., Скобеев А. М.** Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку // Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 1.
5. **Власов В. З.** Общая теория оболочек.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
6. **Якупов Р. Г.** Коэффициент «постели» в задачах взаимодействия цилиндрической оболочки с окружающей упругой средой // Взаимодействие оболочек с жидкостью: Тр. семинара.— Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1981.— Вып. 15.

г. Уфа

Поступила 17/II 1989 г., в окончательном варианте — 20/VI 1990 г.