$p = 0{,}5$ $\beta_* = 0{,}533$. Контрольные расчеты с $M = 7$, $N = 3$ в (18) показали, что изменения в $\beta_*$ не превышают 3%. Зависимость $\hat{\beta}_* = \hat{\beta}_*(\alpha, p)$ при $p = 1$ представлена на рис. 1 линией *2*, для продолжения которой в область с $\alpha < 0{,}4$ требуется большее число гармоник.

Подобное же вырождение пространственных решений в плоские с удвоенным волновым числом обнаружены в [15] для уравнения, описывающего поведение возмущений на пленке при $\mathrm{Re} \leqslant 1$.

Зависимость для волн второго типа при $\alpha = 0{,}47$ дана кривой *3* на рис. 5. При продвижении в глубь области неустойчивости у них в отличие от волн первого типа «высокие» гармоники $H_{3n}$ нарастают заметно быстрее, и уже для расчета волн с $\beta \lesssim 0{,}45$ число гармоник нужно увеличивать. Можно сказать, что волны второго типа более нелинейны, чем первого.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Chia-Shun Yih.** Stability of liquid flow down on inclined plane.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, N 3.
2. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.
3. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
4. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
5. **Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Дятлова Г. А.** Численное моделирование нестационарных двумерных волн в стекающем слое вязкой жидкости.— В кн.: Современные проблемы теплофизики. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
6. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3.
7. **Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4.
8. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке.— ПМТФ, 1985, № 5.
9. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3.
10. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** Волновые режимы в стекающих пленках жидкости.— В кн.: Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
11. **Демехин Е. А., Шкадов В. Я.** О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 5.
12. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др.** Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.
13. **Гешев П. И., Ездин Б. С.** Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости.— В кн.: Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
14. **Найфе Л. Х.** Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
15. **Непомнящий А. А.** Трехмерные пространственно-периодические движения в пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости.— Гидродинамика, 1974, вып. 7.


*Поступила 25/X 1985 г.*

---

УДК 532.522 + 532.135

# ИЗГИБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СВОБОДНЫХ СТРУЙ ЖИДКОСТЕЙ МАКСВЕЛЛА И ДОИ — ЭДВАРДСА

*А. Л. Ярин*

*(Москва)*

Изгибные возмущения высокоскоростных свободных струй капельных жидкостей, движущихся в воздухе, усиливаются вследствие того, что давление воздуха на вогнутых участках поверхности струй больше, чем на выпуклых. В случае вязких ньютоновских жидкостей линейная и нелинейная стадии роста изгибных возмущений изучены в [1—5]. Влияние упругих напряжений в жидкости на рост изгибных возмущений струй впервые рассмотрено в [6], где в рамках анализа роста малых возмущений полагалось, что вдоль струи имеется постоянное и неизменное натяжение, т. е. фактически исследовалась натянутая струна. В [7, 8] изучалась линейная стадия роста изгибных возмущений струй максвелловских жидкостей.

Цель данной работы — анализ динамики длинноволновых изгибных возмущений струй упруговязких жидкостей как на линейной, так и на нелинейной стадии роста. Реологическое поведение жидкости описывается с помощью двух моделей — феноменологической (Максвелла) и молекулярно-физической (Дои — Эдвардса). Показано, что на нелинейной стадии рост возмущений имеет колебательный характер, причем результаты расчетов с использованием реологических моделей Максвелла (М) и Дои—Эдвардса (ДЭ) в данной задаче совпадают между собой не только качественно, но и количественно.

1. Рассмотрим свободную струю капельной жидкости, движущуюся со скоростью $U_0$ в воздухе. В невозмущенном состоянии ось струи прямая, а сечение — круг радиуса $a_0$. Плотности жидкости и воздуха обозначим $\rho$ и $\rho_1$, а коэффициент поверхностного натяжения жидкости — $\alpha$. Жидкость считается упруговязкой. Связь девиатора тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}'$ с кинематическими и геометрическими параметрами определяется, как обычно, реологическим уравнением состояния. Из большого числа известных в литературе реологических уравнений состояния для концентрированных систем выберем два наиболее ясных по своему физическому смыслу. Первое из них — реологическое уравнение Максвелла — определяет девиатор тензора напряжений в виде [9]

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)[\mathbf{B}_\tau(t) - \mathbf{g}], \tag{1.1}$$

где $\mu$ — вязкость при нулевой скорости сдвига; $\theta$ — время релаксации ($\mu/\theta$ — модуль упругости); $\mathbf{B}_\tau(t)$ — тензор Грина, отвечающий деформации от конфигурации в момент $\tau$ к конфигурации в момент $t$; $\mathbf{g}$ — метрический тензор.

Физический смысл уравнения (1.1) ясен: оно описывает эффекты экспоненциально затухающей памяти жидкости, уменьшающие упругие напряжения в ней. Соотношение (1.1) записано для простейшего случая одного времени релаксации.

Второе реологическое уравнение состояния, описывающее поведение концентрированных растворов и расплавов полимеров, получено Дои и Эдвардсом [10] в рамках молекулярной физики. Оно учитывает наличие топологических ограничений — соседних макромолекул, которые фактически окружают данную макромолекулу в виде трубки, оставляя ей возможность лишь для рептационной диффузии. Уравнение ДЭ имеет вид [10, 11]

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}'_j(t) = G_0 \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 j^2 \theta_j} \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_j}\right) \times$$
$$\times \int \frac{d^2\mathbf{u}_0}{4\pi}\left\{\frac{[\mathbf{F}_\tau(t)\cdot\mathbf{u}_0][\mathbf{F}_\tau(t)\cdot\mathbf{u}_0]}{|\mathbf{F}_\tau(t)\cdot\mathbf{u}_0|^2} - \frac{\mathbf{g}}{3}\right\},\quad \mu = \frac{\pi^2}{60}G_0\theta_1. \tag{1.2}$$

Здесь суммирование ведется по нечетным $j$; $\mathbf{u}_0$ — случайно ориентированный в пространстве орт ($\int d^2\mathbf{u}_0$ обозначает осреднение по всевозможным направлениям $\mathbf{u}_0$); $\mathbf{F}_\tau(t)$ — тензор градиента деформации из конфигурации в момент $\tau$ в конфигурацию в момент $t$. Модуль упругости жидкости $G_0$ и спектр времен релаксации $\theta_j$ вычисляются с помощью молекулярных параметров [10]. Все молекулярные характеристики, входящие в модель ДЭ, в настоящее время определены для ряда систем экспериментально, а предсказания модели для стандартных реологических течений удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [11—13]. Уравнение (1.2) получено для характерных времен $t_0 \gg \theta_1$ и скоростей деформаций $\sim\theta_1^{-1}$: если $t_0 \ll \theta_1$ или скорости деформаций много больше $\theta_1^{-1}$, то уравнение (1.2) неверно, и необходимо учитывать детали «быстрых» релаксационных процессов [14]. Значения характерного времени, при которых справедливо уравнение (1.2), приблизительно лежат в диапазоне $t_0 \geqslant 0{,}01-0{,}1$ с для растворов полибутадиена и полистирола с концентрациями $\sim 10-30\%$.

2. Как известно [15], струи упруговязких жидкостей могут иметь продольное натяжение (вообще говоря, релаксирующее). Чтобы учесть возможное существование продольного натяжения в изгибающейся струе, будем считать, что в общем случае в предыстории ($-\infty \leqslant \tau \leqslant t$ $(t > 0)$) наряду с ростом изгибных возмущений струя растягивалась вдоль своей оси при $-\infty \leqslant \tau \leqslant 0$. Следовательно, при $t > 0$ будем иметь изгиб струи с продольным натяжением. Тензор градиента деформации

$$\mathbf{F}_\tau(t) = \mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{F}^0_\tau(t). \tag{2.1}$$

Здесь и далее звездочкой отмечены тензоры, описывающие изгибную деформацию, а нулем — деформацию осевого растяжения.

При $t > 0$

$$\mathbf{F}^0_\tau(t) = \mathbf{F}^0_\tau(0),\ \tau < 0;\ \mathbf{F}^0_\tau(t) = \mathbf{g},\ \tau > 0. \tag{2.2}$$

Тензор Грина с учетом (2.1) представляем в виде

$$\mathbf{B}_\tau(t) = \mathbf{F}_\tau(t)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_\tau(t) = \mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{B}^0_\tau(t)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t). \tag{2.3}$$

С помощью (2.2) получаем из (2.3) при $t > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_\tau(t) = \mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{B}^0_\tau(0)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t), \quad \tau < 0;\\ &\mathbf{B}_\tau(t) = \mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t) = \mathbf{B}^*_\tau(t), \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (1.1), имеем при $t > 0$

$$\begin{aligned} \sigma'(t) = \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{B}^0_\tau(0)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t) - \mathbf{g}\right] +\\ + \frac{\mu}{\theta^2}\int_{0}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{B}^*_\tau(t) - \mathbf{g}\right]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Выделим при $t > 0$, $\tau < 0$ в изгибном тензоре градиента деформации часть $\mathbf{A}_\tau(t)$, обусловленную ростом изгибных возмущений. Соответственно находим

$$\mathbf{F}^*_\tau(t) = \mathbf{g} + \mathbf{A}_\tau(t),\quad \mathbf{B}^*_\tau(t) - \mathbf{g} = \mathbf{A}_\tau(t) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t) + \mathbf{A}_\tau(t)\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t). \tag{2.6}$$

Следовательно, с помощью первого равенства (2.6) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{F}^*_\tau(0)\cdot\mathbf{B}^0_\tau(0)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t) - \mathbf{g}\right] =\\ &= \int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\{[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}] + \mathbf{A}_\tau(t)\cdot[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}] +\\ &+ [\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}]\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t) + \mathbf{A}_\tau(t)\cdot[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}]\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t) + \mathbf{A}_\tau(t) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t) +\\ &+ \mathbf{A}_\tau(t)\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t)\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поэтому с учетом (2.7) и второго соотношения (2.6) преобразуем выражение для напряжений (2.5) к виду

$$\begin{aligned} \sigma'(t) = \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\{[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}] + \mathbf{A}_\tau(t)\cdot[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}] +\\ + [\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}]\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t) + \mathbf{A}_\tau(t)\cdot[\mathbf{B}^0_\tau(0) - \mathbf{g}]\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_\tau(t)\} +\\ + \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)[\mathbf{B}^*_\tau(t) - \mathbf{g}], \end{aligned} \tag{2.8}$$

где первый интеграл описывает вклад осевого растяжения струи в девиаторные напряжения в ней. Поскольку изгибные деформации в длинноволновом пределе достаточно малы, для того чтобы пренебречь компонентами тензора $\mathbf{A}_\tau(t)$ в сравнении с единицей, из (2.8) получаем

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \boldsymbol{\sigma}'^0(t) + \boldsymbol{\sigma}'^*(t) = \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{B}_\tau^0(0) - \mathbf{g}\right] + \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{B}_\tau^*(t) - \mathbf{g}\right]. \tag{2.9}$$

Таким образом, в соответствии с (2.9) девиаторные напряжения могут быть представлены при $t > 0$ в виде суммы релаксирующего предварительного напряжения $\boldsymbol{\sigma}'^0(t)$ и чисто изгибной составляющей, описываемой интегральным слагаемым:

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \boldsymbol{\sigma}'^0(t) + \frac{\mu}{\theta^2}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)\left[\mathbf{B}_\tau^*(t) - \mathbf{g}\right], \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^0(t) = \exp(-t/\theta)\boldsymbol{\sigma}'^0(0).$$

Аналогичное рассмотрение для жидкости ДЭ (1.2) приводит к выражению

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \boldsymbol{\sigma}'^0(t) + G_0 \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 j^2 \theta_j} \int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_j}\right) \times \int \frac{d^2\mathbf{u}_0}{4\pi}\left\{\frac{\left[\mathbf{F}_\tau^*(t)\cdot\mathbf{u}_0\right]\left[\mathbf{F}_\tau^*(t)\cdot\mathbf{u}_0\right]}{\left|\mathbf{F}_\tau^*(t)\cdot\mathbf{u}_0\right|^2} - \frac{\mathbf{g}}{3}\right\}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^0(t) = G_0 \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 j^2 \theta_j} \int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_j}\right) \times \int \frac{d^2\mathbf{u}_0}{4\pi}\left\{\frac{\left[\mathbf{F}_\tau^0(0)\cdot\mathbf{u}_0\right]\left[\mathbf{F}_\tau^0(0)\cdot\mathbf{u}_0\right]}{\left|\mathbf{F}_\tau^0(0)\cdot\mathbf{u}_0\right|^2} - \frac{\mathbf{g}}{3}\right\} = \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}_j'^0(0)\exp(-t/\theta_j).$$

Тензор напряжений в упруговязкой жидкости, как обычно, представляется в виде $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{g} + \boldsymbol{\sigma}'$, где $p$ — давление.

3. Динамику роста длинноволновых возмущений будем исследовать, как и в [1, 3], исходя из энергетического баланса. Плоское изгибное возмущение оси струи в пренебрежении трением о воздух и лобовым сопротивлением можно приближенно представить в виде

$$H = A(t)\sin(\chi s/a_0), \tag{3.1}$$

пока амплитуда $A(t)$ не слишком велика. Приняты обозначения: $\chi$ — безразмерное волновое число ($\chi = 2\pi a_0/l_1$, $l_1$ — длина волны возмущения); $s$ — координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи. Ось $s$ «вморожена» в движущуюся невозмущенную струю.

Работа аэродинамической «подъемной» силы [1, 3, 5], ведущей к росту изгибных возмущений, расходуется на приращение кинетической и поверхностной энергий и работу внутренних сил. Энергетический баланс составляется для отрезка струи $0 \leqslant s \leqslant \pi a_0/\chi$. Выражения для работы $L$ аэродинамической силы за время $dt$, приращений кинетической $\Delta E$ и поверхностной $\Delta E_1$ энергий, не зависящие, очевидно, от реологического поведения жидкости, даются результатами [1, 3]

$$L = \rho_1 U_0^2 f_0 A' A \frac{\pi\chi}{2a_0}\,dt, \quad \Delta E = \rho f_0 A'' A' \frac{\pi a_0}{2\chi}\,dt, \quad \Delta E_1 = \pi^2 \alpha A A' \frac{\chi}{2}\,dt, \tag{3.2}$$

где $f_0 = \pi a_0^2$ — площадь сечения невозмущенной струи; штрихами отмечены производные по $t$.

Остается вычислить определяемую реологическим поведением жидкости работу внутренних сил в выделенном элементе струи за время $dt$ [1, 3]:

$$L_1 = \left\{ \int_0^{\pi a_0/\chi} \left[ \int_{D_1} (\sigma_{ll} D_{ll} + \sigma_{nn} D_{nn} + \sigma_{bb} D_{bb})(1 - ky)\, dS \right] \lambda ds \right\} dt. \tag{3.3}$$

Здесь $\sigma_{ll}$, $\sigma_{nn}$, $\sigma_{bb}$ — компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ (индекс $l$ отвечает орту касательной к оси изгибающейся струи $\mathbf{l}$, $n$ — орту нормали $\mathbf{n}$, $b$ — орту бинормали $\mathbf{b}$); $D_{ll}$, $D_{nn}$, $D_{bb}$ — компоненты тензора скоростей изгибных деформаций $\mathbf{D}$; $k$ — кривизна оси струи, $k = -H_{,ss}/(1 + H_{,s}^2)^{3/2}$; координата $y$ отсчитывается от центра сечения струи $D_1$ по нормали; $\lambda = (1 + H_{,s}^2)^{1/2}$.

В длинноволновом пределе ($\chi < 1$), согласно [1, 3,]

$$D_{ll} = \lambda^{-1}\lambda_{,t} - ky\omega_{,t}/\omega,\quad D_{nn} = D_{bb} = -D_{ll}/2,\quad \omega = -H_{,ss}ds/(1 + H_{,s}^2). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что в струе

$$\sigma_{ll} D_{ll} + \sigma_{nn} D_{nn} + \sigma_{bb} D_{bb} = D_{ll}(\sigma'_{ll} - \sigma'_{nn}). \tag{3.5}$$

Чтобы вычислить интеграл в (3.3) с учетом реологии упруговязкой жидкости (2.10) или (2.11), необходимо определить тензор $\mathbf{F}^*_\tau(t)$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{F}^*_\tau(t)}{dt} = \nabla\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}^*_\tau(t) \tag{3.6}$$

с начальным условием $\mathbf{F}^*_\tau(\tau) = \mathbf{g}$.

Как показано в [1, 5], в пренебрежении трением о воздух на поверхности свободной струи высоковязкой капельной жидкости в случае длинноволновых возмущений напряжения $\sigma_{nl}$ и $\sigma_{bl}$ в струе пренебрежимо малы в сравнении с осевым напряжением $\sigma_{ll}$: $\sigma_{nl} = O(\varepsilon\sigma_{ll})$, $\sigma_{bl} = O(\varepsilon\sigma_{ll})$, $\varepsilon \sim a_0/l_1 \ll 1$. Малость напряжений $\sigma_{nl}$ и $\sigma_{bl}$ указывает на то, что жидкое сечение струи остается плоским при ее изгибе. Кроме того, следствием граничных условий для напряжений на поверхности струи является равенство $\sigma_{nn} = \sigma_{bb}$ в струе, которое указывает на то, что деформация жидкого сечения в основном изотропна. Поэтому жидкий диск, мысленно вырезанный из струи кругового сечения, при ее изгибе поворачивается и растягивается вдоль оси струи, сохраняя круговое сечение. Эта картина не меняется с ростом амплитуды возмущений до тех пор, пока сохраняется длинноволновый характер движения и на струе не возникают локально участки большой кривизны, что имеет место лишь для очень больших амплитуд возмущений [1]. Все это позволяет считать, что росту как бесконечно малых, так и конечных длинноволновых изгибных возмущений струй высоковязких жидкостей, движущихся в воздухе, отвечает в системе отсчета, связанной с осью струи, ее одноосное растяжение. Поэтому в базисе $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{l}$ тензоры $\mathbf{F}^*_\tau(t)$, $\nabla\mathbf{v}$ и $\mathbf{D}$ диагональны. Соответственно можем представить тензор $\mathbf{F}^*_\tau(t)$ (как $\nabla\mathbf{v}$ и $\mathbf{D}$) в виде $\mathbf{F}^*_\tau(t) = \mathbf{ll}f_{ll} + (\mathbf{nn} + \mathbf{bb})f_{nn}$ и, кроме того, в силу диагональности считать $\nabla\mathbf{v} = \mathbf{D}$. Поэтому интегрируя (3.6) с учетом (3.1) и (3.4), находим компоненты тензора $\mathbf{F}^*_\tau(t)$:

$$\begin{aligned} f_{ll} = 1 &+ y\frac{\partial^2}{\partial s^2}[H(s,t) - H(s,\tau)] + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial H(s,t)}{\partial s}\right]^2 - \left[\frac{\partial H(s,\tau)}{\partial s}\right]^2\right\} + \\ &+ \frac{y^2}{2}\left[\frac{\partial^2 H(s,t)}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 H(s,\tau)}{\partial s^2}\right]^2 + \left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\chi s}{a_0}\right) \times \\ &\times \left[\frac{A^2(t) + A^2(\tau)}{2} - A(t)A(\tau)\right] + O(A^3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$f_{nn}=1-\frac{y}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}[H(s,t)-H(s,\tau)]-\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\partial H(s,t)}{\partial s}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial H(s,\tau)}{\partial s}\right]^2\right\}+\frac{y^2}{8}\left[\frac{\partial^2 H(s,t)}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 H(s,\tau)}{\partial s^2}\right]^2-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{\chi s}{a_0}\right)\left[\frac{A^2(t)+A^2(\tau)}{2}-A(t)A(\tau)\right]+O(A^3).$$

Отметим, что при интегрировании (3.6) с достаточной для дальнейшего точностью считалось

$$\frac{d\mathbf{F}^*_\tau(t)}{dt}=\mathbf{ll}\frac{\partial f_{ll}}{\partial t}+(\mathbf{nn}+\mathbf{bb})\frac{\partial f_{nn}}{\partial t}+v_n\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{ll}f_{ll}+(\mathbf{nn}+\mathbf{bb})f_{nn}],\ v_n=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Вычисляя с помощью (3.7) тензор Грина для изгиба $\mathbf{B}^*_\tau(t)=\mathbf{F}^*_\tau(t)\cdot\mathbf{F}^{*\mathrm{T}}_\tau(t)$ и подставляя его в (2.10), определим необходимую для вычисления $L_1$ разность компонент девиатора тензора напряжений для максвелловской жидкости:

(3.8)
$$\sigma'_{ll}-\sigma'_{nn}=\sigma_0+\frac{\mu}{\theta}\left\{-3y\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2\sin\left(\frac{\chi s}{a_0}\right)[A(t)-\psi_1(t)]+\right.$$
$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2\cos^2\left(\frac{\chi s}{a_0}\right)[A^2(t)-\psi_2(t)]+\frac{3}{2}\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^4y^2\sin^2\left(\frac{\chi s}{a_0}\right)\times$$
$$\times[A^2(t)-2A(t)\psi_1(t)+\psi_2(t)]+\frac{3}{2}\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{\chi s}{a_0}\right)[A^2(t)-$$
$$\left.-2A(t)\psi_1(t)+\psi_2(t)]\right\}+O(A^3);$$

где

(3.9)
$$\psi_1(t)=\theta^{-1}\int_{-\infty}^{t}d\tau\exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)A(\tau),\ \psi_2(t)-$$
$$=\theta^{-1}\int_{-\infty}^{t}d\tau\exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta}\right)A^2(\tau),$$

а $\sigma_0=\sigma'^0_{ll}-\sigma'^0_{nn}$ характеризует начальное натяжение струи.

Подставляя (3.4), (3.5) и (3.8) в (3.3) и выполняя интегрирование с учетом (3.1), имеем

(3.10)
$$L_1=\left\{\sigma_0\frac{\chi}{a_0}AA'\frac{\pi}{2}f_0+\frac{3\mu}{\theta}I_0\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^2\frac{\pi}{2}A'(A-\psi_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{\theta}f_0\frac{3}{2}\left(\frac{\chi}{a_0}\right)^3AA'\pi\left[\frac{3}{8}(A^2-\psi_2)+\frac{1}{8}(A^2-2A\psi_1+\psi_2)\right]\right\}dt,$$
$$I_0=\pi a_0^4/4.$$

Члены более высоких порядков малости по амплитуде возмущений, а также по толщине струи (длинноволновое приближение, тонкая струя) опущены.

Составляя с помощью (3.2) и (3.10) баланс энергии $L=\Delta E+\Delta E_1+$ $+L_1$, получаем уравнение для амплитуды возмущения $A(t)$:

(3.11)
$$A''+\frac{3}{4}\frac{\mu}{\rho a_0^2}\chi^4\frac{Y_1}{\theta}+\frac{3}{4}\frac{\mu}{\rho a_0^4}\chi^4\frac{A(AY_1+Y_2)}{\theta}+A\chi^2\left[\frac{\alpha}{\rho a_0^3}-\frac{\rho_1U_0^2}{\rho a_0^2}+\frac{\sigma_0(t)}{\rho a_0^2}\right]=0,$$
$$\sigma_0(t)=\left[\sigma'^0_{ll}(0)-\sigma'^0_{nn}(0)\right]\exp(-t/\theta),$$

Входящие в (3.11) функции $Y_1(t)=A-\psi_1$ и $Y_2(t)=A^2-\psi_2$ с учетом (3.9) определяются при интегрировании совместно с (3.11) дифференциальных уравнений:

(3.12)
$$Y'_1=A'-Y_1/\theta,\ Y'_2=2AA'-Y_2/\theta.$$

Отметим, что если не делать упрощения, ведущего к переходу от (2.8) к (2.9), а использовать непосредственно (2.8), то в уравнении (3.11) вместо слагаемого $W_1 = A\chi^2\sigma_0(t)/(\rho a_0^2)$ будем иметь $W_2 = A\chi^2\sigma_0(t)[1 + \Phi(A)]/(\rho a_0^2)$, $\Phi(A) \leqslant O(A)$, что, казалось бы, может внести изменения в результаты расчета нелинейной стадии изгиба, когда имеется обусловленное начальным продольным натяжением струи напряжение $\sigma_0(t) \not\equiv 0$. Однако, как следует из [1, 3—5], а также из результатов расчетов, обсуждаемых в п. 4, нелинейные эффекты будут существенны только по истечении времени, превосходящего время релаксации напряжения $\sigma_0(t)$, когда $W_1$ и $W_2$ практически равны нулю. Это оправдывает переход от (2.8) к (2.9) при получении нелинейного по амплитуде $A$ уравнения (3.11).

Проводя аналогичные вычисления для жидкости ДЭ, с помощью (2.11), (3.1), (3.4), (3.5) и (3.7) находим

$$A'' + \frac{6}{5\pi^2}\frac{G_0\chi^4}{\rho a_0^2}\sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty}\frac{Y_{1j}}{j^2} + \frac{6}{5\pi^2}\frac{G_0\chi^4}{\rho a_0^4}A\sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty}\frac{AY_{1j}+Y_{2j}}{j^2} + \tag{3.13}$$

$$+ A\chi^2\left[\frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 U_0^2}{\rho a_0^2} + \frac{\sigma_0(t)}{\rho a_0^2}\right] = 0,$$

$$Y'_{1j} = A' - Y_{1j}/\theta_j,\ Y'_{2j} = 2AA' - Y_{2j}/\theta_j,$$

где

$$Y_{1j} = A - \theta_j^{-1}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_j}\right)A(\tau), \tag{3.14}$$

$$Y_{2j} = A^2 - \theta_j^{-1}\int_{-\infty}^{t} d\tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_j}\right)A^2(\tau),$$

$$\sigma_0(t) = \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty}\left[\sigma'^{0}_{jll}(0) - \sigma'^{0}_{jnn}(0)\right]\exp(-t/\theta_j).$$

4. Прежде всего рассмотрим малые возмущения, когда нелинейными по амплитуде $A$ членами в (3.11) и (3.13) (третьи слагаемые $O(A^3)$) можно пренебречь. В этом случае $A = A_0\exp(\gamma t)$ ($\gamma$ — инкремент, $A_0$ — амплитуда изгибного возмущения при $t = 0$). Кроме того,

$$Y_1 = \gamma\theta A/(1 + \gamma\theta),\ Y_2 = 2\gamma\theta A^2/(1 + 2\gamma\theta), \tag{4.1}$$

и для максвелловской жидкости с помощью (3.11) и (3.12) получаем характеристическое уравнение

$$\gamma^2 + \frac{3}{4}\frac{\mu\chi^4}{\rho a_0^2(1+\gamma\theta)}\gamma + \chi^2\left(\frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 U_0^2}{\rho a_0^2} + \frac{\sigma_0}{\rho a_0^2}\right) = 0. \tag{4.2}$$

При этом считается, что начальное натяжение в струе либо отсутствует ($\sigma_0 = 0$), либо «заморожено» и $\sigma_0 = \text{const} \neq 0$.

Уравнение (4.2) обобщает характеристическое уравнение для ньютоновской вязкой жидкости [1, 3] с $\theta = 0$ на случай упруговязкого максвелловского реологического поведения. Оно предсказывает (при $\sigma_0 = 0$) ускорение роста малых изгибных возмущений струи максвелловской жидкости в сравнении с сопоставимой струей ньютоновской жидкости ($\rho$, $\mu$, $a_0$, $\alpha$, $U_0$ = idem) вследствие падения эффективной вязкости $\mu_e = \mu/(1 + \gamma\theta)$. Начальное натяжение $\sigma_0 > 0$ — стабилизирующий фактор, замедляющий рост возмущений (уменьшается величина $\gamma > 0$) или вообще препятствующий росту изгибных возмущений при $(\sigma_0 + \alpha/a_0) > \rho_1 U_0^2$, когда $\mathrm{Re}\{\gamma\} < 0$. Результат работы [6], в которой струя представлялась в виде натянутой струны, в длинноволновом пределе преобразуется к уравнению (4.2) с $\mu = \alpha = 0$.

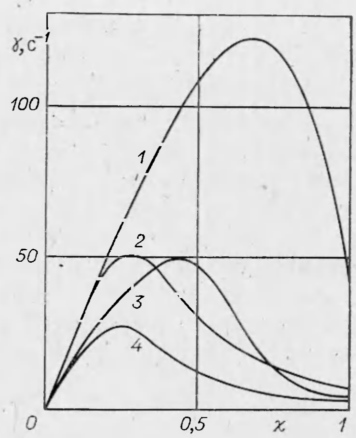


Рис. 1

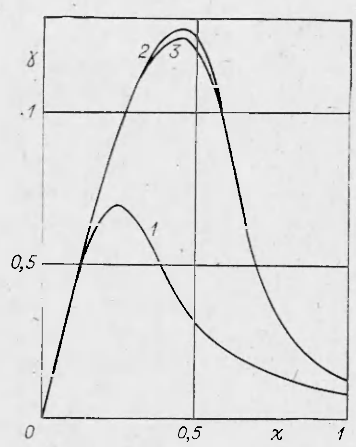


Рис. 2

Решение задачи об изгибе струи максвелловской жидкости в потоке воздуха зависит от восьми параметров, имеющих три независимые размерности: $\mu$, $\rho$, $a_0$, $\alpha$, $\rho_1$, $U_0$, $\theta$, $\sigma_0$. Следовательно, в соответствии с $\pi$-теоремой теории размерностей решение определяется пятью критериями подобия:

$$(4.3)\qquad \Pi_1 = \frac{\rho_1}{\rho},\quad \Pi_2 = \frac{\mu^2}{\rho a_0^2 \rho_1 U_0^2},\quad \Pi_3 = \frac{\rho_1 U_0^2}{\mu/\theta},$$

$$\Pi_4 = \frac{\sigma_0}{\rho_1 U_0^2},\quad \Pi_5 = \frac{\alpha}{\rho_1 U_0^2 a_0}.$$

На рис. 1 представлены зависимости $\gamma(\chi)$, рассчитанные с помощью уравнения (4.2) при следующих значениях параметров: для всех кривых $\Pi_1 = 10^{-3}$, $\Pi_4 = 0$; для *1* и *2* — $\Pi_2 = 0{,}156 \cdot 10^4$, $\Pi_5 = 0{,}94 \cdot 10^{-3}$; *3* и *4* — $\Pi_2 = 0{,}4 \cdot 10^4$, $\Pi_5 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$; *2* и *4* — $\Pi_3 = 0$; *1* и *3* — $\Pi_3 = 0{,}64$, $\Pi_3 = 0{,}25$. Линии *1* и *3* отвечают двум струям максвелловской жидкости, отличающимся скоростью, большей в первом случае, *2* и *4* — соответствующим *1* и *3* результатам для ньютоновской жидкости. Сравнение рис. 1 данной работы с рис. 4 работы [8] (отвечают одним и тем же значениям параметров) приводит к заметному расхождению. Так, инкремент $\gamma_{max}$ для кривой *1* приблизительно на 30% больше по расчету данной работы, чем в [8]. Это, по-видимому, позволяет оценить погрешность, вносимую упрощениями характеристического уравнения в [8], в результате которых его порядок по $\gamma$ понижен до второго. Безразмерная зависимость $\gamma(\chi)$, определяемая характеристическим уравнением (4.2) для максвелловской жидкости с $\Pi_1 = 10^{-3}$, $\Pi_2 = 0{,}4 \cdot 10^4$, $\Pi_3 = 0{,}25$, $\Pi_4 = \Pi_5 = 0$, представлена на рис. 2 линией *2*, а *1* — для соответствующей струи ньютоновской жидкости ($\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_4$, $\Pi_5$ = idem, $\Pi_3 = 0$). Инкремент отнесен к вводимой далее величине $T^{-1}$.

Характеристическое уравнение для малых изгибных возмущений струи жидкости ДЭ, когда $A = A_0 \exp(\gamma t)$,

$$(4.4)\qquad Y_{1j} = \gamma\theta_j A/(1 + \gamma\theta_j),\quad Y_{2j} = 2\gamma\theta_j A^2/(1 + 2\gamma\theta_j),$$

получается из (3.13) с $\sigma_0 = \text{const}$ в виде

$$(4.5)\qquad \gamma^2 + \frac{6}{5\pi^2}\frac{G_0\chi^4}{\rho a_0^2}\gamma \sum_{j_{\text{неч}}=1}^{\infty} \frac{\theta_j}{(1+\gamma\theta_j)\, j^2} + \chi^2\left(\frac{\alpha}{\rho a_0^2} - \frac{\rho_1 U_0^2}{\rho a_0^2} + \frac{\sigma_0}{\rho a_0^2}\right) = 0.$$

С учетом второго соотношения (1.2) критериями подобия будут по-прежнему $\Pi_1$ — $\Pi_5$ из (4.3), к которым добавятся критерии, определяющие отношения между собой времен релаксационного спектра $\Pi_m = \theta_k/\theta_p$. На рис. 2 кривой *3* показана зависимость $\gamma = \gamma(\chi)$, рассчитанная как решение характеристического уравнения (4.5) для тех же значений критериев $\Pi_1 - \Pi_5$, что у кривой *2* и пяти мод релаксации ($j = 1, 3, 5, 7, 9$). Изменение числа мод в расчете весьма слабо влияет на результат. Фактически зависимость $\gamma = \gamma(\chi)$, предсказываемая характеристическим уравнением (4.5) для струи жидкости ДЭ, совпадает с результатом, полученным при решении уравнения (4.2) для струи максвелловской жидкости с теми же значениями $\Pi_1 - \Pi_5$.

Отметим, что в силу (4.5) начальное натяжение $\sigma_0 > 0$, как и для струи максвелловской жидкости, замедляет рост малых изгибных возмущений, а при $(\sigma_0 + \alpha/a_0) > \rho_1 U_0^2$ струя полностью стабилизируется.

Перейдем к анализу роста достаточно больших изгибных возмущений, когда нелинейные по амплитуде $A$ члены в уравнениях (3.11) и (3.13) (третьи слагаемые) существенны. В случае максвелловской жидкости необходимо численно проинтегрировать систему (3.11) и (3.12) с начальными условиями

$$t = 0,\ A = A_0,\ A' = A_0\gamma_*,\ Y_1 = \gamma_*\theta A_0/(1 + \gamma_*\theta),$$
$$Y_2 = 2\gamma_*\theta A_0^2/(1 + 2\gamma_*\theta). \tag{4.6}$$

В (4.6) значение инкремента $\gamma_*$ соответствует максимальному $\gamma_{\max}$, определяемому характеристическим уравнением (4.2). Поэтому в расчете нелинейной эволюции изгибных возмущений полагается $\chi = \chi_*$, где значение безразмерного волнового числа $\chi_*$ отвечает $\gamma_{\max} : \gamma_* = \gamma_{\max} = \gamma(\chi_*)$. Условия (4.6) отвечают первоначально малым возмущениям, так что начальные условия для функций $Y_1$ и $Y_2$ определяются с помощью (4.1).

Результаты расчета для струи максвелловской жидкости с $\Pi_1 = 10^{-3}$, $\Pi_2 = 0{,}4 \cdot 10^4$, $\Pi_3 = 0{,}25$, $\Pi_4 = \Pi_5 = 0$ представлены на рис. 3 кривой *1*, а *2* — для соответствующей струи ньютоновской жидкости ($\Pi_3 = 0$). На этом и последующих рисунках амплитуда изгибного возмущения струи упруговязкой жидкости $H_{\max} = A$ отнесена к длине волны возмущения $l_{1*} = 2\pi a_0/\chi_*$, а время — к $T = (\mu\rho a_0^2)^{1/3}/(\rho_1 U_0^2 - \alpha/a_0)^{2/3}$; $Y = \ln(H_{\max}/l_{1*})$. Для ньютоновской жидкости амплитуда возмущения $H_{\max}$ отнесена к длине волны возмущения $l_{2*} = 2\pi a_0/\chi_* = 2\pi a_0 \Big/ \left[\frac{8}{3}\frac{\rho a_0^2}{\mu^2} \times (\rho_1 U_0^2 - \alpha/a_0)\right]^{1/6}$ [1, 4, 5]; $Y = \ln(H_{\max}/l_{2*})$. В соответствии с данными рис. 1 и 2 $l_{2*} > l_{1*}$. Отличие значений $Y$ при фиксированном $t$ для упруговязкой и ньютоновской жидкостей на рис. 3, очевидно, обусловлено не разницей в масштабах $l_{2*}$ и $l_{1*}$, а различной скоростью роста малых возмущений. В расчетах полагалось $A_0/l_{1*} = 5 \cdot 10^{-4}$, $A_0/l_{2*} = 5 \cdot 10^{-4}$.

Из рис. 3 следует, что в случае упруговязкой максвелловской жидкости в отличие от монотонного (замедляющегося напряжениями, связанными с нелинейным эффектом — удлинением оси струи) роста изгибных возмущений струи ньютоновской жидкости наблюдается новый нелинейный эффект — колебания амплитуды возмущений. Эти колебания, из-за которых амплитуда возмущений в определенные промежутки времени уменьшается, обусловлены конкуренцией инерционной и упругой сил. Изгибающийся элемент струи проскакивает из-за своей инерции «равновесное» положение, ось струи дополнительно удлиняется (следствие конечной величины возмущений, на линейной стадии длина оси струи постоянна), что ведет к появлению дополнительной упругой силы вдоль элемента струи, стремящейся сократить его длину. Поэтому начинается обратный процесс: сокращение длины элемента, уменьшение амплитуды изгибного возмущения, новый проскок «равновесного» положения из-за инерции и т. д. Вязкая диссипация постепенно поглощает энергию этих колебаний.

Именно таким механизмом, по-видимому, объясняются и колебания поверхности прямолинейной струи максвелловской жидкости при капил-

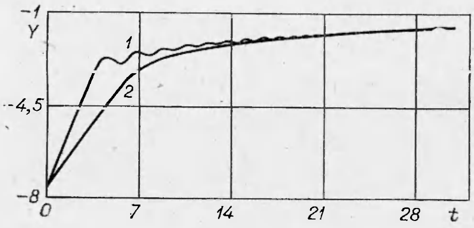


Рис. 3

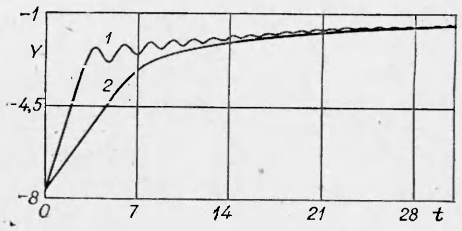


Рис. 4

лярном распаде, наблюдаемые в расчетах [16], а также осцилляции в решениях других нестационарных задач динамики упруговязких жидкостей при учете их инерции.

При расчете роста изгибных возмущений конечной амплитуды струи жидкости ДЭ для системы уравнений (3.13) ставятся с учетом (4.4) начальные условия

$$t = 0,\ A = A_0,\ A' = A_0\gamma_*,\ Y_{1j} = \gamma_*\theta_j A_0/(1 + \gamma_*\theta_j), \tag{4.7}$$

$$Y_{2j} = 2\gamma_*\theta_j A_0^2/(1 + 2\gamma_*\theta_j).$$

В условиях (4.7) инкремент $\gamma_*$, как и значение $\chi = \chi_*$ в (3.13), определяется наиболее быстро растущим малым возмущением, т. е. соответствует $\gamma_* = \gamma_{\max}(\chi_*)$ в решении характеристического уравнения (4.5). Результаты расчета для струи жидкости ДЭ с $\Pi_1 = 10^{-3}$, $\Pi_2 = 0{,}4\cdot 10^4$, $\Pi_3 = 0{,}25$, $\Pi_4 = \Pi_5 = 0$ и пятью модами в спектре релаксации практически совпадают с кривой *1* рис. 3. На рис. 4 линией *1* представлены совпадающие между собой результаты расчета для струй жидкостей М и ДЭ ($j = 1, \ldots, 9$) с $\Pi_1 = 10^{-3}$, $\Pi_2 = 0{,}156\cdot 10^4$, $\Pi_3 = 0{,}64$, $\Pi_4 = \Pi_5 = 0$, а *2* — для соответствующей струи ньютоновской жидкости ($\Pi_3 = 0$).

Расчеты с использованием реологических моделей М и ДЭ показывают, что колебания, сопровождающие нелинейную стадию роста изгибных возмущений, усиливаются с увеличением критерия подобия $\Pi_3$ при сохранении неизменными $\Pi_i$ ($i \neq 3$). Поскольку увеличение $\Pi_3$ эквивалентно уменьшению модуля упругости жидкости, с увеличением $\Pi_3$ растет «податливость» жидкости и облегчается инерционный проскок положения «равновесия».

Использование модели ДЭ, игнорирующей детали «быстрых» релаксационных процессов, оправдано данными рис. 3 и 4, если $t_0 \simeq 20T \geqslant \theta_1$, а также $\gamma \sim \theta_1^{-1}$, что в этом случае выполняется.

На рис. 5 приведены результаты для жидкости М с теми же значениями параметров $\Pi_1$ — $\Pi_3$, $\Pi_5$, что и для рис. 3, но с начальным натяжением $\sigma_0(0) = \rho_1 U_0^2/1{,}1$. Рассмотрены два варианта: начальное напряжение «заморожено» и остается постоянным в процессе изгиба струи (кривая *1*), и начальное натяжение релаксирует в соответствии со вторым равенством (3.11) (кривая *2*); *3* — результаты для соответствующей струи ньютоновской жидкости. Сравнение линий *1* и *2* между собой и с *1* рис. 3 иллюстрирует стабилизирующую роль продольного натяжения в процессе роста возмущений. Естественно, в случае «замороженности» значения $\sigma_0$ в процессе роста возмущений стабилизирующее влияние продольного натяжения струи значительнее.

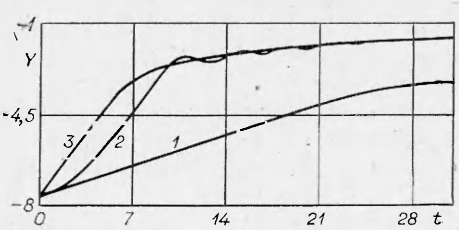


Рис. 5

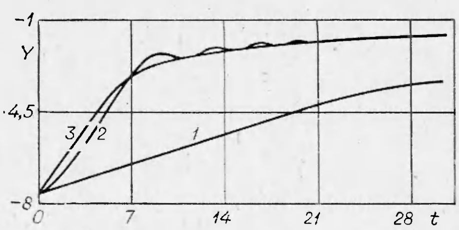


Рис. 6

Результаты, отвечающие струе жидкости ДЭ (значения $\Pi_1 - \Pi_3$, $\Pi_5$ те же, что для рис. 3, учитывалось пять релаксационных мод) с $\sigma_0(0) = \rho_1 U_0^2/1{,}1$, показаны на рис. 6, где линия *1*, полученная для $\sigma_0 = \mathrm{const}$, практически совпадает с *1* рис. 5, *2* отвечает релаксации начального напряжения в соответствии с третьим равенством (3.14) и, естественно, отличается от *2* рис. 5, поскольку релаксация начального натяжения в струях жидкостей М (одномодовая модель) и ДЭ (многомодовая модель) идет по-разному; *3* — результаты для соответствующей струи ньютоновской жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Ентов В. М., Ярин А. Л.** Динамика струй капельной жидкости. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 127.
2. **Ентов В. М., Ярин А. Л.** Поперечная устойчивость струи капельной жидкости во встречном потоке воздуха.— ИФЖ, 1980, т. 38, № 5.
3. **Ярин А. Л.** Динамика изгибных возмущений струй нелинейно-вязких жидкостей, движущихся в воздухе.— ПМТФ, 1982, № 1.
4. **Ярин А. Л.** Численное исследование изгибной неустойчивости тонких струй капельных жидкостей.— ПМТФ, 1982, № 4.
5. **Entov V. M., Yarin A. L.** The dynamics of thin liquid jets in air.— J. Fluid Mech., 1984, v. 140.
6. **Debye P., Daen J.** Stability considerations of nonviscous jets exhibiting surface or body tension.— Phys. Fluids, 1959, v. 2, N 4.
7. **Шульман З. П., Хусид Б. М.** О распаде вязкоупругой струи.— В кн.: Тепло- и массоперенос: физические основы и методы исследований. Минск, 1979.
8. **Хусид Б. М.** Распад свободной струи вязкоупругой жидкости.— ПМТФ, 1982, № 1.
9. **Астарита Дж., Марруччи Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.— М.: Мир, 1978.
10. **Doi M., Edwards S. F.** Dynamics of concentrated polymer systems. Part 3 — The constitutive equation.— J. Chem. Soc. Faraday Trans., 1978, pt 2, v. 74, N 10.
11. **Doi M., Edwards S. F.** Dynamics of concentrated polymer systems. Part 4 — Rheological properties.— J. Chem. Soc. Faraday Trans., 1979, pt 2, v. 75, N 1.
12. **Graessley W. W.** Some phenomenological consequences of the Doi — Edwards theory of viscoelasticity.— J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed., 1980, v. 18, N 1.
13. **Menezes E. V., Graessley W. W.** Nonlinear rheological behaviour of polymer systems for several shear-flow histories.— J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed., 1982, v. 20, N 10.
14. **Doi M., Edwards S. F.** Dynamics of concentrated polymer systems. Part 2 — Molecular motion under flow.— J. Chem. Soc. Faraday Trans., 1978, pt 2, v. 74, N 10.
15. **Ентов В. М.** Об устойчивости капиллярных струй упруговязких жидкостей.— ИФЖ, 1978, т. 34, № 2.
16. **Ентов В. М., Кордонский В. И. и др.** Исследование распада струй реологически сложных жидкостей. Препринт Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1980, № 2.


*Поступила 14/X 1985 г.*

---

УДК 536.253 + 532.529

# К ВОПРОСУ О ФИЗИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕРМИКОВ

*Ю. А. Гостинцев, Ю. С. Матвеев, В. Е. Небогатов, А. Ф. Солодовник*

(*Москва*)

Для исследования процессов атмосферной конвекции, разработки безопасных методов эксплуатации и хранения взрывоопасных и токсичных смесей, ряда экологических проблем необходимо изучение нестационарных конвективных течений, возникающих при подъеме массы легкого газа в поле гравитационных сил (термиков). Наибольший с практической точки зрения интерес представляют крупномасштабные турбулентные течения, общая сложность изучения которых обусловлена ограниченной возможностью получения непосредственных экспериментальных данных. В связи с этим особое значение приобретает изучение законов моделирования турбулентных термиков.