

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ
ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

М. А. Гольдштик, Б. Н. Козлов

(Новосибирск)

Выведена замкнутая система уравнений движения энергии и граничные условия. Коэффициенты переноса и другие параметры найдены из элементарных газокинетических соображений для случая высокой концентрации твердой фазы. В качестве примера решена задача об «адиабатическом» течении Куэтта для сыпучей среды.

1. Гидродинамика многофазных систем, несмотря на большую область практических приложений и накопленный обширный экспериментальный материал, не имеет удовлетворительной теоретической базы [1]. Осредненные уравнения движения двухфазных потоков незамкнуты и применимы к неодномерным течениям, только если размеры элементов диспергированной фазы существенно меньше характерного размера канала или пограничного слоя.

Замыкание уравнений осредненного движения фаз возможно, если известен механизм их взаимодействия. Можно выделить две предельные ситуации — концентрация диспергированной фазы мала и ее элементы взаимодействуют только с несущей средой (газ, жидкость); концентрация диспергированной фазы близка к максимальной и перемещения ее элементов имеют порядок, существенно меньший их характерного размера.

Последняя система рассматривается в данной работе, являющейся обобщением статьи [2]. За основу рассмотрения принята двухжидкостная модель, описываемая феноменологическими гидродинамическими уравнениями, в которых коэффициенты переноса и другие величины находятся из элементарных кинетических соображений. Эти соображения грубы, но позволяют выявить основные связи и отражают главные стороны изучаемых явлений.

Будем следовать методу отдельного описания двух фаз, учитывая их взаимодействие с помощью объемной силы F_i . Поскольку размер твердых частиц принимается много меньшим характерных размеров течения, а концентрация их значительна, градиент «осредненной» скорости жидкости будет пренебрежимо мал по сравнению с локальными градиентами вблизи частиц, так что уравнения движения жидкости можно записать в форме Эйлера

$$(1.1) \quad \rho \varepsilon \frac{dv_i}{dt} = -F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \varepsilon g_i$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon v_i)}{\partial x_i} = 0$$

Сила — F_i , действующая на поток со стороны частиц, по порядку величины превышает стоковский член. Здесь ρ — плотность жидкости, ε — порозность, представляющая собой долю жидкости в единице объема, p — давление жидкой фазы, g_i — ускорение массовых сил, t — время, v_i —

средняя скорость жидкости, связанная со скоростью в пустом сечении v_{0i} соотношением $v_{0i} = \varepsilon v_i$.

Для твердой фазы уравнения движения

$$(1.3) \quad \rho_s \tau \frac{dw_i}{dt} = F_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s \tau g_i$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial (\rho_s \tau)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s \tau w_i)}{\partial x_i} = 0$$

где ρ_s — плотность материала твердой фазы, $\tau = 1 - \varepsilon$ — объемная концентрация твердой фазы, w_i — средняя скорость течения твердой фазы, T_{ij} — тензор напряжений в твердой фазе, рассматриваемой как сплошная среда, отражает взаимодействие частиц твердой фазы.

Твердую фазу считаем состоящей из одинаковых шаров диаметра d . Тогда число частиц в единице объема $n = 6 \tau / \pi d^3$. Из сил, действующих на частицу со стороны жидкой фазы, учитываем силу гидравлического сопротивления и поперечную силу Магнуса, которая действует при обтекании вращающегося шара. В соответствии с этим можно написать

$$(1.5) \quad f_i = \zeta \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho |u|}{2} u_i - \frac{\pi d^3}{6} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\pi d^3}{3} \rho [\bar{u}, \omega]_i$$

Здесь ζ — коэффициент гидравлического сопротивления частицы ω — вектор ее угловой скорости, $u_i = \varepsilon \psi^{-1} (v_i - w_i)$ — максимальная скорость обтекания частиц, определенная по минимальному относительному проходному сечению ψ . Выражение для силы Магнуса получено в [3], а $\psi = 1 - 1.17 \tau^{2/3}$ [2], $\bar{u}_i = \varepsilon \varphi^{-1} (v_i - w_i)$ — средняя скорость обтекания частицы. Методом, аналогичным примененному в [2] для вычисления ψ , можно получить приближенное соотношение $\varphi = 1.09 (1 - \tau^{2/3})$.

При вычислении силы F_i будем предполагать, что вектор ω для частиц, заключенных в единице объема, ориентирован случайным образом, и поэтому сила Магнуса, как внутренняя, в соотношении импульсов не войдет. В соответствии с этим

$$(1.6) \quad F_i = n \langle f_i \rangle = \frac{3}{4} \frac{\zeta \tau}{d} \rho |u| u_i - \tau \frac{dp}{dx_i}$$

С учетом (1.6) уравнение (1.1) принимает вид

$$(1.7) \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{3}{4} \frac{\zeta \tau \rho}{\varepsilon d} |u| u_i$$

Сравнивая (1.7) и (1.1), можно решить вопрос о необходимости множителя ε перед $\partial p / \partial x_i$.

Для определения тензора T_{ij} предположим, что система частиц может рассматриваться как жидкость, удовлетворяющая постулатам Стокса [4]. Тогда для тензора T_{ij} можно записать общее выражение [4]

$$(1.8) \quad T_{ij} = - p_s \delta_{ij} + \mu D_{ij} - \gamma D_{ik} D_{kj} \quad (D_{ij} = \partial w_i / \partial x_j + \partial w_j / \partial x_i)$$

где D_{ij} — тензор скоростей деформаций, p_s , μ , γ — скаляры, зависящие от термодинамических параметров и инвариантов тензора D_{ij} . Введем величину $p_s = -1/3 (T_{ii} + \gamma D_{ik}^2)$, представляющую собой аналог гидростатического давления для системы частиц. Выражение (1.8) примет вид

$$(1.9) \quad T_{ij} = - \left(p_s + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu D_{ij} - \gamma D_{ik} D_{kj}$$

Будем считать, что подобно обычному газу система не обладает «памятью», т. е. будем пренебрегать эффектами типа второй вязкости. Это оправдывается тем, что частицы не имеют внутренних степеней свободы, кроме вращательных, которые предполагаются быстрорелаксирующими.

Для определения величин ρ_s , μ и γ конкретизируем модель среды, рассматривая твердую фазу как газ из твердых сфер. В [2] в предположении подобия неплотной упаковки с концентрацией τ и некоторой «эталонной» плотной упаковки с плотностью τ_0 было найдено расстояние между частицами $l = d [(\tau_0 / \tau)^{1/3} - 1]$.

В дисперсной среде частицы, совершая некоторое «среднее» движение, обладают также хаотическими скоростями. Для случая достаточно плотной среды, когда $l < d$, частица может столкнуться лишь с ближайшими соседями, остальные частицы для нее оказываются недоступными (явление «экранировки»). Длина свободного пробега частицы $\sim 2l$, время свободного пробега $t \approx 2l / c \sqrt{3}$, где c — скорость хаотического движения частиц, приходящаяся на одну степень свободы.

Время соударения двух шаров определяется скоростью звука c^* в веществе шаров и равно по порядку величины $t^* \approx 2d / c^*$, так что доля шаров, находящихся в состоянии столкновения, будет составлять (при $c \ll c^*$)

$$\beta_2 = \frac{t^*}{t} = \sqrt{3} \frac{d}{l} \frac{c}{c^*}$$

а доля шаров, находящихся в состоянии тройного и более высокой кратности столкновения, будет по порядку величины равна

$$(1.10) \quad \beta_3 \approx \frac{\beta_2}{2} 2\beta_2^3 = 3\beta_2^2 = \frac{9(c/c^*)^2}{[(\tau_0/\tau)^{1/3} - 1]^2}$$

Применимость модели газа предполагает неравенство

$$(1.11) \quad \beta_3 \ll 1$$

В этом случае кратными столкновениями, а следовательно, и коллективными эффектами можно пренебречь.

Под концентрированными системами будем понимать такие, для которых выполнено соотношение

$$(1.12) \quad l/d = (\tau_0/\tau)^{1/3} - 1 < 1$$

(при этом $\tau > 0.075$).

Из-за большой величины c^* существует широкий интервал концентраций, для которых неравенства (1.11) и (1.12) выполнены одновременно. Дальнейшее рассмотрение будет относиться к этой области, а также, в отдельных частях, и к области $l/d \geq 1$.

Для вычисления кинетических коэффициентов ввиду эффекта экранировки достаточно рассмотреть модель из двух слоев частиц, расположенных на расстоянии $l + d$ один от другого. Первый слой можно считать неподвижным, второй — движущимся со средней скоростью Δw . Частицы слоев имеют также вертикальную скорость c , связанную с хаотическим движением.

Число частиц, приходящих на единицу площади слоя

$$n(l+d) = \frac{6\tau}{\pi d^2} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/3}$$

В [2] здесь допущена неточность, которая в количественном отношении повлияла слабо. Один шар с массой m за единицу времени совершает

$c / 2 l$ ударов. Полное число шаров, пересекающих единичную площадку за единицу времени

$$N = 3 c \tau / \pi d^3 \eta, \quad \eta = 1 - (\tau / \tau_0)^{1/3}$$

так что импульс, передаваемый нормально через единицу поверхности в единицу времени, составит

$$(1.13) \quad p_s = 2 m c N = \rho_s c^2 \tau / \eta$$

Это соотношение совпадает с уравнением состояния плотного газа из твердых сфер [5]. Для случая кипящего слоя уравнение состояния (1.13) экспериментально подтверждено [А. Я. Гейл, ром] в его дипломной работе.

Величина вязкости μ может быть определена путем расчета переноса горизонтальной компоненты импульса из второго слоя в первый

$$T_t = N (m w_2 - m w_1) = \frac{1}{2} \rho_s d c \tau_0^{1/3} \frac{\tau^{2/3}}{\eta} \frac{dw}{dy}$$

где T_t — касательное напряжение, y — координата, нормальная плоскости скольжения. Отсюда

$$(1.14) \quad \mu = 1/2 \rho_s c d \tau_0^{1/3} \tau^{2/3} / \eta \approx 0.422 \rho_s c d \tau^{2/3} / \eta$$

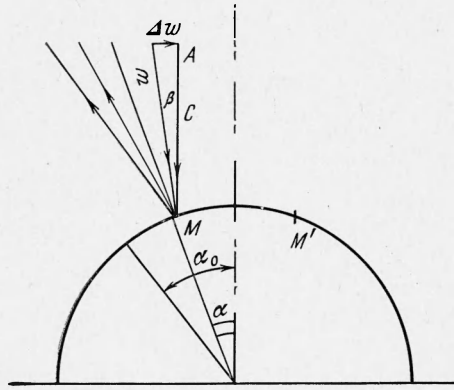
Для определения параметра γ , входящего в (1.9), рассмотрим член $\gamma D_{ik} D_{kj}$. Пусть имеется чисто сдвиговое плоское течение с $dw/dy = 1$. Тогда

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{ik} D_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что член $\gamma D_{ik} D_{kj}$ порождает нормальные напряжения под воздействием сдвига. При относительном движении двух слоев шары

будут «перекатываться» друг по другу, что должно привести к «распирающему» усилию.

Для количественной оценки эффекта рассмотрим полусферу из первого слоя (фиг. 1). При отсутствии сдвига частица, попадающая в точку M , движется по вертикали AM со скоростью c . При наличии сдвиговой скорости Δw траектория частицы отклоняется от вертикали на угол β , но вертикальная компонента скорости сохраняет свое значение, так что $w \cos \beta = c$. Вертикальный импульс, переданный частицей полусфере



$$i_\beta = m w [\cos \beta + \cos (2\alpha - \beta)] = m c \left[1 + \frac{\cos (2\alpha - \beta)}{\cos \beta} \right]$$

Вычислим избыток импульса, связанный со сдвигом

$$i_\beta - i_0 = m c \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$$

В симметричной точке M' , характеризуемой углом $-\alpha$, результат воздействия сдвига будет таким же, но с противоположным знаком. При наличии сдвига число частиц, падающих в единицу времени в точки M и M' , будет различным. Для точки M это число пропорционально $\cos (\alpha - \beta)$,

для точки M' — $\cos(\alpha + \beta)$. Суммарный для точек M и M' избыток импульса пропорционален разности $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$. С учетом этого для величины избыточного импульса на единицу площади получим

$$\begin{aligned} \Delta p_s &= \frac{Nmc}{2 \sin \alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha d\alpha = \\ &= \frac{p_s}{8} \frac{\alpha_0 - \frac{1}{4} \sin 4\alpha_0}{\sin \alpha_0} \operatorname{tg} \beta \sin \beta \end{aligned}$$

где α_0 — предельное значение угла α , определяемое из выражения

$$(1.15) \quad \sin \alpha_0 = \frac{l+d}{2d} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3}$$

Примем

$$\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta w}{c} = \frac{1}{c} \frac{dw}{dy} (l+d)$$

Считая τ близким к τ_0 и учитывая (1.15), получим $\alpha_0 = \pi/6 + \chi$, где χ — малый параметр. Ограничиваясь первыми степенями разложения, имеем

$$\Delta p_s \approx \frac{3}{32} p_s \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{2/3} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{2/3} \right] - \frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{\pi}{18} \right\} \frac{d^2}{c^2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$$

откуда

$$(1.16) \quad \gamma \approx 0.019 p_s d^2 / c^2$$

Величина $\gamma > 0$. Это соответствует действию распирающего усилия в том же направлении, что и сила давления. Из (1.16) видно, что член $\gamma D_{ik} D_{kj}$ становится сравнимым с p_s при $dw/dy \gg c/d$, т. е. лишь в крайне «неравновесных» условиях.

2. При составлении баланса энергии в некотором объеме следует учитывать, что внутренняя энергия хаотического движения частиц генерируется не только за счет диссипации среднего движения, но и за счет сил Магнуса, являющихся внутренними силами. Кроме генерации в системе происходит также и уменьшение внутренней энергии за счет перехода в тепловую энергию вследствие трения частиц о жидкость, одна о другую и вследствие неупругих соударений частиц. Помимо этих факторов в балансе энергии должен учитываться перенос за счет механической «теплопроводности».

Определим полную энергию твердой фазы, движущейся в объеме V , как сумму кинетической K и внутренней U энергий

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho_s \tau w^2 dV, \quad U = \int_V \rho_s \tau E dV$$

где E — внутренняя энергия единицы массы.

Применим к объему V закон сохранения полной энергии твердой фазы, согласно которому изменение полной энергии системы должно равняться работе внешних и внутренних сил, сложенной с энергией, подведенной к системе или отведенной от нее. Имеем

$$(2.1) \quad \frac{d(K+U)}{dt} = \int_V (F_i w_i + \rho_s \tau g_i w_i + Q_M - Q_D) dV + \int_S (T_{ij} w_j - q_i) dS_i$$

Здесь Q_D и Q_M — отнесенные к единице объема мощности диссипации и сил Магнуса, q_i — вектор потока энергии хаотического движения.

Если (1.3) свернуть с w_i и проинтегрировать по объему V , после стандартных преобразований получим

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(F_i w_i + \rho_s \tau g_i w_i - \frac{1}{2} T_{ij} D_{ij} \right) dV + \int_S T_{ij} w_j dS_i$$

Уравнение энергии (2.1) принимает вид

$$(2.2) \quad \frac{dU}{dt} = \int_V \left(Q_M - Q_D + \frac{1}{2} T_{ij} D_{ij} \right) dV - \int_S q_i dS_i$$

После приведения поверхностного интеграла к объемному и использования формулы

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_s E dV = \int_V \rho_s \frac{dE}{dt} dV$$

в силу произвольности объема V из (2.2) следует:

$$(2.3) \quad \rho_s \tau \frac{dE}{dt} = Q_M - Q_D + \frac{1}{2} T_{ij} D_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Внутренняя энергия H одной частицы состоит из энергии трех поступательных и трех вращательных степеней свободы. Выше вертикальная составляющая хаотической скорости была принята равной c , следовательно, энергия, приходящаяся на эту степень свободы, составляет $1/2 mc^2$. Для консервативной системы, находящейся в равновесном состоянии, имеет место равномерное распределение энергии по степеням свободы [6]. По аналогии примем $H = (3 + 3) mc^2 / 2 = 3 mc^2$, откуда $E = H / m = 3 c^2$. Из условия равномерного распределения энергий по степеням свободы следует:

$$(2.4) \quad mc^2 = 1/10 md^2 \omega^2, \quad \omega = \sqrt{10} c/d$$

где ω — среднеквадратичная компонента угловой скорости частицы.

Оценим мощность сил Магнуса Q_M . Сила Магнуса, действующая на одну частицу, определяется последним членом выражения (1.5), поэтому $Q_M = 2 \rho \tau [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]_i c_i$. Значение Q_M зависит от взаимной ориентации векторов u_i , ω_i и c_i . Для грубой оценки эффекта углы между u_i и ω_i , а также между $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]_i$ и c_i примем равными $\pi/4$. Если учесть, что длина вектора c_i составляет $\sqrt{3} c$, после использования (2.4) получим

$$Q_M = \sqrt{30} \rho \tau c^2 u / d$$

Коэффициент $\sqrt{30}$ является оценочным и должен быть впоследствии уточнен (например, экспериментально).

Мощность диссипации внутренней энергии Q_D складывается из нескольких частей. В [2] показано, что диссипацией в процессе свободного пробега частицы можно пренебречь. Основные диссипативные процессы связаны с ударными процессами.

Рассмотрим потери на трение при ударе. Пусть сталкиваются два шара с равными по величине и противоположно направленными скоростями. Шары до удара считаются невращающимися. Будем считать, что в процессе удара скольжение шаров друг относительно друга полностью прекращается. Так же как и в случае удара шара о неподвижную плоскость [7],

имеют место соотношения

$$w_{t1} = {}^5/7 w_{t0}, \quad \omega_1 = {}^{10}/7 d^{-1} w_{t0}$$

где w_t — касательная компонента скорости каждого шара; индекс 0 относится к состоянию до удара, индекс 1 — после. Если считать удар упругим, то $w_{n1} = -w_{n0}$. Начальная кинетическая энергия каждого шара $h_0 = 1/2 m (w_{t0}^2 + w_{n0}^2)$, а после удара

$$h_1 = \frac{m}{2} (w_{t1}^2 + w_{n1}^2) + \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{5}{14} m w_{t0}^2 + \frac{1}{2} m w_{n0}^2$$

Если принять $w_{t0} = c$, при ударе каждый шар «теряет» энергию $mc^2/7$, в тепло переходит $\Delta h = 2/7 mc^2$. Время между двумя соударениями одного шара $2l/c\sqrt{3}$. Этот шар осуществляет $c\sqrt{3}/2l$ столкновений в единицу времени. Полное число столкновений в единице объема в единицу времени

$$Z = \frac{1}{2} \frac{c\sqrt{3}}{2l} \frac{6\tau}{\pi d^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{c\tau}{\pi d^3 l}$$

Если диссипация связана только с ударным трением шаров, то

$$Q_D = \frac{\sqrt{3}}{14} \rho_s \frac{c^2}{d} \frac{\tau}{(\tau_c/\tau)^{1/3} - 1}$$

Если шары гладкие неупругие, то

$$\Delta h = (1 - k^2) mc^2$$

где k — коэффициент восстановления и диссипативные потери в единице объема

$$Q_D = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - k^2) \rho_s \frac{c^3}{d} \frac{\tau}{(\tau_c/\tau)^{1/3} - 1}$$

В общем случае можно считать

$$(2.5) \quad Q_D = \sigma \rho_s \frac{c^3}{d} \frac{\tau}{(\tau_c/\tau)^{1/3} - 1}$$

где в первом приближении

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{1 - k^2}{2} \right)$$

Этот параметр можно рассматривать как характеристику материала шаров, подлежащую определению из опыта. Более детальное рассмотрение выявляет слабую зависимость от концентрации τ . Гидродинамические возмущения, связанные с соударениями частиц, вносят вклад в величину Q_D . Две частицы, сближаясь, сообщают кинетическую энергию массе жидкости, заключенной между ними. Эта энергия диссипируется. Решить задачу о соударении двух шаров трудно даже для случая идеальной жидкости. Потеря энергии при соударении должна быть порядка ρc^2 с коэффициентом порядка единицы. Поэтому отношение гидродинамической диссипации к ударной порядка ρ/ρ_s для системы твердых частиц, взвешенных в газе, гидродинамической диссипацией можно пренебречь.

Член $1/2 T_{ij} D_{ij}$ в уравнении (2.3) характеризует работу расширения газа твердых сфер и диссипацию энергии среднего движения. Последний член (2.3) соответствует явлению теплопроводности.

Пусть слои шаров имеют различные значения величины $H = 3 mc^2$. Тогда перенос этой величины из слоя в слой определится соотношением

$$q = N(H_1 - H_2) = -N \frac{dH}{dy} (l + d)$$

откуда

$$(2.6) \quad q_i = -L \frac{\partial E}{\partial x_i}, \quad L = \mu \approx 0.422 \rho_s c d \tau^{2/3} / \eta$$

число Прандтля $Pr = \mu / L = 1$.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, описывающих поведение концентрированных дисперсных систем. Если жидкая фаза несжимаема, то $\tau, v_i, p; w_i, p_s, c$ относятся к числу неизвестных. Для их определения имеются уравнения (1.1) — (1.4), (1.13) и (2.3). В случае сжимаемой жидкой фазы систему надо дополнить уравнениями состояния и энергии жидкой фазы. В случае идеального газа эти уравнения таковы:

$$(2.7) \quad p = \rho RT, \quad \rho c_p \frac{dT}{dt} = v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q$$

где R — универсальная газовая постоянная, c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, T — абсолютная температура, λ — коэффициент теплопроводности газа, Q — тепло, полученное газом от твердой фазы. Используя (1.6) и (1.7), второе уравнение (2.7) можно представить в виде

$$(2.8) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(c_p T + \frac{v_i^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

Если в дисперсной системе существенны тепловые процессы, например, при наличии тепловыделения Q_p в твердой фазе, следует написать уравнение баланса тепловой энергии для твердой фазы

$$(2.9) \quad \rho_s \tau c_s \frac{dT_s}{dt} = Q_p - Q + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Lambda \frac{\partial T_s}{\partial x_i} \right)$$

где c_s и T_s — теплоемкость и температура твердой фазы, Λ — диффузионная теплопроводность, которая в ряде случаев может играть существенную роль [8]. Величина Q_p включает в себя диссипативное тепло Q_D . В случае конвективного теплообмена

$$Q = 6 \tau d^{-1} \alpha (T_s - T)$$

где α — коэффициент теплоотдачи.

3. Граничные условия для параметров, характеризующих жидкую фазу, формулируются стандартным способом, принятым в гидродинамике.

Граничные условия для твердой фазы определяются возмущениями, которые вносит твердая поверхность S , помещенная в поток частиц. На поверхности S должно быть сформулировано граничное условие непроницаемости $w_n|_S = W_n$, где W_i — скорость движения элемента поверхности S ; если поверхность неподвижна, то $w_n|_S = 0$. Движение частиц вдоль стенки может происходить со значительной скоростью скольжения θ . При ударах о стенку частицы приобретают значительные угловые скорости, а также поступательные скорости относительно слоя. Это приводит к потере частицами некоторой доли касательного импульса и увеличивает внутреннюю энергию слоя.

Стенка оказывает упорядочивающее действие на прилегающий слой частиц, локально изменяя его порозность. Этот эффект выходит за рамки данного рассмотрения, основанного на предположении о полном беспорядке расположения частиц.

Рассмотрим удар частицы о стенку, предполагая удар упругим. Поскольку угловая скорость частиц внутри слоя в среднем равна нулю, будем считать шар до удара невращающимся. Согласно [7] для рассматриваемого случая потеря касательного импульса частицы при ударе составляет величину

$$(3.1) \quad m\Delta w_t = \begin{cases} \frac{2}{7}m\theta & (\theta/7c \leq f) \\ 2fmc & (\theta/7c \geq f) \end{cases}$$

где f — коэффициент трения скольжения о поверхность; случай $\theta/7c \leq f$ соответствует прекращению скольжения. Для угловой скорости имеет место соотношение

$$(3.2) \quad \omega d = \begin{cases} \frac{10}{7}\theta & (\theta/7c \leq f) \\ 2fmc & (\theta/7c \geq f) \end{cases}$$

Умножив (3.1) на N , получаем касательное напряжение на стенке

$$(3.3) \quad T_t = \begin{cases} \frac{1}{7}\theta c^{-1}p_s & (\theta/7c \leq f) \\ fp_s & (\theta/7c \geq f) \end{cases}$$

Касательное напряжение непрерывно зависит от величины $\theta/7c$. При $\theta/7c \leq f$ напряжение зависит от θ линейно, что характерно для жидкого трения. При $\theta/7c \geq f$ напряжение остается постоянным, т. е. действует закон сухого трения. Излом зависимости (3.3) связан с элементарным рассмотрением, при котором величина $\theta/7c$ для всех шаров одинакова, а начальная угловая скорость равна нулю. Если учесть распределение частиц по линейным и угловым скоростям, например, в виде максвелловского распределения, зависимость получится гладкой.

При выводе (3.3) не учитывался градиент скорости в слое, который при учете члена $\gamma D_{ik} D_{kj}$ в (1.9) порождает дополнительное нормальное напряжение. В общем случае вместо (3.3) следует записать:

$$(3.4) \quad T_t = \xi T_n, \quad \xi = \begin{cases} \theta/7c & (\theta/7c \leq f) \\ f & (\theta/7c \geq f) \end{cases}$$

Здесь T_n — полное нормальное напряжение на стенке. Граничное условие для касательной компоненты скорости, учитывающее закон трения слоя о поверхность, можно получить, если величину T_t из (3.4) приравнять касательному напряжению, следующему из формулы (1.9).

Граничные условия для внутренней энергии E могут иметь различные формы в зависимости от свойств частиц и стенки. Последняя может генерировать энергию, например, за счет вибраций или поглощать ее.

Дополнительный поток энергии, связанный с превращением на стенке части энергии среднего движения в энергию хаотического движения может быть найден в виде

$$(3.5) \quad q_c = \left(\frac{m\Delta w_t^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \right) N = \frac{7}{2} \rho_s \frac{\tau}{\eta} \xi^2 c^3$$

Граничные условия для уравнения энергии с учетом (3.5) и при отсутствии других процессов на стенке получаются приравниванием правых частей (3.5) и (2.6).

Мощность поверхностных сил $\int_S T_{ij} w_j dS_i$, входящая в (2.1), не дает вклада в баланс внутренней энергии, поскольку она не входит в (2.2).

4. В работе [2] рассмотрен частный случай дисперсной системы, в котором среднее движение твердой фазы отсутствует. Так как $D_{ij} = 0$, уравнение движения твердой фазы упрощается и сводится к условию гидростатического равновесия. Уравнение энергии сводится к равенству $Q_M = Q_D$. Существенным свойством такой системы, моделирующей кипящий слой, является фазовый переход жидкость — пар.

Рассмотрим другой пример — аналог плоского течения Куэтта для сыпучего материала, в котором жидкая фаза отсутствует ($\rho = 0$). При течении вязкого газа между двумя параллельными стенками, движущимися с одинаковыми по величине и противоположно направленными скоростями для стационарного режима через стенки необходимо отводить тепло трения. В случае сыпучей среды из-за наличия стока внутренней энергии в виде диссипированной мощности Q_D возможен адиабатический режим ($q'_s = 0$), который рассмотрен ниже.

Будем искать решения, характеризующиеся постоянными значениями градиента скорости $dw/dy = a$, внутренней энергии E и давления p_s . Формула (1.9) дает

$$T_{ij} = -(p_s + \gamma a)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что

$$(4.1) \quad T_n = p_s + \gamma a^2, \quad T_t = \mu a$$

Поскольку $1/2 T_{ij} D_{ij} = \mu a^2$, уравнение энергии (2.3) сводится к равенству $Q_D = \mu a^2$. Используя (2.5) и (1.14), получим

$$(4.2) \quad a^2 d^2 = \frac{2\sigma}{\tau_0^{2/3}} c^2 \tau^{2/3}, \quad ad = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\tau_0^{1/3}} c \tau^{1/3}$$

Воспользуемся далее соотношением (3.4), подставив в него выражения (4.1). С учетом (1.13), (1.14) и (1.16) получим

$$(4.3) \quad \xi = \sqrt{\frac{\sigma}{2}} \left[1 + 0.038\sigma \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/3} \right] \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2}}$$

В случае упругих и шероховатых шаров имеем $\sigma = \sqrt{3}/14$, $\xi = 0.25$.

Таким образом, для рассматриваемого течения Куэтта ξ есть постоянное число. Если коэффициент трения $f > \xi$, то согласно (3.4) $\theta/7c = \xi$, и это выражение определяет скачок скорости на границе течения. Градиентное течение при $f < \xi$ невозможно. В рассматриваемом случае, когда отсутствует поле внешних сил, нормальное давление порождается только «термическим» расширением слоя, и возможно тривиальное решение $c = 0$, $T_{ij} = 0$, $a = 0$. Плоскости свободно скользят по слою частиц, не оказывая на него воздействия. Нетривиальное решение существует лишь при $f > \xi$. Тогда $\theta = 7\xi c$. Пусть задается относительная скорость движения пластин $w_0 = ab + 2\xi c$, где b — ширина слоя. Решая это уравнение совместно с (4.2) с учетом (4.3), получим

$$c = \frac{w_0}{2\xi\Delta}, \quad a = \frac{dw}{dy} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/3} \frac{w_0}{d\Delta} \quad \left(\Delta = 1 + \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} \frac{b}{d} \right)$$

Величина τ в этой задаче должна быть задана. Касательное напряжение, возникающее на пластинах при их движении, составляет величину

$$T_t = \frac{\rho_T}{4\xi} \frac{\tau}{\eta} \frac{\omega_0^2}{\Delta^2}$$

Полученные результаты качественно согласуются с опытом. Между двумя цилиндрами, из которых внутренний вращался, а наружный оставался неподвижным, помещался сыпучий материал. Если внутренний цилиндр был гладким, то слой не реагировал на вращение цилиндра. Движение сыпучего материала начиналось лишь при достаточной шероховатости вращающегося цилиндра.

Авторы благодарны С. С. Кутателадзе за обсуждение работы.

Поступила 4 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин Н. А., Витошкин Ю. К., Карасик В. М., Очеретько В. Ф. Гидротранспорт. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. Гольдштик М. А. Элементарная теория кипящего слоя. ПМТФ, 1972, № 6.
3. Гольдштик М. А., Сорокин В. Н. О движении частицы в вихревой камере. ПМТФ, 1968, № 6.
4. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
5. Гирифельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Гольдштик М. А., Леонтьев А. К. Об ударе шара о твердую поверхность. Инж.-физ. ж., 1960, № 11.
8. Аэров М. Э., Годес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.