Для оценки предлагаемого метода пересчета данных релаксации напряжений на ползучесть была предпринята экспериментальная проверка и прежде всего — в части определения коэффициента ползучести при помощи (11) для шести марок сталей различного состава при различных температурах, при этом сравнивались расчетные значения n^* с экспериментальными n_0

Марка стали	$T°$	n_0	n_*
Ст. 40	400	8.1	8.6
Ст. 35ХМ	450	2.8	3.6
Ст. 50ХФА	450	9.0	12.0
Ст. 30ХМ	500	5.8	6.5
Р-2	525	1.8	2.5
ЭИ612	650	6.0	5.7

Из этих данных вытекает приемлемая корреляция между n_* и n_0, тем более, что нередко погрешность в определении истинного коэффициента ползучести из графиков сопротивляемости ползучести составляет $\sim$ 15—20%.

В качестве исходных данных для пересчета на характеристики ползучести были использованы результаты по релаксации напряжений сплава ЭИ612 длительностью 2000 час. при 650° С и трех значениях начального напряжения (фиг. 2, где *1* — $\sigma_0 = 25$ *кГ / мм*², *2* — $\sigma_0 = 20$ *кГ / мм*², *3* — $\sigma_0 = 15$ *кГ / мм*², причем при расчете использовались результаты стандартной экстраполяции на 5000 час. На основании этих данных были построены первичные кривые ползучести для трех уровней напряжений, при этом, как следует из рассмотрения фиг. 3 (где *а* — $\sigma = 20$ *кГ / мм*², *б* — $\sigma = 16$ *кГ / мм*², *в* — $\sigma = 14$ *кГ / мм*²; *1* — расчетная кривая), эти кривые располагаются в полосе разброса экспериментальных результатов при ползучести.

Автор благодарит Л. Я. Либермана, под руководством которого была выполнена экспериментальная часть работы.

Поступила 5 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 4.
2. Работнов Ю. Н., Некоторые вопросы теории ползучести, Вестн. Моск. ун-та, 1948, № 10, стр. 81—91.

ЗАКРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Рассматривая схему выпучивания, предложенную Погореловым [1] для тонкостенных выпуклых оболочек, можно заметить, что при переходе от зеркального выпучивания к истинному в окрестности границы выпучивания имеет место ярко выраженный краевой эффект. Поэтому энергию деформации в указанной окрестности можно вычислить, исходя из теории краевого эффекта. Такой путь наиболее быстро приводит к цели. Он оказывается особенно удобным в применении к пологим оболочкам, ибо позволяет оценить влияние граничных условий на величину энергии выпучивания, а вместе с ней, и на величину нижней критической нагрузки.

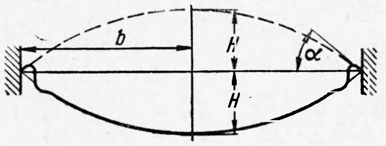
Ниже это будет показано на примере тонкостенного пологого сферического сегмента, жестко заделанного по краю и нагруженного с выпуклой стороны равномерным нормальным давлением. Кроме того, будет предложен приближенный способ определения верхней критической нагрузки.

1. Энергия упругой деформации при выпучивании. Процесс выпучивания пологого (в смысле определения — [1], стр. 73) сферического сегмента под действием не возрастающей нагрузки обязательно остановится, достигнув края. Для тонкостенного сегмента с жестко заделанным краем форма окончательного выпучивания оказывается весьма близкой к зеркальному отражению сегмента относительно плоскости края. Заметное отличие наблюдается обычно лишь у самой заделки. В связи с этим естественно предположить, что истинная форма выпучивания пологого сегмента может быть получена из зеркальной путем некоторой краевой деформации (фиг. 1).

Для вычисления энергии такой деформации воспользуемся теорией краевого эффекта. В соответствии с этой теорией, уравнения сильного изгиба пологого сферического сегмента ([2], стр. 128) принимают вид

$$D\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{\Psi}{R}\left(1-\frac{R}{r}\vartheta\right)=0,\qquad \frac{1}{Eh}\frac{d^2\Psi}{dr^2}-\frac{\vartheta}{R}\left(1-\frac{R}{2r}\vartheta\right)=0 \tag{1.1}$$

Здесь ϑ — угол поворота касательной к меридиану, Ψ — силовая функция, R — радиус сферической поверхности, образующей сегмент, r — расстояние точки недеформированной срединной поверхности сегмента от оси вращения, D — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки.



Фиг. 1

Переходя в (1.1) к безразмерным величинам

$$\eta=\frac{\vartheta}{\alpha},\qquad \psi=\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\Psi}{Eh^2\alpha}$$

$$\xi=k_0\left(1-\frac{r}{b}\right)$$

$$k_0=\frac{b\,(3\,(1-\nu^2))^{1/4}}{\sqrt{Rh}}\approx(12\,(1-\nu^2))^{1/4}\,(H\,/\,h)^{1/2}$$

и пренебрегая изменяемостью координаты ξ в зоне краевого эффекта, придем к системе

$$\eta''+2\psi\,(1-\eta)=0,\qquad \psi''-2\eta\,(1-\eta\,/\,2)=0 \tag{1.2}$$

(штрих означает дифференцирование по ξ).

Подчиняя решение этой системы условию затухания на бесконечности, сводим ее к одному интегродифференциальному уравнению

$$\eta''+4\,(1-\eta)\int_{\xi_1}^{\infty}\int_{\xi_2}^{\infty}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\eta\,d\xi_1\,d\xi_2=0 \tag{1.3}$$

совершенно идентичному основному уравнению работы [1].

Следуя [1], решение этого уравнения представим в виде ряда

$$\eta=\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\alpha_{11}z_1^2+\alpha_{12}z_1z_2+\alpha_2z_2^2+\ldots\qquad (z_1=e^{\omega_1\xi},\ z_2=e^{\omega_2\xi})$$

Здесь ω_1 и ω_2 — корни уравнения

$$\omega^4+4=0$$

с отрицательной действительной частью.

При помощи уравнения (1.3) все коэффициенты разложения, начиная с α_{11}, могут быть выражены через α_1 и α_2. В частности,

$$\alpha_{11}=-0.3\,\alpha_1^2,\quad \alpha_{12}=0.2\,\alpha_1\alpha_2,\qquad \alpha_{22}=-0.3\,\alpha_2^2$$

Для определения же коэффициентов α_1 и α_2 необходимо использовать граничные условия, которые имеют в данном случае вид

$$\vartheta=2\alpha,\qquad \frac{d\Psi}{dr}-\nu\Psi=0\quad \text{при } r=b$$

или

$$\eta=2,\qquad \psi'\approx0\quad \text{при } \xi=0 \tag{1.4}$$

ибо использование теории краевого эффекта предполагает лишь сохранение старших производных. При помощи (1.4) вычисляем

$$\alpha_1=(1-i)\left(1-\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}-\frac{3}{5^3}+\ldots\right),\qquad \alpha_2=(1+i)\left(1-\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}-\frac{3}{5^3}+\ldots\right)$$

При найденном решении системы (1.2) энергия деформации в пограничной зоне подсчитывается по формуле

$$U_\gamma=\frac{\pi Rh^2}{6\,(1-\nu^2)}\,p_*Jk_0^3\qquad \left(p_*=\frac{2Eh^2}{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}\,R^2};\ J=\frac{1}{4}\int_0^\infty[(\psi')^2+(\eta')^2]\,d\xi\right)$$

Вычисляя этот интеграл, получим $J \approx 1.48$. В работе [1] этой величине соответствует $J_0 / \sqrt{2} \approx 0.842$. К такому же результату придем и мы, если предположим, что рассматриваемый сегмент находится вдали от края оболочки. Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния оболочки в окрестности границы выпучивания укладывается в рамки теории краевого эффекта. Благодаря этому сразу устанавливаем область применимости такого анализа $k_0 \gg 1$ и ширину зоны краевого эффекта

$$\Delta \approx \sqrt{R_2^0 h} = b / k_0$$

R_2^0 — нормальная кривизна поверхности в направлении границы выпучивания.

Оказывается также, что используемые в [1] предположения о возможности замены данной оболочки любой другой с теми же геометрическими параметрами границы выпучивания и равенстве энергии деформации внутренней и внешней полуокрестностей границы выпучивания являются следствием пренебрежения изменяемостью геометрии оболочки в окрестности границы выпучивания.

Энергию зеркального выпучивания оболочки вычисляем, как в [1], с той лишь разницей, что из области интегрирования исключаем зону краевого эффекта. В этом случае будем иметь

$$U_g = \frac{\pi R h^2}{6(1-\nu^2)} p_* (1+\nu)(k_0 - 1)^2$$

2. Выпучивание под действием равномерного нормального давления. Нижняя и верхняя критические нагрузки.

Введем в рассмотрение величину

$$A = p\Delta V, \qquad \Delta V = \pi R h^2 k_0^4 / 6(1-\nu^2)$$

Здесь ΔV — удвоенный объем выпученного сегмента. Заметим, что хотя формулы, полученные для величин U_γ, U_g и A, относятся к окончательному выпучиванию, ими, очевидно, можно воспользоваться при рассмотрении выпучивания, характеризуемого параметром k, бесконечно близким к k_0. Из условия равновесия такого выпучивания

$$\frac{d}{dk}(A - U_\gamma - U_g) = 0$$

находим, полагая вновь $k = k_0$, нагрузку, уравновешивающую окончательное выпучивание рассматриваемого сегмента

$$p_-^{\,+} = \frac{p_*}{k_0^2}\left[\frac{3J}{4} k_0 + \frac{1+\nu}{2}\left(1 - \frac{1}{k_0}\right)\right] \tag{2.1}$$

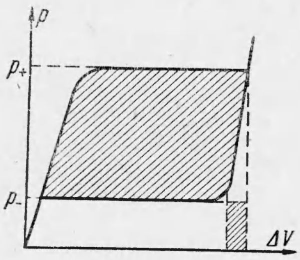
Здесь $J = 1.48$. Если же положить $J = 0.842$, то получим значительно меньшую нагрузку $p_-^{\,-}$, совпадающую с той, которая рекомендована А. В. Погореловым [1] в качестве нижней критической для рассматриваемого сегмента.

Но при $J = 0.842$ фрмулой (2.1) можно пользоваться для определения нагрузки, уравновешивающей выпучивание, достаточно далекое от окончательного и характеризуемое параметром $k < k_0 - 1$ ($k_0 \gg 1$!). С уменьшением параметра k нагрузка эта, как видим, растет, достигая при некотором значении $k = k_+$ величины p_-^+. Определяемое таким образом значение k_+ соответствует выпучиванию сегмента с высотой, равной примерно $^1/_3 H$. Дальнейшее выпучивание происходит при убывающей нагрузке, и лишь в зоне краевого эффекта она начинает резко возрастать, вновь достигая величины p_-^+.

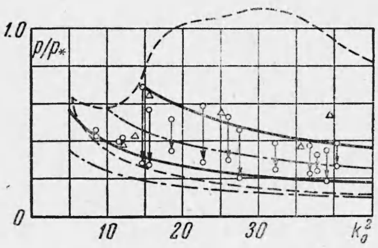
Таким образом, где-то в пределах зоны краевого эффекта должен существовать минимум нагрузок, отвечающих состояниям упругого равновесия с выпучиванием. Этот минимум определяет нижнюю критическую нагрузку. Величина последней должна быть больше $p_-^{\,-}$ (ибо ей соответствуют $k < k_0$ и $J > 0.842$), но не может превышать $p_-^{\,+}$.

Именно это обстоятельство иллюстрирует фиг. 3, где на график, взятый из работы [3] и содержащий экспериментальные (треугольники и кружочки) и теоретические (пунктир) значения критических нагрузок, нанесены кривые, соответствующие нагрузкам $p_-^{\,-}$(нижняя штрих-пунктирная кривая) и p_-^+ (нижняя сплошная кривая). Результаты экспериментов по нагружению сегмента воздухом отмечены треугольниками, по нагружению маслом — кружочками. Вертикальными стрелками соединены верхние и нижние критические значения нагрузки. Пунктирная кривая получена в результате численного интегрирования нелинейных уравнений осесимметричного изгиба жестко заделанной пологой сферической оболочки.

Нижняя ветвь этой кривой дает, по-видимому, точные значения нижней критической нагрузки, ибо соответствующее этой нагрузке упругое выпучивание, как показывает эксперимент, является осесимметричным. Лучшее же соответствие эксперименту сплошной кривой при больших значениях k можно объяснить, вероятно, появлением пластических деформаций, повышающих величину нижней критической нагрузки.



Фиг. 2



Фиг. 3

Что касается верхней критической нагрузки , то для ее определения воспользуемся приближенным соотношением

$$(p_+ - p_-)\,\Delta V \approx U_\gamma + U_g \qquad (2.2)$$

смысл которого становится ясен при рассмотрении диаграммы (фиг. 2), изображающей процесс упругого деформирования с хлопком, характерный для пологой оболочки (заштрихованная площадь соответствует работе внешних сил, перешедшей в энергию закритической деформации).

Из (2.2) находим

$$p_+ \approx \frac{U_\gamma + U_g}{\Delta V} + p_- = \frac{p_*}{k_0^2}\left[Jk_0 + (1+\nu)\left(1 - \frac{1}{k_0}\right)^2\right] + p_- \qquad (2.3)$$

Следует подчеркнуть, что формула эта применима лишь в тех случаях, когда кинетическая энергия, возникающая при хлопке, мала по сравнению с энергией закритической деформации. Она не приведет, по-видимому, к разумным результатам в случае шарнирного опирания края сегмента, когда энергия деформации в выпученном состоянии близка к нулю.

Зависимость верхней критической нагрузки от параметра k показана на фиг. 3 верхней сплошной линией. При этом в (2.3) было принято $J = 1.48$, а в качестве p_- была взята нижняя критическая нагрузка из [3] (пунктир).

Верхняя штрих-пунктирная кривая изображает зависимость (2.3) при $J = 0.842$ и $p_- = p_-^-$. Она приведена для того, чтобы оценить влияние граничных условий на величину верхней критической нагрузки.

Как видим, начиная с $k^2 = 15$, лучше всего соответствует экспериментальным значениям верхней критической нагрузки сплошная кривая. Пунктирная кривая дает картину, весьма далекую от истинной. Это говорит о непригодности осесимметричной теории при решении вопроса о верхней критической нагрузке.

Не вызовет принципиальных затруднений обобщение полученных здесь результатов на случай произвольной выпуклой пологой оболочки вращения переменной (но плавно меняющейся) толщины, а также применение этих результатов при других способах нагружения, рассмотренных в работе [1].

Поступила 20 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А. В. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии. Изд. Харьк. ун-та, 1960.
2. Reissner E. Symmetric bending of shallow shells of revolution. J. Math. Mech., 1958, v. 7, No. 2, p. 121—140.
3. Тарстон Г. Численное решение нелинейных уравнений осесимметричного изгиба пологих сферических оболочек. Прикладная механика. (Труды амер. общ. инж.-мех.), 1961, т. 28, серия E, № 4, стр. 85—91.