

УДК 519.676

Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом*

Т.А. Аверина^{1,2}, К.А. Рыбаков³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, д. 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993

E-mails: ata@osmf.sccc.ru (Аверина Т.А.), rkoffice@mail.ru (Рыбаков К.А.)

Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Модификация численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с первым интегралом // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 243–259.

В статье рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с первым интегралом. Точное решение таких систем с вероятностью 1 находится на гладком многообразии. Однако, при численном решении, из-за вычислительной погрешности моделируемые траектории не принадлежат многообразию, а лежат в некоторой его окрестности. Основной целью статьи является построение модифицированных численных методов решения СДУ, сохраняющих первый интеграл. В статье для трех систем СДУ с первым интегралом найдены точные решения, на этих системах проведена апробация предложенной модификации.

DOI: 10.15372/SJNM20190301

Ключевые слова: численные методы, статистическое моделирование, стохастические дифференциальные уравнения, многообразие, первый интеграл, проекция.

Averina T.A., Rybakov K.A. A modification of numerical methods for stochastic differential equations with the first integral // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 243–259.

In this paper, stochastic differential equations (SDEs) with the first integral are considered. The exact solution of such SDEs belongs to a smooth manifold with probability 1. However, the numerical solution does not belong to the manifold, but it belongs to some of its neighborhood due to the numerical error. The main objective of the paper is to construct modified numerical methods for solving SDEs that preserve the first integral. In this study, exact solutions for three SDE systems with the first integral are obtained, and the proposed modification of numerical methods is tested on these systems.

Keywords: numerical methods, statistical modeling, stochastic differential equations, manifold, first integral, projection.

1. Введение

В работах [1, 2] численно исследовались системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с первым интегралом, решение которых находится на гладком много-

*Работа выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0002) и при поддержке РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

образии, т. е. на гладкой поверхности. Такие СДУ определяют математические модели инвариантных стохастических динамических систем, для состояний которых выполняется некоторый закон сохранения, например энергии, массы, импульса, момента импульса [3–6]. Для механических систем, находящихся под действием случайных возмущений, это означает наличие голономных связей [7, 8].

В работе [2] был проведен сравнительный анализ восьми численных методов по точности вычисления первого интеграла, задающего гладкое интегральное многообразие. Было показано, что СДУ, явное решение которых неизвестно, но известен первый интеграл, можно использовать для проверки свойств численных методов решения СДУ.

Из-за погрешности численного метода моделируемые траектории решения СДУ не принадлежат многообразию, а лежат в некоторой его окрестности, которая определяется шагом численного интегрирования и порядком сходимости численного метода. В данной работе предложена модификация численных методов, применение которой обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий заданному многообразию. Ранее такой подход использовался для построения проекционных (геометрических) численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [7, 9]. Специальные численные методы решения СДУ построены для стохастических гамильтоновых систем [10], которые являются частным случаем динамических систем с первым интегралом.

2. Основные определения

Теория первых интегралов для СДУ подробно изложена в работах [3, 4, 6]. В данной статье будут рассмотрены СДУ в смысле Стратоновича, так как построение модели стохастической динамической системы по заданному первому интегралу оказывается проще для СДУ в смысле Стратоновича, чем для СДУ в смысле Ито [2].

Рассмотрим модель стохастической динамической системы, заданную векторным СДУ в смысле Стратоновича:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что $X \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор состояния, $t \in T = [t_0, T]$ — время; $a(t, X): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — n -мерная вектор-функция; $\sigma(t, X): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — $(n \times s)$ -мерная матричная функция; $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, $W(t)$ и начальный вектор состояния $X_0 \in \mathbb{R}^n$ независимы. Условия существования решения уравнения (1) приведены, например, в [11].

СДУ в смысле Стратоновича (1) соответствует следующее СДУ в смысле Ито:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2)$$

где

$$f_i(t, X) = a_i(t, X) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{il}(t, X)}{\partial x_j} \sigma_{jl}(t, X), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определение [4]. Функция

$$M(t, X): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется первым интегралом системы СДУ (1), если она не равна тождественно постоянной, но с вероятностью 1 на любой траектории решения $X(t)$ системы (1) принимает постоянное значение, зависящее только от X_0 , т. е. выполняется равенство

$$M(t, X(t)) = M(t_0, X_0).$$

В общем случае первый интеграл — это функция времени и вектора состояния, сохраняющая постоянное значение на любой траектории решения $X(t)$. Если функция $M(t, X)$ непрерывно дифференцируема по переменной t и по координатам вектора X , то для стохастического дифференциала случайного процесса $M(t, X(t))$ выполняется равенство

$$dM(t, X(t)) = 0,$$

т. е. для СДУ в смысле Стратоновича

$$\frac{\partial M(t, X)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t, X) \frac{\partial M(t, X)}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \sigma_{il}(t, X) \frac{\partial M(t, X)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, s.$$

Предполагается, что для градиента функции $M(t, X)$ выполнено условие $0 < \delta \leq |\nabla M(t, X)|$. Наличие первого интеграла означает, что любая траектория решения $X(t)$ принадлежит поверхности $M(t, X) = C$ в $T \times \mathbb{R}^n$, где константа C определяется начальным вектором состояния X_0 .

3. Модифицированные численные методы решения СДУ с первым интегралом

Пусть $\{t_k\}$ — равномерная сетка с заданным постоянным шагом h , определяющая разбиение отрезка времени T ,

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad t_N = T, \quad N = \frac{T - t_0}{h}.$$

Обозначим через X_k численное решение СДУ (1) в момент времени t_k , полагая, что

$$X_0 = X(t_0).$$

Запишем численный метод решения СДУ (1) в общем виде

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k), \tag{3}$$

где функция F определяется конкретным численным методом решения СДУ [12–14].

Будем предполагать, что

$$M(t_k, X_k) = C,$$

т. е. точка (t_k, X_k) принадлежит заданной поверхности. В общем случае, из-за погрешности численного метода, в следующем узле сетки t_{k+1} численное решение X_{k+1} не удовлетворяет условию $M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C$, т. е.

$$M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C' \neq C.$$

Предлагаемая методика коррекции численного решения состоит в построении проекции точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$. Для этого:

- найдем вектор нормали $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$ в точке (t_{k+1}, X_{k+1}) к поверхности $M(t, X) = C'$;
- запишем параметрическое уравнение прямой в пространстве \mathbb{R}^n , проходящей через точку X_{k+1} с направляющим вектором $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$,

$$\chi(\alpha) = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \quad \alpha \in \mathbb{R}; \tag{4}$$

- найдем точку пересечения прямой (4) и поверхности $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ как решение системы:

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \\ M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) = C. \end{cases}$$

Таким образом, проекция \tilde{X}_{k+1} точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ определяется решением нелинейного уравнения

$$M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) = C \quad (5)$$

относительно параметра α .

Здесь предполагается, что существует конечное решение этого уравнения. Если оно имеет несколько решений, то требуется найти α , соответствующее минимальному расстоянию между точками X_{k+1} и \tilde{X}_{k+1} в смысле евклидовой метрики, т. е. минимальному значению $|\alpha|$ из возможных. Таким образом,

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}),$$

где

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{|\alpha| : M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) = C\}.$$

Предложенную методику коррекции численного решения можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть СДУ (1) имеет первый интеграл $M(t, X) = C$, $M(t, X) \in C^{1,1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n)$, частные производные функции $M(t, X)$ по координатам вектора X ограничены и $0 < \delta \leq |\nabla M(t, X)| \leq M^*$; X_{k+1} — численное решение в момент времени t_{k+1} , полученное численным методом (3), имеющим p -й порядок потраекторной аппроксимации, т. е.

$$E(|X(t_{k+1}) - X_{k+1}|/X_k = X(t_k)) = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (6)$$

причем

$$M(t_k, X_k) = C, \quad M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C' \neq C,$$

и существует хотя бы одно решение уравнения (5). Тогда скорректированное численное решение

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \quad (7)$$

где

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{|\alpha| : M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) = C\},$$

лежит на поверхности $M(t, X) = C$ и сохраняет порядок потраекторной аппроксимации решения.

Доказательство. Так как по построению $M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) = C$, то нетрудно доказать (аналогично доказательству в [2]), что из потраекторной аппроксимации (6) и ограниченности производных функции $M(t, X)$ по координатам вектора X следует соотношение

$$E(|M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) - M(t_{k+1}, X_{k+1})|/X_k = X(t_k)) = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Разложив в ряд Тейлора функцию $M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1})$ в точке (t_{k+1}, X_{k+1}) и оставив линейную часть, получаем

$$\begin{aligned} & |M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) - M(t_{k+1}, X_{k+1})| \\ &= |M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) - M(t_{k+1}, X_{k+1})| \\ &= |[\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})]^T \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})| + \rho = |\alpha^*| \cdot |\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})|^2 + \rho, \end{aligned}$$

где $\rho = o(|\alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})|)$.

Так как $|\nabla M(t, X)| \leq M^*$, то $E(\alpha^*/X_k = X(t_k)) = O(h^p)$, поэтому

$$\begin{aligned} E(|X(t_{k+1}) - \tilde{X}_{k+1}|/X_k = X(t_k)) &\leq E(|X(t_{k+1}) - X_{k+1}|/X_k = X(t_k)) + \\ &E(|\alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})|/X_k = X(t_k)) = O(h^p) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что предложенная коррекция численного решения не ухудшает порядок потраекторной аппроксимации используемого численного метода. Утверждение доказано. \square

Замечание 1. Условие ограниченности частных производных функции $M(t, X)$ по координатам вектора X необязательно должно выполняться на всем множестве $\Gamma \times \mathbb{R}^n$, достаточно его выполнения в некоторой окрестности поверхности $M(t, X) = C$.

Замечание 2. В приведенной теореме предполагается, что существует решение уравнения (5). Чтобы получить функциональную зависимость параметра α^* от точки (t, X) , должны быть выполнены условия теоремы о неявной функции [15] и, как следствие, векторы $\nabla M(t, X)$ в точках (t_{k+1}, X_{k+1}) и $(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}))$ не должны быть ортогональны.

Замечание 3. Проекцию (7) следует находить на каждом шаге используемого численного метода решения СДУ, учитывая, что α^* — это функция точки (t, X) . Найденная проекция используется на следующем шаге, т.е. вместо формулы (3) имеем

$$X_{k+1} = F(t_k, \tilde{X}_k) \quad (8)$$

и тогда $M(t_k, \tilde{X}_k) = C$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Замечание 4. Коррекция численного решения (7) получена в результате приближенного проектирования, так как вектор $\nabla M(t, X)$ определяется в точке (t_{k+1}, X_{k+1}) , которая не принадлежит поверхности $M(t, X) = C$. В результате может не существовать решения уравнения (5), в этом случае нужно уменьшить шаг численного интегрирования h .

4. Примеры двумерных систем СДУ с первым интегралом

Рассмотрим три примера линейных систем СДУ с мультипликативным шумом ($n = 2$, $s = 1$), приведенные в работах [1, 2]. В работе [2] с большой степенью надежности показано, что траектории решения этих систем находятся на заданном гладком многообразии в $\Gamma \times \mathbb{R}^2$, $t_0 = 0$. В данной работе найдем аналитические решения этих систем СДУ, а также значения параметров α^* , которые необходимы для коррекции численного решения.

Обозначим через $m(t)$ вектор математического ожидания, $\Gamma(t)$ матрицу вторых моментов:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex_1(t) \\ Ex_2(t) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(t) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex_1^2(t) & Ex_1(t)x_2(t) \\ Ex_2(t)x_1(t) & Ex_2^2(t) \end{bmatrix}.$$

Так как смешанные моменты $\Gamma_{12}(t)$ и $\Gamma_{21}(t)$ равны, то вместо матрицы $\Gamma(t)$ будем рассматривать вектор

$$\tilde{\Gamma}(t) = [\Gamma_{11}(t), \Gamma_{12}(t), \Gamma_{22}(t)]^\top.$$

Пример 1. Двумерная стохастическая система с вектором состояния $X = [x_1 \ x_2]^\top$, траектории которой с вероятностью 1 принадлежат эллиптическому (круговому) цилиндру $M(t, X) = x_1^2 + x_2^2 = C = \text{const}$, задается векторным СДУ в смысле Стратоновича:

$$dX(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} X(t) \circ dw(t), \quad X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Начальные условия для СДУ (9) определяются константой C так, чтобы $x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 = C$.

Так как со стохастическим интегралом Стратоновича можно обращаться по обычным правилам (имеются в виду правила замены переменных, интегрирования по частям и т. п.), аналитическое решение заданного СДУ имеет вид [16]:

$$X(t) = e^{At+Sw(t)} X_0 = e^{At} e^{Sw(t)} X_0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матриц A и S комплексные: $\lambda_A = \pm i$, $\lambda_S = \pm \sqrt{2}i$, поэтому

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{2}w(t) & \sin \sqrt{2}w(t) \\ -\sin \sqrt{2}w(t) & \cos \sqrt{2}w(t) \end{bmatrix} X_0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t + \sqrt{2}w(t)) & \sin(t + \sqrt{2}w(t)) \\ -\sin(t + \sqrt{2}w(t)) & \cos(t + \sqrt{2}w(t)) \end{bmatrix} X_0. \end{aligned}$$

Для равномерной сетки $\{t_k\}$ с шагом h решение можно записать в рекуррентном виде

$$X_{k+1} = e^{Ah} e^{S\Delta w_k(h)} X_k = \begin{bmatrix} \cos(h + \sqrt{2}\Delta w_k(h)) & \sin(h + \sqrt{2}\Delta w_k(h)) \\ -\sin(h + \sqrt{2}\Delta w_k(h)) & \cos(h + \sqrt{2}\Delta w_k(h)) \end{bmatrix} X_k,$$

где $\Delta w_k(h)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией h .

Формула для аналитического решения имеет простой геометрический смысл, поскольку $e^{At+Sw(t)}$ — матрица поворота, т. е. $X(t)$ — результат поворота точки X_0 на угол $t + \sqrt{2}w(t)$ относительно нуля. Это ортогональное преобразование, сохраняющее расстояние между точками в \mathbb{R}^2 : $|X(t)|^2 = |X_0|^2 = C$, $|X|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Аналогично для решения в рекуррентном виде X_{k+1} — результат поворота точки X_k на угол $h + \sqrt{2}\Delta w_k(h)$, $|X_{k+1}|^2 = |X_k|^2 = C$.

Вектор математического ожидания $m(t)$, матрица вторых начальных моментов $\Gamma(t)$ и вектор $\tilde{\Gamma}(t)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям [16]:

$$\frac{dm(t)}{dt} = Bm(t), \quad \frac{d\Gamma(t)}{dt} = B\Gamma(t) + \Gamma(t)B^\top + S\tilde{\Gamma}(t)S^\top, \quad \frac{d\tilde{\Gamma}(t)}{dt} = \tilde{S}\tilde{\Gamma}(t).$$

Матрицу B можно получить, перейдя от уравнения (9) к СДУ в смысле Ито:

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} X(t) dw(t),$$

а элементы матрицы \tilde{S} определяются из правой части дифференциального уравнения для $\Gamma(t)$ после подстановки в нее матриц B и S :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матриц B и \tilde{S} : $\lambda_B = -1 \pm i$ и $\lambda_{\tilde{S}} = -4 \pm 2i, 0$. Таким образом,

$$m(t) = e^{Bt} m(0) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} m(0),$$

$$\tilde{\Gamma}(t) = e^{\tilde{S}t} \tilde{\Gamma}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-4t} \cos 2t) & e^{-4t} \sin 2t & \frac{1}{2}(1 - e^{-4t} \cos 2t) \\ \frac{1}{2}e^{-4t} \sin 2t & e^{-4t} \cos 2t & \frac{1}{2}e^{-4t} \sin 2t \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-4t} \cos 2t) & -e^{-4t} \sin 2t & \frac{1}{2}(1 + e^{-4t} \cos 2t) \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}(0).$$

Теперь найдем параметр α^* . В этом примере $M(t, X) = x_1^2 + x_2^2$, следовательно, $\nabla M(t, X) = [2x_1 \ 2x_2]^T = 2X$.

Запишем уравнение (5), опуская для краткости индекс,

$$M(t, X + \alpha \nabla M(t, X)) = (x_1 + 2\alpha x_1)^2 + (x_2 + 2\alpha x_2)^2 = C,$$

или $(x_1^2 + x_2^2)(1 + 2\alpha)^2 = C$. Корни этого уравнения

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{C}{x_1^2 + x_2^2}} \right),$$

и минимальному значению $|\alpha|$ соответствует величина

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{C}{x_1^2 + x_2^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{C}{M(t, X)}} \right).$$

Тогда формула (7) для нахождения проекции численного решения примет вид

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{C}{M(t_{k+1}, X_{k+1})}} \right) \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}) = X_{k+1} \sqrt{\frac{C}{M(t_{k+1}, X_{k+1})}}.$$

Пример 2. Двумерная стохастическая система с вектором состояния $X = [x_1 \ x_2]^T$, траектории которой с вероятностью 1 принадлежат гиперболическому цилиндру $M(t, X) = x_1 x_2 = C = \text{const}$, задается векторным СДУ в смысле Стратоновича:

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t) \circ dw(t), \quad X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Начальные условия для СДУ (10) определяются константой C так, чтобы $x_{1,0} x_{2,0} = C$.

Запишем аналитическое решение заданного векторного СДУ, пользуясь тем же соотношением, что и в предыдущем примере, но при

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы A и S являются диагональными, то нахождение матричных экспонент не представляет труда, и решение имеет вид

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{w(t)} & 0 \\ 0 & e^{-w(t)} \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} e^{-t+w(t)} & 0 \\ 0 & e^{t-w(t)} \end{bmatrix} X_0,$$

или в рекуррентном виде в узлах равномерной сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = e^{Ah} e^{S\Delta w_k(h)} X_k = \begin{bmatrix} e^{-h+\Delta w_k(h)} & 0 \\ 0 & e^{h-\Delta w_k(h)} \end{bmatrix} X_k,$$

где $\Delta w_k(h)$, как и ранее, — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией h .

Таким образом, $x_1(t) = x_{1,0}e^{-t+w(t)}$ и $x_2(t) = x_{2,0}e^{t-w(t)}$, следовательно, $x_1(t)x_2(t) = x_{1,0}x_{2,0} = C$. Из рекуррентной формулы следует тождество $x_{1,k+1}x_{2,k+1} = x_{1,k}x_{2,k} = C$.

По аналогии с примером 1 найдем вектор математического ожидания $m(t)$ и матрицу вторых моментов $\Gamma(t)$. Для этого запишем соответствующее уравнению (10) СДУ в смысле Ито:

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t)dw(t),$$

тогда

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad m(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}t} \end{bmatrix} m(0).$$

Элементы матрицы вторых моментов найдем через решение уравнения для вектора $\tilde{\Gamma}(t)$, определив элементы матрицы \tilde{S} из правой части дифференциального уравнения для $\Gamma(t)$ после подстановки в нее матриц B и S :

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \tilde{\Gamma}(0).$$

Согласно предложенной методике для параметра α^* получено следующее выражение при $M(t, X) = x_1x_2$ (здесь требуется найти корни квадратного уравнения, отбросив затем один из корней):

$$\alpha^* = \frac{-|X_{k+1}|^2 + \sqrt{|X_{k+1}|^4 - 4M(t_{k+1}, X_{k+1})(M(t_{k+1}, X_{k+1}) - C)}}{2M(t_{k+1}, X_{k+1})}.$$

Пример 3. Двумерная стохастическая система с вектором состояния $X = [x_1 \ x_2]^\top$, траектории которой с вероятностью 1 принадлежат параболическому цилиндру $M(t, X) = x_2 - x_1^2 = C = \text{const}$, задается векторным СДУ в смысле Стратоновича:

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2x_1(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1(t) \end{bmatrix} \circ dw(t), \quad X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Начальные условия для СДУ (11) определяются константой C так, чтобы $x_{2,0} - x_{1,0}^2 = C$.

Точное решение СДУ (11) находится непосредственно путем интегрирования сначала уравнения для первой координаты, а затем для второй координаты вектора X :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{1,0} - t + w(t) \\ x_{2,0} + (t - w(t))^2 - 2x_{1,0}(t - w(t)) \end{bmatrix}.$$

В узлах равномерной сетки $\{t_k\}$ получаем

$$X_k = \begin{bmatrix} x_{1,0} - t_k + w(t_k) \\ x_{2,0} + (t_k - w(t_k))^2 - 2x_{1,0}(t_k - w(t_k)) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что здесь $x_1(t) = x_{1,0} - t + w(t)$ и $x_2(t) = x_{2,0} + (t - w(t))^2 - 2x_{1,0}(t - w(t))$, следовательно, $x_2(t) - x_1^2(t) = x_{2,0} - x_{1,0}^2 = C$. Аналогично $x_{2,k} - x_{1,k}^2 = C$.

Вектор математического ожидания $m(t)$ и вектор вторых моментов $\tilde{\Gamma}(t)$, который определяет и матрицу $\Gamma(t)$, имеют вид:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_{1,0} - t \\ m_{2,0} + t^2 + t - 2m_{1,0}t \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{1,0} + t^2 - 2tm_{1,0} + t \\ \tilde{\Gamma}_{2,0} - t^3 + 3t^2(m_{1,0} - 1) - t(m_{2,0} + 2\tilde{\Gamma}_{1,0} - 3m_{1,0}) \\ \tilde{\Gamma}_{3,0} + t^4 + t^3(6 - 4m_{1,0}) + t^2(3 + 4\tilde{\Gamma}_{1,0} - 12m_{1,0} + 2m_{2,0}) + t(4\tilde{\Gamma}_{1,0} + 2m_{2,0} - 4\tilde{\Gamma}_{2,0}) \end{bmatrix}.$$

При $M(t, X) = x_2 - x_1^2$, как и в предыдущем примере, укажем только окончательный результат для параметра α^* :

$$\alpha^* = \frac{1 + 4x_{1,k+1}^2 - \sqrt{8x_{1,k+1}^2(2x_{2,k+1} + 1 - 2C) + 1}}{8x_{1,k+1}^2}.$$

5. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим два метода численного решения СДУ: стохастический метод Эйлера (метод Эйлера–Маруямы) [12] для решения СДУ в смысле Ито (2):

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta\zeta_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad N = \frac{T - t_0}{h}, \quad (12)$$

и метод из семейства обобщенных методов типа Розенброка для решения соответствующего СДУ в смысле Стратоновича (1), предложенный в работе Т.А. Авериной [13],

$$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2} \left[I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_k, X_k)}{\partial x} \right]^{-1} \times \\ \left[a(t_k, X_k) + a(t_k, X_k^p) \right] + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, X_k) + \sigma(t_k, X_k^p)) \Delta\zeta_k, \quad (13)$$

где

$$X_k^p = X_k + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta\zeta_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad N = \frac{T - t_0}{h}.$$

В формулах (12) и (13) $\Delta\zeta_k$ — s -мерный случайный вектор, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Метод Эйлера отличается простотой численной реализации, а метод типа Розенброка обладает лучшими свойствами устойчивости [13], что позволяет получать более точные

значения решения даже для достаточно больших шагов и интервалов интегрирования. При моделировании методом Эйлера системы СДУ необходимо задать в смысле Ито.

Напомним, что на произвольных системах СДУ оба метода (12), (13) имеют порядок потраекторной (сильной) сходимости $1/2$. На системах СДУ с одним шумом, а также на системах СДУ с постоянной матрицей диффузии, метод (13) имеет первый порядок сильной сходимости. Заметим, что рассматриваемые в примерах системы СДУ являются системами с одномерным шумом, поэтому метод (13) демонстрирует более высокий порядок потраекторной сходимости.

В этом пункте рассмотрены результаты тестирования методов (12) и (13) с учетом дополнительной коррекции численного решения и без нее на системах СДУ с первым интегралом. Исследовалась потраекторная сходимость численных методов, сравнивались точное и численное решения. Также оценивалась точность вычисления первых двух моментов решения при $t = T = 1$.

Отметим, что коррекция численного решения увеличивает трудоемкость метода, поскольку появляются дополнительные вычисления. Но в рассматриваемых примерах уравнение (5) для параметра решено аналитически, поэтому вычисление проекции численного решения (7) незначительно сказывается на времени вычислений, обеспечивая при этом выполнение основного свойства рассматриваемых динамических систем — сохранение первого интеграла.

Во всех примерах моделировалось $L = 10^5$ траекторий, т. е. строились дискретные аппроксимации $\{X_k^l\}$, $l = 1, 2, \dots, L$, приведенными выше численными методами.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |X(T) - X_N^l|, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |X(T) - \tilde{X}_N^l|,$$

где при вычислении ε взята дискретная аппроксимация $\{X_k^l\}$, полученная численным методом без учета коррекции, а при вычислении $\tilde{\varepsilon}$ взята дискретная аппроксимация $\{\tilde{X}_k^l\}$, полученная с учетом коррекции (7) и (8). Кроме того, будем вычислять

$$\varepsilon_M = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |M(T, X_N^l) - M(0, X_0)|.$$

Эта величина характеризует точность попадания дискретной аппроксимации (без учета коррекции) на заданную поверхность $M(t, X) = M(0, X_0)$ (точность вычисления первого интеграла).

Приведем формулы для оценок первых двух моментов по дискретной аппроксимации $\{X_k^l\}$:

$$m_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (X_N^l)_i, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L (X_N^l)_i (X_N^l)_j, \quad i, j = 1, 2,$$

а также по дискретной аппроксимации $\{\tilde{X}_k^l\}$:

$$\tilde{m}_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\tilde{X}_N^l)_i, \quad \tilde{\Gamma}_{ij} = \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L (\tilde{X}_N^l)_i (\tilde{X}_N^l)_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Для двумерных систем СДУ в примерах 1–3 были заданы следующие начальные значения: $x_{1,0} = x_{2,0} = 1$, т. е. поверхности определяются уравнениями:

- $x_1^2 + x_2^2 = C = 2$ (круговой цилиндр),
- $x_1 x_2 = C = 1$ (гиперболический цилиндр),
- $x_2 - x_1^2 = C = 0$ (параболический цилиндр).

Результаты статистического моделирования методами (12), (13) приведены в таблицах 1–9. Моделирование проводилось для шагов численного интегрирования: $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; N = T/h = 1/h$. Результаты статистического моделирования примера 1 приведены в табл. 1–3, примера 2 — в табл. 4–6, примера 3 — в табл. 7–9.

В табл. 1, 4, 7 приведены точные значения и оценки математического ожидания модуля отклонения численного решения от точного в последний момент времени $T = 1$. Из таблиц видно, что

- метод типа Розенброка (13) считает точнее метода Эйлера (12) как до коррекции численного решения, так и после;
- коррекция численного решения для обоих методов (12), (13) привела не только к обнулению погрешности отклонения от многообразия (ε_M), но и к уменьшению среднего отклонения от точного решения ($\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$);
- уменьшение шага численного интегрирования в 10 раз уменьшило погрешность у метода Эйлера (12) приблизительно в 3.16 раза, а у метода типа Розенброка (13) — в 10 раз (как до коррекции, так и после). Это подтверждает, что на системах с одним шумом (9)–(11) у метода Эйлера порядок потраекторной сходимости $p = 1/2$, а у метода типа Розенброка (13) порядок $p = 1$;
- коррекция численного решения сохранила порядок точности численного метода.

Оценки первого момента решения приведены в табл. 2, 5, 8, а оценки второго момента — в табл. 3, 6, 9 (в последних строках этих таблиц приведены точные значения соответствующих моментов). Из таблиц видно, что моменты с учетом коррекции не уточняются.

Таблица 1. Отклонение приближенного решения от точного (пример 1)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M	$\tilde{\varepsilon} (\varepsilon)$	ε_M
10^{-1}	0.187 (0.518)	1.407	0.114 (0.275)	0.738
10^{-2}	0.030 (0.163)	0.446	0.019 (0.032)	0.062
10^{-3}	0.0032 (0.051)	0.143	0.0020 (0.0032)	0.0061
10^{-4}	0.00033 (0.016)	0.045	0.00021 (0.00032)	0.00060

Таблица 2. Оценки математического ожидания (пример 1)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$
10^{-1}	0.571 (0.495)	-0.096 (-0.165)	0.451 (0.472)	-0.093 (-0.160)
10^{-2}	0.522 (0.510)	-0.113 (-0.121)	0.497 (0.503)	-0.113 (-0.119)
10^{-3}	0.512 (0.511)	-0.115 (-0.116)	0.510 (0.510)	-0.114 (-0.114)
10^{-4}	0.511 (0.511)	-0.110 (-0.110)	0.511 (0.511)	-0.112 (-0.112)
точное	0.508	-0.111	0.508	-0.111

Таблица 3. Оценки второго начального момента (пример 1)

h	Метод (12)			Метод (13)		
	$\tilde{\Gamma}_{11}$ (Γ_{11})	$\tilde{\Gamma}_{12}$ (Γ_{12})	$\tilde{\Gamma}_{22}$ (Γ_{22})	$\tilde{\Gamma}_{11}$ (Γ_{11})	$\tilde{\Gamma}_{12}$ (Γ_{12})	$\tilde{\Gamma}_{22}$ (Γ_{22})
10^{-1}	1.022 (1.219)	-0.014 (-0.014)	0.978 (1.216)	1.011 (1.358)	-0.0060 (-0.011)	0.989 (1.342)
10^{-2}	1.020 (1.038)	-0.0062 (-0.0059)	0.980 (1.002)	1.018 (1.048)	-0.0096 (-0.010)	0.982 (1.013)
10^{-3}	1.016 (1.018)	-0.0085 (-0.0082)	0.984 (0.986)	1.018 (1.021)	-0.0089 (-0.0090)	0.982 (0.985)
10^{-4}	1.021 (1.021)	-0.0051 (-0.0050)	0.979 (0.980)	1.019 (1.019)	-0.0099 (-0.0099)	0.981 (0.981)
точное	1.017	-0.0076	0.983	1.017	-0.0076	0.983

Таблица 4. Отклонение приближенного решения от точного (пример 2)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	$\tilde{\varepsilon}$ (ε)	ε_M	$\tilde{\varepsilon}$ (ε)	ε_M
10^{-1}	0.750 (0.858)	0.400	0.385 (0.397)	0.107
10^{-2}	0.218 (0.269)	0.114	0.046 (0.045)	0.010
10^{-3}	0.069 (0.085)	0.036	0.0046 (0.0045)	0.0010
10^{-4}	0.022 (0.027)	0.011	0.00047 (0.00046)	0.00010

Таблица 5. Оценки математического ожидания (пример 2)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	\tilde{m}_1 (m_1)	\tilde{m}_2 (m_2)	\tilde{m}_1 (m_1)	\tilde{m}_2 (m_2)
10^{-1}	0.611 (0.597)	3.954 (4.044)	0.615 (0.634)	4.129 (4.219)
10^{-2}	0.611 (0.609)	4.425 (4.435)	0.606 (0.608)	4.436 (4.448)
10^{-3}	0.607 (0.607)	4.467 (4.468)	0.607 (0.607)	4.447 (4.448)
10^{-4}	0.605 (0.605)	4.478 (4.478)	0.605 (0.605)	4.496 (4.496)
точное	0.607	4.482	0.607	4.482

Таблица 6. Оценки второго начального момента (пример 2)

h	Метод (12)			Метод (13)		
	$\tilde{\Gamma}_{11}$ (Γ_{11})	$\tilde{\Gamma}_{12}$ (Γ_{12})	$\tilde{\Gamma}_{22}$ (Γ_{22})	$\tilde{\Gamma}_{11}$ (Γ_{11})	$\tilde{\Gamma}_{12}$ (Γ_{12})	$\tilde{\Gamma}_{22}$ (Γ_{22})
10^{-1}	0.946 (1.014)	1.000 (0.927)	32.751 (33.849)	1.053 (1.117)	1.000 (1.081)	40.702 (41.244)
10^{-2}	1.024 (1.030)	1.000 (0.992)	51.013 (51.189)	0.987 (0.994)	1.000 (1.008)	52.559 (52.658)
10^{-3}	0.981 (0.982)	1.000 (0.999)	54.637 (54.651)	0.961 (0.961)	1.000 (1.001)	54.348 (54.358)
10^{-4}	0.976 (0.976)	1.000 (1.000)	54.412 (54.415)	0.976 (0.976)	1.000 (1.000)	56.096 (56.097)
точное	1.000	1.000	54.598	1.000	1.000	54.598

Таблица 7. Отклонение приближенного решения от точного (пример 3)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	$\tilde{\varepsilon}$ (ε)	ε_M	$\tilde{\varepsilon}$ (ε)	ε_M
10^{-1}	0.311 (0.381)	0.381	0.062 (0.080)	0.080
10^{-2}	0.087 (0.113)	0.113	0.0057 (0.0080)	0.0080
10^{-3}	0.028 (0.036)	0.036	0.00057 (0.00080)	0.00080
10^{-4}	0.0087 (0.011)	0.011	0.00006 (0.00008)	0.00008

Таблица 8. Оценки математического ожидания (пример 3)

h	Метод (12)		Метод (13)	
	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$	$\tilde{m}_1 (m_1)$	$\tilde{m}_2 (m_2)$
10^{-1}	0.0590 (0.00047)	0.962 (0.907)	0.0250 (0.0021)	1.019 (1.009)
10^{-2}	0.0031 (-0.0020)	0.991 (0.985)	0.0090 (0.0069)	0.998 (0.997)
10^{-3}	0.0030 (0.0025)	1.007 (1.006)	0.0029 (0.0027)	1.007 (1.007)
10^{-4}	-0.0019 (-0.0020)	0.999 (0.999)	-0.00012 (-0.00014)	1.000 (1.000)
точное	0.000	1.000	0.000	1.000

Таблица 9. Оценки второго начального момента (пример 3)

h	Метод (12)			Метод (13)		
	$\tilde{\Gamma}_{11} (\Gamma_{11})$	$\tilde{\Gamma}_{12} (\Gamma_{12})$	$\tilde{\Gamma}_{22} (\Gamma_{22})$	$\tilde{\Gamma}_{11} (\Gamma_{11})$	$\tilde{\Gamma}_{12} (\Gamma_{12})$	$\tilde{\Gamma}_{22} (\Gamma_{22})$
10^{-1}	0.962 (1.007)	0.241 (0.2020)	2.688 (2.698)	1.019 (1.009)	0.117 (0.101)	3.095 (3.054)
10^{-2}	0.991 (0.995)	0.012 (0.0095)	2.933 (2.924)	0.998 (0.997)	0.022 (0.022)	2.972 (2.965)
10^{-3}	1.007 (1.007)	0.013 (0.013)	3.062 (3.062)	1.007 (1.007)	0.011 (0.011)	3.059 (3.058)
10^{-4}	0.999 (0.999)	-0.0066 (-0.0066)	2.999 (2.999)	1.000 (1.000)	-0.0022 (-0.0022)	3.028 (3.028)
точное	1.000	0.000	3.000	1.000	0.000	3.000

На рисунках 1–4 дополнительно для примера 1 показаны результаты численного моделирования на расширенном временном интервале $[0, 10]$ с шагом численного интегрирования $h = 0.01$. Слева приведены рисунки для метода Эйлера, а справа — для метода типа Розенброка. Порядок этих рисунков следующий:

- траектории на заданной поверхности (на круговом цилиндре),
- траектории координаты $x_1(t)$,
- траектории координаты $x_2(t)$,
- отклонение траектории от заданной поверхности (если это отклонение положительно, то траектория вне цилиндра, а если отрицательно, то — внутри цилиндра)

Цифрой 1 обозначено численное решение без коррекции, а цифрой 2 — с учетом коррекции (на цветных рисунках — это, соответственно, красный и синий цвет). На всех рисунках численное решение с учетом коррекции почти совпадает с точным решением (на цветных рисунках — это, соответственно, синий и черный цвет). Особо отметим, что моделирование этих траекторий проводилось по одной и той же выборочной траектории винеровского процесса.

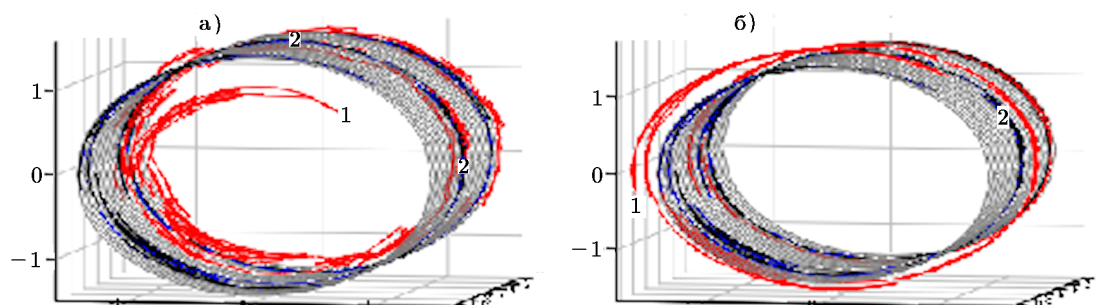


Рис. 1. Круговой цилиндр (пример 1). Траектории численного решения (1 — без коррекции, 2 — с учетом коррекции): а) — метод (12), б) — метод (13)

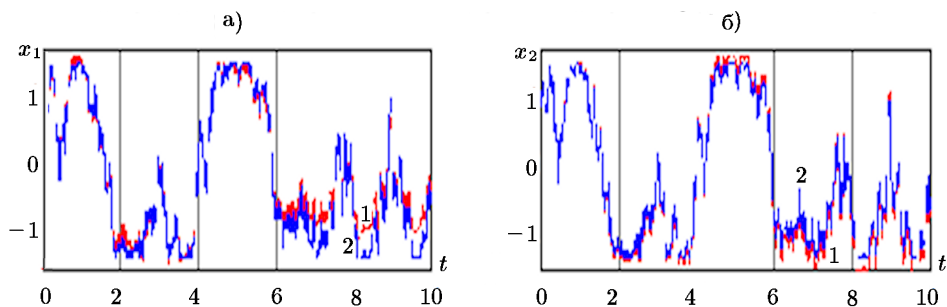


Рис. 2. Координата x_1 для траекторий, приведенных на рис. 1: а) — метод (12), б) — метод (13)

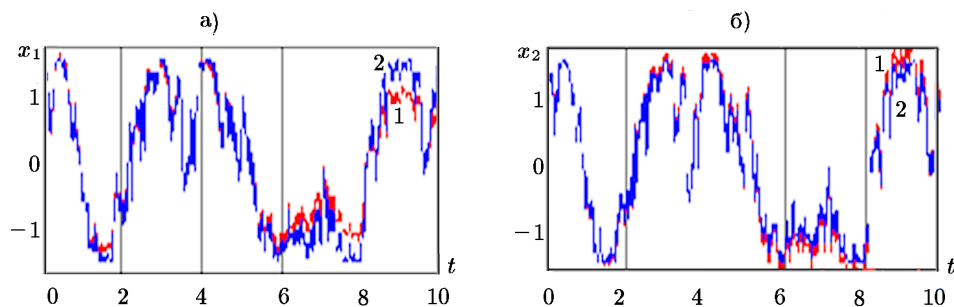


Рис. 3. Координата x_2 для траекторий, приведенных на рис. 1: а) — метод (12), б) — метод (13)

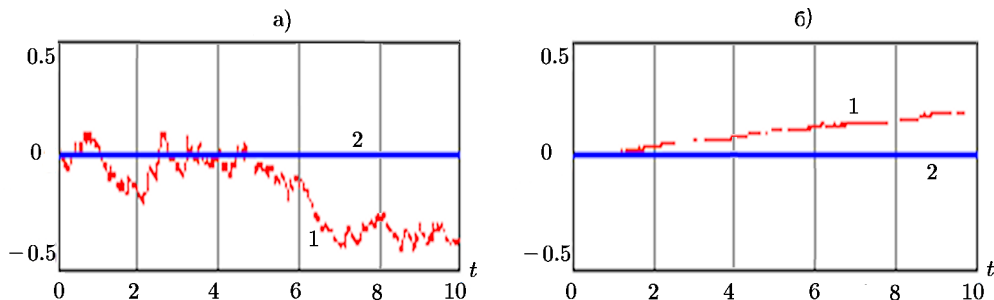


Рис. 4. Отклонение траекторий, приведенных на рис. 1, от многообразия: а) — метод (12), б) — метод (13)

На рисунках с траекториями на заданных поверхностях видно, что

- без коррекции решения метод типа Розенброка считает точнее и показывает лучшие свойства устойчивости, чем метод Эйлера,
- коррекция решения приводит к сохранению первого интеграла. Рисунки с координатами траекторий демонстрируют, что коррекция численного решения приводит также и к уточнению каждой компоненты решения. Эти графики наглядно демонстрируют результаты численных экспериментов, приведенные в соответствующих таблицах.

6. Заключение

В данной работе предложена и исследована модификация численных методов, применение которой обеспечивает принадлежность моделируемых траекторий решения СДУ заданному гладкому многообразию. Модификация состоит в добавлении на каждом шаге корректировки, которая проецирует численное решение на заданную поверхность и

уменьшает погрешность метода. Апробация предложенной модификации проведена для стохастического метода Эйлера (метода Эйлера–Маруямы) и обобщенного метода типа Розенброка на линейных системах СДУ с мультипликативным одномерным шумом [2], решения которых находятся на цилиндрических поверхностях второго порядка: эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах. Для этих систем найдено аналитическое решение и аналитические выражения первых двух моментов, что позволило продемонстрировать более точную оценку решения и функционалов от решения за счет предложенной модификации.

Численные методы решения СДУ — это основа для решения задач анализа, синтеза, фильтрации и прогнозирования [17–20], поэтому полученные результаты могут в дальнейшем применяться для инвариантных стохастических динамических систем при решении перечисленных задач.

Литература

1. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017. — IEEE, 2017. — P. 34–37.
2. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 33, № 1. — P. 1–13.
3. **Дубко В.А.** Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. — Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.
4. **Дубко В.А.** Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы. — Киев: Логос, 2012.
5. **Дубко В.А., Карачанская Е.В.** Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова // Дальневосточный математический журнал. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 200–216.
6. **Карачанская Е.В.** Случайные процессы с инвариантами. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. университета, 2014.
7. **Mukharlyamov R.G., Beshaw A.W.** Solving differential equations of motion for constrained mechanical systems // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — № 3. — С. 81–91.
8. **Галиуллин И.А.** Связи в механике: теория поверхностей. — М.: Изд-во МАИ, 2016.
9. **Hairer E., Lubich C., Wanner G.** Geometric Numerical Integration. Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. — Springer, 2006.
10. **Milshtein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer, 2004.
11. **Леваков А.А.** Стохастические дифференциальные уравнения. — Минск: БГУ, 2009.
12. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.
13. **Аверина Т.А.** Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского гос. университета. Серия: Математика. Информатика. — 2012. — № 9. — С. 91–95.

14. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде Matlab. 5-е издание (переработанное и дополненное) // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — № 2. — <http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2017.2/article.2.1.html>
15. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Основы математического анализа. Ч. 1. — М.: Наука, 1982.
16. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
17. **Артемьев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Якунин М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д.** Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
18. **Гусев С.А.** Минимизация дисперсии оценки математического ожидания функционала диффузионного процесса на основе параметрического преобразования параболической краевой задачи // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 141–153. Перевод: Gusev S.A. Minimizing the variance of a mathematical expectation estimate for a diffusion process functional based on a parametric transformation of a parabolic boundary value problem // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, № 2. — P. 114–124.
19. **Рыбаков К.А.** Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. — М.: Изд-во МАИ, 2017.
20. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 1–11. Перевод: Averina T.A., Rybakov K.A. An approximate solution of the prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 1–10.

Поступила в редакцию 29 июня 2018 г.

После доработки 8 ноября 2018 г.

Принята к публикации 7 мая 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical modeling of random processes with invariants // Proc. of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017. — IEEE, 2017. — P. 34–37.
2. **Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.** Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 33, № 1. — P. 1–13.
3. **Dubko V.A.** Voprosy teorii i primeneniya stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii. — Vladivostok: DVO AN SSSR, 1989.
4. **Dubko V.A.** Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Izbrannye razdely. — Kiev: Logos, 2012.
5. **Dubko V.A., Karachanskaya E.V.** Stokhasticheskie pervye integraly, yadra integral'nykh invariantov i uravneniya Kolmogorova // Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 200–216.
6. **Karachanskaya E.V.** Sluchainye protsessy s invariantami. — Khabarovsk: Izd-vo Tikhookeanskogo gos. universiteta, 2014.
7. **Mukharlyamov R.G., Beshaw A.W.** Solving differential equations of motion for constrained mechanical systems // Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika. — 2013. — № 3. — С. 81–91.

8. **Galiullin I.A.** Svyazi v mekhanike: teoriya poverkhnostei. — M.: Izd-vo MAI, 2016.
9. **Hairer E., Lubich C., Wanner G.** Geometric Numerical Integration. Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. — Springer, 2006.
10. **Milshtein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer, 2004.
11. **Levakov A.A.** Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. — Minsk: BGU, 2009.
12. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.
13. **Averina T.A.** Ustoichivye chislennyye metody resheniya stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii v smysle Stratonovicha // Vestnik Buryatskogo gos. universiteta. Seriya: Matematika. Informatika. — 2012. — № 9. — S. 91–95.
14. **Kuznetsov D.F.** Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya: teoriya i praktika chislennogo resheniya. S programmami v srede Matlab. 5-e izdanie (pererabotannoe i dopolnennoe) // Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya. — 2017. — № 2. — <http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2017.2/article.2.1.html>
15. **Il'in V.A., Poznyak E.G.** Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. 1. — M.: Nauka, 1982.
16. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
17. **Artemiev S.S., Marchenko M.A., Korneev V.D., Yakunin M.A., Ivanov A.A., Smirnov D.D.** Analiz stokhasticheskikh kolebanii metodom Monte-Karlo na superkomp'yuterakh. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2016.
18. **Gusev S.A.** Minimizatsiya dispersii otsenki matematicheskogo ozhidaniya funktsionala diffuzionnogo protsessa na osnove parametricheskogo preobrazovaniya parabolicheskoi kraevoi zadachi // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — 2011. — T. 14, № 2. — S. 141–153. Pervod: Gusev S.A. Minimizing the variance of a mathematical expectation estimate for a diffusion process functional based on a parametric transformation of a parabolic boundary value problem // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, № 2. — P. 114–124.
19. **Rybakov K.A.** Statisticheskie metody analiza i fil'tratsii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh. — M.: Izd-vo MAI, 2017.
20. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Priblizhennoe reshenie zadachi prognozirovaniya dlya stokhasticheskikh sistem diffuzionno-skachkoobraznogo tipa // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — 2017. — T. 20, № 1. — S. 1–11. Pervod: Averina T.A., Rybakov K.A. An approximate solution of the prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 1–10.

