

УДК 536.24

## Линейный кинетический анализ испарения и конденсации

Ю.Б. Зудин

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,  
Москва*

E-mail: yzudin@gmail.com

На основе модели перемешивания проведен анализ линейных кинетических задач фазового перехода. Показано, что асимметрия испарения и конденсации, имеющая место для случая интенсивных процессов, сохраняется также и в линейном приближении. Получено аналитическое решение для кинетических скачков давления и температуры на поверхности конденсированной фазы, которое хорошо согласуется с результатами классической линейной теории. Основным результатом работы является определенная аналитическим методом зависимость скачка давления при конденсации от температурного фактора. Эта зависимость имеет минимум вблизи границы между аномальным и нормальным режимами конденсации.

**Ключевые слова:** модель перемешивания, кинетические задачи, испарение, конденсация, линейное приближение, скачки давления и температуры, аномальный и нормальный режимы конденсации.

### Введение

Неравновесные процессы испарения и конденсации играют важную роль в ряде фундаментальных и прикладных проблем. Проектирование систем тепловой защиты космических аппаратов включает моделирование разгерметизации защитной оболочки атомной силовой установки. Для этого необходимо рассчитывать параметры интенсивного испарения теплоносителя при его истечении в вакуум [1]. Интенсивность теплопереноса при пленочном кипении сверхтекучего гелия чрезвычайно высока вследствие его исчезающе малого термического сопротивления, поэтому неравновесные эффекты на межфазной границе играют здесь определяющую роль [2]. При контакте горячего пара с холодной жидкостью в паровом объеме возникает импульсная волна разрежения, сопровождающаяся скачком давления и, вследствие этого, интенсивной конденсацией [3].

При расчете неравновесных процессов испарения/конденсации необходимо решать систему уравнений сохранения для газа во внешней (удаленной от межфазной границы) газодинамической области. Течение в этой области определяется тепловой скоростью молекул  $v_\infty = \sqrt{2kT_\infty/m}$  и газодинамической скоростью  $u_\infty$  ( $u_\infty > 0$  — при испарении,  $u_\infty < 0$  — при конденсации). Интенсивность фазовых переходов характеризуется

«скоростным фактором»  $s \equiv u_\infty / v_\infty = u_\infty (2kT_\infty / m)^{-1/2}$ , который связан с числом Маха<sup>1</sup>  $M \equiv u_\infty (5kT_\infty / 3m)^{-1/2}$  соотношением  $s = \sqrt{5/6}M$ . Здесь  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T_\infty$  — температура газа в газодинамической области.

Уравнения сплошной среды становятся неприменимыми в слое Кнудсена, прилегающем к межфазной границе и имеющем толщину порядка длины свободного пробега молекул. Вследствие неравновесности слоя Кнудсена понятия плотности, температуры и давления утрачивают здесь свой феноменологический смысл. Состояние газа в слое Кнудсена определяется взаимодействием разнонаправленных молекулярных потоков: потока, эмитируемого поверхностью конденсированной фазы (КФ), и потока, падающего на нее из газовой области. Молекулярная эмиссия с поверхности КФ полностью определяется ее температурой и не зависит от условий в газодинамической области; спектр падающих на межфазную границу молекул формируется в результате столкновений в удаленных от нее слоях газа. Наложение существенно различающихся по своей структуре молекулярных потоков приводит к разрывному характеру функции распределения (ФР) молекул по скоростям в слое Кнудсена. По мере удаления от поверхности КФ разрыв ФР монотонно сглаживается и исчезает на внешней границе слоя Кнудсена, где спектр молекул приобретает равновесный максвелловский вид.

Для определения условий сопряжения конденсированной и газовой фаз необходимо решать уравнение Больцмана, описывающее поведение ФР в слое Кнудсена [4]. Строгое решение чрезвычайно сложного интегрально-дифференциального уравнения Больцмана получено для специальных случаев с пространственно-однородными распределениями параметров [5]. Для граничных задач, когда газ занимает полупространство или ограничен двумя поверхностями, точное решение уравнения Больцмана, по-видимому, невозможно. Поэтому при кинетическом анализе используются различные приближенные аналоги уравнения Больцмана: релаксационное уравнение Крука [4], модельное уравнение Кейза [6], системы моментных уравнений [7, 8] и др.

Теоретической основой исследования неравновесных процессов испарения/конденсации служит линейный кинетический анализ, описывающий малые отклонения газодинамических параметров от равновесия. Линейная кинетическая теория, основанная на решении линеаризованного уравнения Больцмана, впервые была предложена в работах [7, 8]. Систематизированное изложение результатов [7, 8] представлено в монографии [9]. В качестве аналогов уравнения Больцмана в этих работах использовались как цепочки моментных уравнений, так и релаксационное уравнение Крука. В дальнейшем для решения линейных кинетических задач испарения/конденсации применялись методы теории обобщенных функций [6], а также методы теории функций комплексного переменного [10]. Для последующего изложения важно следующее: в рамках линейного анализа [7–9] процессы испарения и конденсации полагаются симметричными и различаются лишь направлением потока пара.

Математическое описание неравновесных процессов испарения/конденсации существенно упрощается, если не ставить задачу расчета ФР в слое Кнудсена. В этом случае отпадает необходимость задания на поверхности КФ истинных граничных условий, вместо них требуется определить экстраполированные граничные условия для уравнений газодинамики во внешней области. Экстраполяция распределений газодинамических параметров на межфазную границу приводит к появлению на ней кинетических скачков: экстраполированные значения температуры, плотности и давления газа не равны своим истинным граничным значениям.

<sup>1</sup> В настоящей работе рассматривается случай одноатомного газа.

Фазовые переходы со скоростью течения пара, сравнимой со скоростью звука, в зависимости от направления потока пара называют интенсивным испарением (при  $u_\infty > 0$ ) или интенсивной конденсацией (при  $u_\infty < 0$ ). Начало аналитическим исследованиям интенсивного испарения было положено работой [11]. Ее автор аппроксимировал спектр летящих к межфазной границе молекул из правдоподобных физических соображений и исследовал предельный случай интенсивного испарения, когда газодинамическая скорость равна скорости звука (число Маха равно единице). В работах [12, 13] оригинальный метод [11] был распространен на весь диапазон изменения чисел Маха. Авторы [12, 13] получили аналитическое решение задачи интенсивного испарения, обеспечивающее корректный предельный переход к классической линейной теории [8, 9].

Важно подчеркнуть, что в работах [13, 14] показана асимметричность интенсивных процессов испарения и конденсации. При фиксированной температуре КФ для описания испарения в качестве граничного условия в газодинамической области следует задавать один параметр (например, давление), в случае конденсации требуется знать два параметра (например, давление и температуру). При этом в анализе [13, 14] не накладывалось никаких ограничений на число Маха при его стремлении к нулю. Отсюда следует, что асимметрия интенсивных процессов испарения и конденсации должна сохраняться также и в линейном приближении.

Таким образом, мы имеем два принципиально различных способа описания неравновесных фазовых переходов: симметричный линейный [6–9] и асимметричный нелинейный [12–14]. Целью настоящей работы является анализ линейных задач испарения и конденсации с учетом их асимметрии. Для этого используется аналитическая «модель перемешивания», предложенная в работе [15].

### Уравнения сохранения

Предметом кинетического анализа является трехмерная функция распределения молекул по скоростям  $f = f(\mathbf{c})$ , которая изменяется от равновесного максвелловского распределения в эйлеровской области

$$f_\infty = \frac{n_\infty}{\pi^{3/2} v_\infty^3} \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{c} - \mathbf{u}_\infty}{v_\infty}\right)^2\right) \quad (1)$$

до разрывной функции распределения на межфазной границе —  $c_z > 0$ :  $f_w = f_w^+$ ,  $c_z < 0$ :  $f_w = f_w^-$ , здесь  $\mathbf{c}, \mathbf{u}_\infty$  — векторы соответственно молекулярной и газодинамической скоростей.

Рассмотрим стандартный случай: поверхность КФ захватывает весь падающий на нее молекулярный поток; вторичная эмиссия отраженных молекул отсутствует. Тогда спектр эмитируемых молекул будет иметь вид равновесного полумаксвеллиана при температуре поверхности  $T_w$  и давлении насыщения пара при этой температуре  $p_w(T_w)$ :

$$f_w^+ = \frac{n_w}{\pi^{3/2} v_w^3} \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{c}}{v_w}\right)^2\right), \quad (2)$$

здесь  $n_\infty = p_\infty/kT_\infty$ ,  $n_w = p_w/kT_w$  — молекулярная плотность газа соответственно на бесконечности и на поверхности КФ,  $c_z$  — нормальная к поверхности КФ составляющая молекулярной скорости,  $v_w = \sqrt{2kT_w/m}$  — тепловая скорость молекул на поверхности КФ. Примечательно, что традиционно используемое соотношение (2) носит характер правдоподобной физической гипотезы. В работе [16] для определения спектра эмитируемых

поверхностью КФ молекул выполнено численное моделирование испарения в вакуум методом молекулярной динамики. Было показано, что в случае малой плотности пара использование полумаксвеллиана (2) в качестве граничного условия является корректным приближением.

Рассмотрим задачу испарения/конденсации для полупространства покоящегося на бесконечности пара — одноатомного идеального газа. В одномерном случае вектор газодинамической скорости  $\mathbf{u}_\infty$  вырождается в скалярную скорость испарения/конденсации  $u_\infty$ . В стационарных условиях молекулярные потоки массы, импульса и энергии через любую параллельную поверхности КФ плоскость будут равны. Используя граничное условие (1), можно выразить эти потоки через параметры течения на бесконечности и записать законы сохранения молекулярных потоков массы —

$$\int_{\mathbf{c}} mc_z f d\mathbf{c} = \rho_\infty u_\infty, \quad (3)$$

импульса —

$$\int_{\mathbf{c}} mc_z^2 f d\mathbf{c} = \rho_\infty u_\infty^2 + p_\infty, \quad (4)$$

и энергии —

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{mc^2}{2} c_z f d\mathbf{c} = u_\infty \left( \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2} + \frac{5}{2} p_\infty \right), \quad (5)$$

здесь  $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$  — квадрат модуля молекулярной скорости;  $c_x, c_y$  — проекции вектора молекулярной скорости соответственно на оси  $x, y$ , лежащие в параллельной поверхности КФ плоскости;  $c_z$  — нормальная к поверхности КФ компонента молекулярной скорости. Интегрирование в левых частях уравнений (3)–(5) осуществляется по всему трехмерному пространству молекулярных скоростей:  $-\infty < c_x < \infty$ ,  $-\infty < c_y < \infty$ ,  $-\infty < c_z < \infty$ . Для определения на бесконечности связей между параметрами течения, входящими в правые части уравнений (3)–(5), достаточно знать ФР на поверхности КФ. Так как положительная половина этой функции  $f_w^+$  известна из граничного условия (2), то для определения граничных условий остается найти ее отрицательную половину  $f_w^-$ .

Перепишем систему уравнений (3)–(5) в более наглядном виде:

$$J_1^+ - J_1^- = \rho_\infty u_\infty, \quad (6)$$

$$J_2^+ - J_2^- = \rho_\infty u_\infty^2 + p_\infty, \quad (7)$$

$$J_3^+ - J_3^- = \rho_\infty u_\infty^3 / 2 + 5 p_\infty u_\infty / 2, \quad (8)$$

здесь  $J_i^+, J_i^-$  соответственно эмитируемые поверхностью КФ и падающие на нее молекулярные потоки,  $i = 1, 2, 3$ . Как видно из уравнений (6)–(8), небаланс молекулярных потоков массы ( $i = 1$ ), импульса ( $i = 2$ ), и энергии ( $i = 3$ ), на поверхности КФ (левые части уравнений) приводит к появлению в эйлеровской области (правые части уравнений) макроскопических потоков испарения ( $u_\infty > 0$  при  $J_i^+ > J_i^-$ ) или конденсации ( $u_\infty < 0$  при  $J_i^+ < J_i^-$ ). Отбрасывая нелинейные члены в правых частях (6)–(8), получаем:

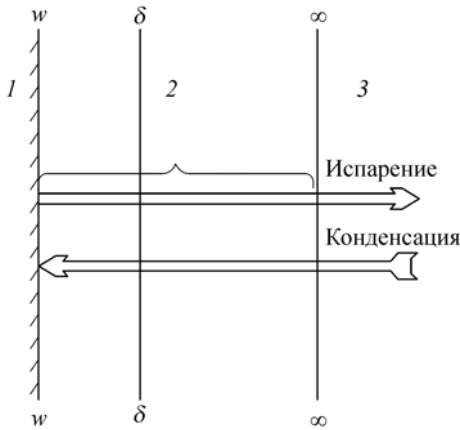


Рис. 1. Схема модели перемешивания.

1 — конденсированная фаза, 2 — слой Кнудсена, 3 — газодинамическая область; "w-w" — поверхность конденсированной фазы, "delta-delta" — поверхность перемешивания, "infinity-infinity" — внешняя граница слоя Кнудсена.

$$J_1^+ - J_1^- = \rho_\infty u_\infty, \quad (9)$$

$$J_2^+ - J_2^- = p_\infty, \quad (10)$$

$$J_3^+ - J_3^- = 5p_\infty u_\infty / 2. \quad (11)$$

Обозначим через "infinity-infinity" внешнюю границу слоя Кнудсена, за которой располагается газодинамическая область, описываемая уравнениями сплошной среды. В соответствие с физической моделью [15] введем между поверхностями "w-w" и "infinity-infinity" промежуточную поверхность "delta-delta" («поверхность перемешивания») с параметрами  $p_\delta, T_\delta, u_\delta$ . Тем самым слой Кнудсена разбивается на две области — внутреннюю и внешнюю (рис. 1). Запишем условие сохранения массового потока между поверхностями "delta-delta" и "infinity-infinity" — «условие перемешивания» [15]:

$$\rho_\delta u_\delta = \rho_\infty u_\infty = \text{const}. \quad (12)$$

На поверхности "delta-delta" спектр летящих к межфазной границе молекул будет описываться ФР, сдвинутой относительно нуля на величину газодинамической скорости  $u_\delta$  :

$$f_\delta^- = \frac{p_\delta}{kT_\delta} \left( \frac{m}{2\pi kT_\delta} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m(\mathbf{c}_\delta - u_\delta)^2}{2kT_\delta} \right), \quad (13)$$

здесь  $\mathbf{c}_\delta$  — вектор молекулярной скорости на поверхности перемешивания.

Использование уравнения состояния идеального газа для поверхностей "w-w", "delta-delta", "infinity-infinity" дает следующую связь между термодинамическими параметрами:

$$\frac{p_w}{p_\infty} = \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \cdot \frac{T_w}{T_\infty}, \quad \frac{p_\delta}{p_\infty} = \frac{\rho_\delta}{\rho_\infty} \cdot \frac{T_\delta}{T_\infty}. \quad (14)$$

Выражения для эмитируемых молекулярных потоков  $J_i^+$  в системе уравнений (9)–(11) рассчитываются известным образом путем подстановки функции  $f = f_w^+$  из граничного условия (2) в подынтегральные выражения левых частей уравнений (3)–(5) [4]:

$$\begin{cases} J_1^+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_w v_w, \\ J_2^+ = \frac{1}{4} \rho_w v_w^2, \\ J_3^+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_w v_w^3. \end{cases} \quad (15)$$

Выражения для летящих из газодинамической области молекулярных потоков  $J_i^-$  могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} J_1^- = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_\delta v_\delta I_1, \\ J_2^- = -\frac{1}{4} \rho_\delta v_\delta^2 I_2, \\ J_3^- = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_\delta v_\delta^3 I_3. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $I_i$  — соответствующие безразмерные потоки, определяемые в результате интегрирования отрицательного полумахвеллиана (13) по трехмерному полю молекулярных скоростей,  $i = 1, 2, 3$ . Функции  $I_i(s_\delta)$  в общем виде выписаны в работе [15]; здесь  $s_\delta \equiv u_\delta/v_\delta$  — скоростной фактор,  $v_\delta \equiv \sqrt{2kT_\delta/m}$  — тепловая скорость молекул (все величины относятся к поверхности перемешивания). Конкретные выражения для  $I_i$  в интересующем нас линеаризованном виде будут приведены ниже. В отсутствие фазового перехода ( $s_\delta = s = 0$ ) справедлива нормировка:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1. \quad (17)$$

С учетом (14)–(16) система уравнений (9)–(11) может быть представлена в виде:

$$\frac{p_w}{p_\infty} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} - \frac{p_\delta}{p_\infty} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_\delta}} I_1 = 2\sqrt{\pi} s, \quad (18)$$

$$\frac{p_w}{p_\infty} + \frac{p_\delta}{p_\infty} I_2 = 2, \quad (19)$$

$$\frac{p_w}{p_\infty} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} - \frac{p_\delta}{p_\infty} \sqrt{\frac{T_\delta}{T_\infty}} I_3 = \frac{5\sqrt{\pi}}{2} s. \quad (20)$$

### Равновесные условия совместности

Рассмотрим случай фазового равновесия, когда фазовый переход отсутствует ( $s = 0$ ). Тогда из системы уравнений (18)–(20) с учетом условия (17) следует:

$$p_w^0/p_\delta^0 = \sqrt{T_w^0/T_\delta^0}, \quad p_w^0/p_\infty^0 + p_\delta^0/p_\infty^0 = 2, \quad p_w^0/p_\delta^0 = \sqrt{T_\delta^0/T_w^0}.$$

Отсюда вытекают равновесные условия совместности конденсированной и газовой фаз: условие изобаричности для давлений —

$$p_w^0 = p_\delta^0 = p_\infty^0, \quad (21)$$

и условие изотермичности для температур —

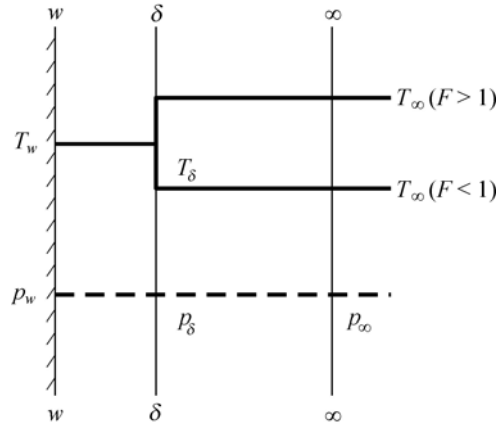
$$T_w^0 = T_\delta^0, \quad (22)$$

здесь верхний индекс «0» обозначает условия равновесия. Условие изобаричности слоя Кнудсена (21) является физически очевидным: при термодинамическом равновесии внутри газовой области не может существовать стационарный скачок давлений. В то же время условие изотермичности (22) оказывается справедливым не для всего слоя Кнудсена, а лишь для его внутренней области, находящейся между поверхностями "w – w" и "δ – δ".

Рис. 2. Распределение температур и давлений в слое Кнудсена в равновесных условиях в задаче конденсации.

Отсюда следует, что в равновесных условиях поле температур на поверхности перемешивания в общем случае претерпевает разрыв. Этот разрыв можно характеризовать отличным от единицы «температурным фактором» (рис. 2)  $F \equiv T_\infty^0 / T_w^0 \neq 1$ .

Подчеркнем, что разрыв поля температур происходит в глубине слоя Кнудсена, на который не распространяется область действия макроскопических закономерностей. Действительно, для сплошной среды условие (22) не может быть выполнено: в силу закона Фурье разрыв одномерного распределения температур будет сглаживаться за счет нестационарной тепловой диффузии [17]. Итак, в рамках модели перемешивания состояние газа на поверхности " $\delta - \delta$ " будет иметь смешанный характер. С одной стороны, здесь справедливы макроскопические понятия — массовый поток (12) и уравнение состояния идеального газа (14). С другой стороны, на поверхности перемешивания не выполняется градиентный закон Фурье и тем самым допускается разрыв поля температур. Такое сочетание макроскопических и микроскопических свойств позволяет задавать температурный фактор  $F$  в качестве граничного условия не только при фазовом равновесии ( $s = 0$ ), но также и при наличии фазового перехода ( $s \neq 0$ ).



### Линейный кинетический анализ

Проведем линеаризацию системы уравнений (18)–(20) по малому параметру  $|s| \ll 1$ . Как известно из работ [7, 8], при анализе линейных процессов испарения/конденсации базовые значения параметров, от которых отсчитываются кинетические скачки, могут быть выбраны произвольно. Для определенности будем исходить из фиксированных значений давления и температуры на внешней границе слоя Кнудсена:  $p_\infty \equiv p_\infty^0 = \text{const}$ ,  $T_\infty \equiv T_\infty^0 = \text{const}$ . С учетом этого выражение для температурного фактора может быть записано в виде:

$$F \equiv T_\infty / T_w^0. \quad (23)$$

Функции  $I_i$  в правых частях (16) представляют собой безразмерные летящие к поверхности КФ молекулярные потоки [12, 13]. Их линеаризация по параметру  $|s_\delta|$  приводит к следующим выражениям:

$$\begin{cases} I_1 = 1 - \sqrt{\pi} s_\delta, \\ I_2 = 1 - 4/\sqrt{\pi} s_\delta, \\ I_3 = 1 - 5\sqrt{\pi}/4 s_\delta. \end{cases}$$

Используя условие перемешивания (12), уравнения состояния (14) и равновесные условия совместности (21), (22), получаем:  $\frac{|s_\delta|}{|s|} = \frac{s_\delta}{s} \equiv \frac{u_\delta / v_\delta}{u_\infty / v_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\rho_\delta} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_\delta}} = \frac{p_\infty}{p_\delta} \sqrt{\frac{T_\delta}{T_\infty}}$ .

Так как величины  $|s_\delta| \ll 1$ ,  $|s| \ll 1$  пропорциональны линейным отклонениям параметров от равновесия, то в последней формуле цепочки достаточно положить  $p_\delta \cong p_\delta^0$ ,  $T_\delta \cong T_\delta^0$ . В свою очередь, из (21) имеем:  $p_\delta^0 = p_\infty^0 \equiv p_\infty$ . В результате получаем следующую связь значений скоростного фактора на поверхностях " $\delta - \delta$ " и " $\infty - \infty$ ":  $s_\delta/s = \sqrt{T_w^0/T_\infty^0} \equiv 1/G$ , где  $G \equiv \sqrt{F} = \sqrt{T_\infty/T_w}$ .

Представим значения давлений  $p_\delta, p_w$  и температур  $T_\delta, T_w$  в линеаризованном виде:

$$p_\delta = p_\infty(1 + \eta_\delta s), p_w = p_\infty(1 + \eta_w s), T_\delta = T_\infty F^{-1}(1 + \tau_\delta s), T_w = T_\infty F^{-1}(1 + \tau_w s).$$

Система уравнений (18)–(20) после линеаризации запишется в следующем виде:

$$\eta_w - \eta_\delta + 1/2(\tau_\delta - \tau_w) = \sqrt{\pi} G^{-1}, \quad (24)$$

$$\eta_w + \eta_\delta = 4/\sqrt{\pi} G^{-1}, \quad (25)$$

$$\eta_w - \eta_\delta + 1/2(\tau_w - \tau_\delta) = 5\sqrt{\pi}/2G - 5\sqrt{\pi}/4G^{-1}. \quad (26)$$

Из (24)–(26) следуют соотношения для коэффициентов кинетических скачков на поверхностях " $w - w$ ", " $\delta - \delta$ ":

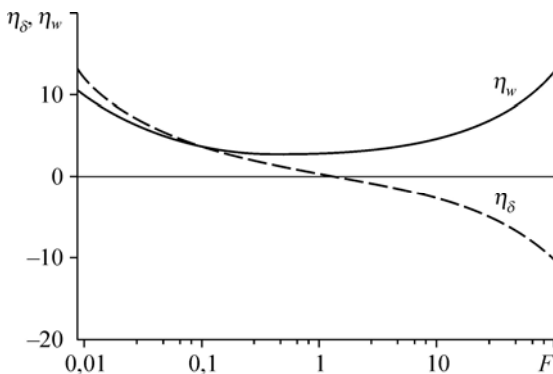
$$\eta_w = 5\sqrt{\pi}/8G + (2/\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi}/16)G^{-1}, \quad (27)$$

$$\eta_\delta = -5\sqrt{\pi}/8G + (2/\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}/16)G^{-1}, \quad (28)$$

$$\tau_w - \tau_\delta = 5\sqrt{\pi}/2G - 9\sqrt{\pi}/4G^{-1}. \quad (29)$$

В прикладном плане представляют интерес коэффициенты скачков давления и температуры на поверхности КФ ( $\eta_w, \tau_w$ ) и соответствующие величины на поверхности перемешивания ( $\eta_\delta, \tau_\delta$ ), являющиеся внутренними модельными параметрами<sup>2</sup>.

Система из трех уравнений (27)–(29) содержат четыре неизвестных:  $\eta_w, \eta_\delta, \tau_w, \tau_\delta$ . Первые два определяются соотношениями (27), (28). На рис. 3 приведена зависимость коэффициента скачка давления от температурного фактора. Функция  $\eta_w(F)$  имеет мини-



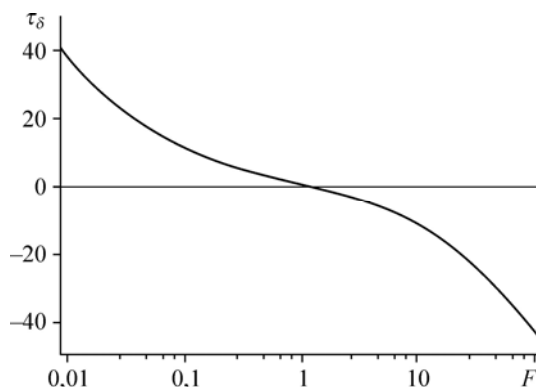
мум с координатами  $F_{\min} = 0,9186$ ;  $\eta_{w\min} = 2,123$ . Соответствующая зависимость на поверхности перемешивания  $\eta_\delta(F)$  является знакопеременной (рис. 3): она положительна

Рис. 3. Зависимость коэффициентов скачков давления на поверхности КФ и на поверхности перемешивания от температурного фактора в задаче конденсации.

<sup>2</sup> Ниже понятия «скачки» будут использоваться только по отношению к искомым скачкам на поверхности конденсированной фазы.



Рис. 4. Зависимость коэффициента скачка температуры на поверхности перемешивания от температурного фактора в задаче конденсации.



при малых и отрицательна при больших значениях температурного фактора и проходит через ноль при  $F = 1,119$ .

Важно отметить, что формулы (27), (28) для скачков давления являются *симметричными*: они формально применимы как к испарению ( $s > 0$ ), так и к конденсации ( $s < 0$ ). На следующем

этапе — этапе определения коэффициентов скачков температуры — проявляется *асимметрия* процессов испарения и конденсации.

В задаче конденсации значения температур в сечениях " $w-w$ " и " $\infty-\infty$ " жестко связаны между собой температурным фактором (23). Тогда при  $T_\infty = \text{const}$  будем иметь также  $T_w = T_w^0 = \text{const}$ , и равенство (23) переписывается в виде  $F = T_\infty/T_w = \text{const}$ . Отсюда следует, что на поверхности КС отсутствует линейный скачок температуры:  $\tau_w = 0$ . В свою очередь, коэффициент скачка температуры на поверхности перемешивания описывается соотношением

$$\tau_\delta = -5\sqrt{\pi}/2 G + 9\sqrt{\pi}/4 G^{-1}. \quad (30)$$

Как видно из рис. 4, зависимость  $\tau_\delta(F)$  аналогична зависимости  $\eta_\delta(F)$  (штриховая линия на рис. 3): она положительна при малых и отрицательна при больших значениях температурного фактора и проходит через ноль при  $F = 0,9$ .

Как известно [15, 18], задача конденсации фактически разбивается на две отдельные задачи: а) «аномальная» конденсация холодного пара на горячей поверхности (область  $F < 1$ ); б) «нормальная» конденсация горячего пара на холодной поверхности (область  $F > 1$ ). Интересно отметить, что границы аномальной и нормальной областей ( $F = 1$ ) практически совпадают с координатой минимума зависимости  $\eta_w(F)$ , рассчитанной по соотношению (27) (сплошная линия на рис. 3).

Итак, постановка линейной задачи конденсации является *асимметричной*:

– значения температуры в сечениях " $w-w$ " и " $\infty-\infty$ " жестко связаны между собой температурным фактором (23), который может принимать любые значения в интервале  $0 < F < \infty$ ;

– из условия  $F = \text{const}$  следует условие  $\tau_w \equiv 0$ ;

– искомым является скачок давления, который зависит от  $F$  и в случае равновесия обращается в ноль:  $\eta_w \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ ;

– при фазовом равновесии внутри слоя Кнудсена соблюдается условие изобаричности, но не соблюдается условие изотермичности (*свойство асимметрии*).

В противоположность этому, задача испарения ставится как симметричная:

– искомыми являются скачки давления и температуры, причем  $\eta_w \rightarrow 0$ ,  $\tau_w \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$ ;

– задание температурного фактора  $F$  в качестве параметра исключено постановкой задачи;

– величины  $\eta_w$ ,  $\tau_w$  не зависят от температурного фактора, поэтому его следует положить тождественно равным единице:  $F \equiv 1$ ;

– при фазовом равновесии внутри слоя Кнудсена соблюдаются как условие изобаричности, так и условие изотермичности (*свойство симметрии*).

В отличие от задачи конденсации, задача испарения является незамкнутой. Поэтому для определения четвертого неизвестного — скачка температуры — к системе уравнений (27)–(29) необходимо добавить еще одно условие. В рамках развиваемой модели найти такое физически обоснованное замыкающее соотношение не удастся, поэтому приходится ограничиться полуэмпирическими соображениями, вытекающими из структуры уравнения (29). Для задачи конденсации по определению имеем условие:  $\tau_w = 0$ ; соответственно для задачи испарения в качестве правдоподобной гипотезы принимаем альтернативное условие:  $\tau_\delta = 0$ . Тогда, полагая в (27)–(29)  $G = F = 1$ , получаем следующие соотношения для коэффициентов скачков давления и температуры:

$$\eta_w = 2,125; \tau_w = 0,4431. \quad (31)$$

Коэффициент скачка давления на поверхности перемешивания будет равен:  $\eta_\delta = 0,1314$ .

В основополагающей работе [8] приведены результаты расчета кинетических скачков для линейной задачи испарения. Всего было использовано двенадцать возможных вариантов решения: пять — на основе цепочки моментных уравнений и семь — на основе релаксационного уравнения Крука. В качестве «наилучшего» варианта решения [8] автор [19] рекомендует соотношения:

$$\eta_w = 2,13; \tau_w = 0,454. \quad (32)$$

Соотношения (32) приводятся также в более поздней монографии [9] (стр. 287, формулы (11), (12)). Как следует из сопоставления выражений (31), (32), их максимальное относительное отклонение составляет 2,4 %.

Приведем теперь полученные выше решения для кинетических скачков в развернутом виде. Для задачи испарения имеем:

$$u_\infty > 0, \quad \frac{p_w - p_\infty}{p_\infty} = 2,125 \frac{u_\infty}{v_\infty}, \quad \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} = 0,4431 \frac{u_\infty}{v_\infty}. \quad (33)$$

Из (33) следует:  $p_w > p_\infty, T_w > T_\infty$ , т.е. давление и температура истекающего с поверхности КФ пара больше, чем давление и температура пара в газодинамической области. Для задачи конденсации имеем:

$$u_\infty < 0, \quad \frac{p_w - p_\infty}{p_\infty} = \left( 1,108 \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} + 1,018 \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \right) \frac{u_\infty}{v_\infty}. \quad (34)$$

Согласно (34),  $p_w < p_\infty$ , т.е. адсорбируемый межфазной границей пар всегда имеет давление меньше, чем текущий из газодинамической области поток пара. При этом температура пара на бесконечности может быть как выше температуры поверхности КФ ( $T_\infty > T_w$ , нормальная конденсация), так и ниже ее ( $T_\infty < T_w$ , аномальная конденсация).

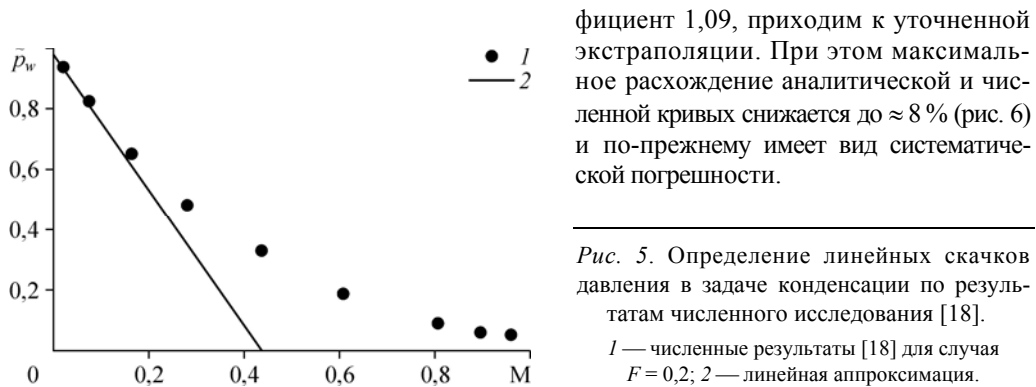
При равенстве температур  $T_w \approx T_\infty$  разность давлений  $p_w - p_\infty$  достигает минимума.

Основным результатом настоящей работы является соотношение (34), описывающее зависимость скачка давления от температурного фактора в задаче конденсации. Насколько известно автору, на сегодняшний день отсутствует строгое решение линейной задачи конденсации, аналогичное решению задачи испарения [8, 9]. Поэтому валидация решения (34) проводилась путем его сопоставления с результатами численного

решения задачи интенсивной конденсации [18]. В этой работе были рассчитаны отношения давлений  $\bar{p}_w \equiv p_w/p_\infty$  для шести значений температурного фактора:  $F = 0,1, 0,2, 0,5, 1, 4, 10$ . Каждый из этих режимов содержал от 7 до 9 расчетных точек в интервале  $0 < |M| < 1$ .

На рис. 5 приведена зависимость  $\bar{p}_w(|M|)$ , полученная численно для случая  $F = 0,2$  ([18], Fig. 11b). Определение линейных скачков давления по результатам численного исследования [18] проводилось следующим образом. В качестве базовой принималась начальная точка с координатами  $\bar{p}_w|_{M=0} = 1$ , соответствующая равновесному состоянию  $s = 0$ . К ней добавлялись следующие две ближайшие точки с наименьшими значениями  $|M|$ . Через эти три точки проводилась прямая вида  $\bar{p}_w = 1 - \alpha|M|$ . Выражая число Маха  $M \equiv u_\infty (5kT_\infty/3m)^{-1/2}$  через скоростной фактор  $s \equiv u_\infty (2kT_\infty/m)^{-1/2}$ , получим  $|M| = \sqrt{6/5}|s|$ . Из линеаризованного соотношения для безразмерного давления на поверхности КФ имеем:  $\bar{p}_w = 1 + \eta_w s = 1 - \eta_w |s|$ . Сравнив два последних выражения для  $\bar{p}_w$ , получим значение коэффициента линейного скачка давления, экстраполированное на  $|M| = 0$ :  $\eta_w = \sqrt{6/5} \alpha$ . Для выбранного режима  $F = 0,2$  (рис. 5) будем иметь  $\eta_w = 2,77$ . Отметим, что для режимов  $F = 1$  и  $10$  работы [18], вторая от нуля расчетная точка получена при  $|M| > 0,1$ . При этом погрешность линейной экстраполяции по трем точкам становится недопустимо большой. Поэтому для указанных двух режимов проводилась простая линейная экстраполяция по двум точкам — базовой начальной и первой расчетной.

Аналитическая зависимость  $\eta_w(F)$  качественно согласуется с численными результатами (всего 6 точек), в том числе воспроизводит минимум при  $F \approx 1$  (рис. 6). Однако количественное согласование существенно хуже: максимальное относительное отклонение составляет  $\approx 16\%$ . Как видно из рис. 6, при такой «простой» экстраполяции расхождение аналитических и численных результатов носит характер систематической погрешности. Для «уточненной» экстраполяции используем следующее свойство модели перемешивания: при  $F = 1$  значения коэффициентов скачка давлений  $\eta_w$  для задач испарения и конденсации совпадают и равны  $2,125$  (см. первую формулу (31)). Отметим, что это значение практически совпадает с результатом строгой линейной теории испарения [8, 9]:  $\eta_w = 2,13$  (см. первую формулу (32)). Принимаем значение  $\eta_w|_{F=1} = 2,125$  в качестве точного решения линейной задачи конденсации. Сравнивая его с экстраполированным значением  $\eta_w = 1,95$  ([18], Fig. 11d), оцениваем относительную систематическую погрешность простой экстраполяции как  $\approx 9\%$ . Умножая все экстраполированные значения  $\eta_w$  на коэф-



фициент 1,09, приходим к уточненной экстраполяции. При этом максимальное расхождение аналитической и численной кривых снижается до  $\approx 8\%$  (рис. 6) и по-прежнему имеет вид систематической погрешности.

Рис. 5. Определение линейных скачков давления в задаче конденсации по результатам численного исследования [18].

1 — численные результаты [18] для случая  $F = 0,2$ ; 2 — линейная аппроксимация.

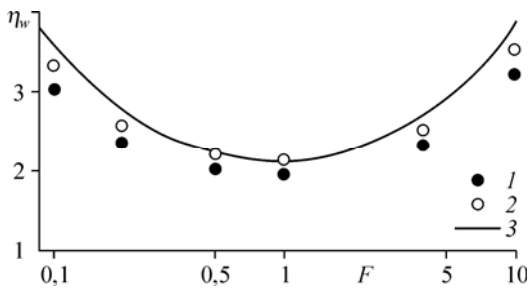


Рис. 6. Зависимость коэффициента скачка давления от температурного фактора в задаче конденсации.

Результаты численного исследования [18]:  
1 — простая экстраполяция, 2 — уточненная экстраполяция, 3 — расчет по формуле (27) настоящей работы.

Приведем теперь краткое описание использованного выше алгоритма

в рамках модели перемешивания [15].

1. На поверхности перемешивания внутри слоя Кнудсена определяется функция распределения летящих к межфазной границе молекул, имеющая вид полумаксвеллиана, смещенного за счет потока испарения/конденсации.

2. Система уравнений сохранения молекулярных потоков массы (3), импульса (4) и энергии (5), дополненная условием перемешивания (12), после линеаризации преобразуется в систему уравнений (27)–(29).

3. Коэффициенты скачков давления определяются уравнениями (27), (28). Для определения коэффициентов скачков температуры привлекается дополнительное уравнению (29) условие.

4. Приравнивая к нулю коэффициент скачка температуры на поверхности конденсированной фазы (по определению), ставим задачу конденсации. При этом температурный фактор задается в качестве граничного условия.

5. Приравнивая к нулю коэффициент скачка температуры на поверхности перемешивания (согласно принятой гипотезе), ставим задачу испарения. При этом температурный фактор тождественно равен единице.

Итак, в рамках модели перемешивания [15] удастся получить непротиворечивое описание линейных процессов испарения/конденсации с учетом их *асимметрии*. Модификация представленной модели может быть выполнена с помощью построения ФР летящих к поверхности КФ молекулярных потоков в фиксированных сечениях внутри слоя Кнудсена. Таким образом, можно последовательно выстраивать поверхности перемешивания с определенным шагом вплоть до достижения межфазной границы. Данная процедура позволит не только рассчитывать интегральные характеристики (такие, как кинетические скачки параметров), но и получать определенную информацию о поведении ФР в слое Кнудсена.

Отметим, что в работе [20] было проведено аналитическое исследование задачи интенсивного испарения в рамках модели перемешивания.

### Заключение

На основе предложенной ранее «модели перемешивания» проведен анализ линейных кинетических задач испарения и конденсации. В рамках модели внутри слоя Кнудсена вводится «поверхность перемешивания», состояние газа на которой носит смешанный характер. С одной стороны, здесь используются макроскопические понятия: массовый поток и уравнение состояния идеального газа. С другой стороны, на поверхности перемешивания допускается разрыв стационарного поля температур. На основе такого сочетания макроскопических и микроскопических свойств газа в слое Кнудсена получены итоговые соотношения, позволяющие описывать как процесс испарения (задается одно граничное условие), так и процесс конденсации (задаются два граничных условия). Тем самым в линейной асимптотике доказано свойство *асимметрии* испарения/конденсации. Получены выражения для скачков давления и температуры для задачи

испарения, которые практически совпадают с результатами классической линейной теории. Основным результатом настоящей работы является аналитическая зависимость скачка давления от температурного фактора в задаче конденсации. Показано, что эта зависимость имеет минимум вблизи границы между аномальным и нормальным режимами конденсации. Намечено направление дальнейшего развития предложенной аналитической модели.

### Обозначения

$c$ — молекулярная скорость, $i = 1, 2, 3$ ,	$M$ — число Маха,
$I_i$ — безразмерный молекулярный поток,	$m$ — масса молекулы,
$j$ — массовый поток,	$p$ — давление,
$J_i$ — молекулярный поток,	$T$ — температура,
$f$ — функция распределения молекул по скоростям,	$u$ — газодинамическая скорость,
$F$ — температурный фактор,	$v$ — тепловая скорость молекул,
$k$ — постоянная Больцмана,	$s$ — скоростной фактор.

### Греческие символы

$\beta$ — коэффициент конденсации,	$\rho$ — плотность,
$\eta$ — безразмерный линейный скачок давления,	$\tau$ — безразмерный линейный скачок температуры.

### Верхние индексы

«+» — молекулярный поток, эмитируемый с межфазной поверхности,	«-» — молекулярный поток, падающий на межфазную поверхность,
	«0» — равновесное состояние.

### Нижние индексы

$w$ — поверхность конденсированной фазы,	1 — поток массы,
$\delta$ — поверхность перемешивания,	2 — поток импульса,
$\infty$ — бесконечность,	3 — поток энергии.

### Сокращения

КФ — конденсированная фаза, ФР — функция распределения.

### Список литературы

1. Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М. Испарение с поверхности и истечение пара через плоский канал в вакуум // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 1. С. 150–158
2. Крюков А.П., Ястребов А.К. Анализ процессов переноса в паровой пленке при взаимодействии сильно нагретого тела с холодной жидкостью // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41, № 5. С. 771–778.
3. Lezhnin S.I., Kachulin D.I. The various factors influence on the shape of the pressure pulse at the liquid-vapor contact // J. of Engng Thermophysics. 2013. Vol. 22, No. 1. P. 69–76.
4. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
5. Бобылев А.В. Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987. 253 с.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
7. Лабунцов Д.А. Анализ процессов испарения и конденсации // Теплофизика высоких температур. 1967. Т. 5, № 4. С. 647–654.
8. Муратова Т.М., Лабунцов Д.А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // Теплофизика высоких температур. 1969. Т. 7, № 5. С. 959–967.
9. Лабунцов Д.А. Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 388 с.
10. Siewert C.E. Heat transfer and evaporation/condensation problems based on the linearized Boltzmann equation // Eur. J. Mech. B / Fluids. 2003. Vol. 22. P. 391–408.
11. Анисимов С.И. Об испарении металла, поглощающего лазерное излучение // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1968. Т. 54, № 1. С. 339–342.

12. Лабунцов Д.А., Крюков А.П. Процессы интенсивного испарения // Теплоэнергетика. 1977. № 4. С. 8–11.
13. Labuntsov D.A., Kryukov A.P. Analysis of intensive evaporation and condensation // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1979. Vol. 2, No. 7. P. 989–1002.
14. Yano T. Half-space problem for gas flows with evaporation or condensation on a planar interface with a general boundary condition // Fluid Dyn. Res. 2008. Vol. 40, No. 7–8. P. 474–484.
15. Зудин Ю.Б. Приближенный кинетический анализ интенсивной конденсации // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 1. С. 73–85.
16. Жаховский В.В., Анисимов С.И. Численное моделирование испарения жидкости методом молекулярной динамики // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1997. Т. 111, № 4. С. 1328–1346.
17. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
18. Gusarov A.V., Smurov I. Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: numerical analysis of the Knudsen layer // Physics of Fluids. 2002. Vol. 14. P. 4242–4255.
19. Лабунцов Д.А. Неравновесные эффекты при испарении и конденсации // Парожидкостные потоки. Минск, 1977. С. 6–33.
20. Зудин Ю.Б. Приближенный кинетический анализ интенсивного испарения // Инж.-физ. журн. 2015. Т. 88, № 4. С. 980–986.

*Статья поступила в редакцию 25 февраля 2015 г.,  
после доработки — 14 мая 2015 г.*