

УДК 532.516:536.25

## О ВОЗМОЖНОМ ВЛИЯНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ЕГО ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ

В. Е. Захватаев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Рассматривается формально возможный физический механизм развития длинноволновых возмущений течения тонкого слоя вязкой теплопроводной жидкости со свободной границей, характерная особенность которого состоит в том, что возникающие на границе напряжения Марангони формируются под влиянием изменений внутренней энергии межфазной поверхности. Влияние флуктуаций поверхностной внутренней энергии на течение слоя в рассматриваемом приближении имеет дисперсионный характер и может, в частности, способствовать регуляризации волновых режимов.

**Введение.** В последнее время определенный интерес вызывают вопросы, связанные с влиянием внутренней энергии границы раздела в системах жидкость — жидкость и жидкость — газ на поля температуры и скоростей в окрестности межфазной поверхности (см., например, [1]). В большинстве работ по изучению термокапиллярных явлений эффекты, связанные с изменением поверхностной внутренней энергии, считаются незначительными. Однако, как показывают расчеты [1], для большинства жидкостей, включая воду, при достаточно высоких температурах, а также для жидкостей с малой вязкостью эти эффекты могут оказывать существенное влияние на динамику в окрестности межфазной границы.

Пленочный слой жидкости — физическая система, которая представляется весьма удобной для экспериментального и теоретического исследования явлений данного класса.

В настоящей работе рассматривается один из возможных физических механизмов влияния изменений поверхностной внутренней энергии на поле температуры в окрестности свободной границы пленки жидкости и, в конечном счете, на формирование напряжений Марангони и поля скоростей. Эффекты, связанные с тепловым расширением жидкости, не учитываются (предполагается, что толщина слоя достаточно мала).

Течение пленочного слоя жидкости со свободной границей изучается давно и всесторонне [2–5], отчасти это объясняется связью с разнообразными практическими приложениями. Пленочное течение широко используется в высокопроизводительных массообменных аппаратах, является основой ряда теплофизических явлений и химико-технологических процессов (абсорбции, десорбции, охлаждения, конденсации и др.) [6]. Характер волновых режимов в пленочном слое может существенно влиять на интенсивность процессов переноса через межфазную поверхность [4, 7], что делает актуальным поиск физических факторов и способов эффективного управления динамикой течения. Вместе с тем пленочные течения являются одними из наиболее простых, доступных и выразительных физических систем, способных иллюстрировать разнообразные нелинейные явления.

При анализе исходим из широко известной упрощенной математической модели, описывающей слабонелинейные волновые режимы пленочного течения, — уравнения Курамо-

то — Сивашинского (КС-модель) [8–10]

$$\frac{\partial}{\partial t} H + H \frac{\partial}{\partial x} H + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H + \frac{\partial^4}{\partial x^4} H = 0$$

( $t, x, H$  — масштабированные время, продольная координата, возмущение межфазной поверхности). Область применимости этой модели: достаточно сильное поверхностное натяжение свободной границы пленки и сравнительно большой продольный пространственный масштаб возмущений в тонком слое, число Рейнольдса порядка  $O(1)$ . Хотя решение приведенного уравнения не дает удовлетворительного количественного описания наблюдаемых в опытах волновых течений, качественное соответствие для волн малой амплитуды имеется.

В настоящей работе рассматривается физический механизм, положенный в основу КС-модели течения тонкого слоя вязкой жидкости, дополненный некоторыми термокапиллярными эффектами. Методом многомасштабных растяжений в пределе асимптотически больших эффективного поверхностного натяжения и числа Марангони исходная математическая модель редуцируется к эволюционному уравнению, описывающему слаболинейную динамику свободной границы, которое является комбинацией уравнений Кортевега — де Фриза и Курамото — Сивашинского:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{H} + \bar{H} \frac{\partial}{\partial x} \bar{H} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{H} + D \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{H} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{H} = 0.$$

Появление в этом уравнении слагаемого  $DH_{xxx}$  обусловлено в рассматриваемом случае влиянием на динамику внутренней энергии свободной поверхности пленочного слоя.

К числу наиболее важных особенностей периодических решений уравнения Курамото — Сивашинского относится то их свойство, что развитие любого начального возмущения с достаточно большой длиной волны носит неупорядоченный характер: соответствующие численные решения представляют собой хаотические осцилляции во времени при наличии когерентных пространственных структур [9, 11–13]. В работе [9] выдвинуто предположение, согласно которому хаотическая природа длинноволновых периодических решений уравнения Курамото — Сивашинского может соответствовать одной из причин наблюдаемого в опытах неупорядоченного поведения пленочного слоя. Как показывают численные исследования уравнений Кортевега — де Фриза и Курамото — Сивашинского [14–16], слагаемое с третьей производной оказывает регуляризирующее влияние на динамику. Начальные данные, развивающиеся хаотическим образом при  $D = 0$ , для достаточно больших значений коэффициента  $D$  эволюционируют к предельному режиму типа упорядоченной последовательности стационарных волн одинаковой формы. Данное обстоятельство дает основание предположить, что рассматриваемый в настоящей работе термокапиллярный механизм может оказать определенное регуляризирующее влияние на поведение текущего пленочного слоя. Вместе с тем появляются и другие возможности воздействия на динамику пленочного течения.

**1. Постановка задачи.** Приведем сначала исходную математическую модель в инвариантной форме. Принимаем, что поведение вязкой теплопроводной жидкости в области  $\Omega$ , ограниченной поверхностью  $S$  (твердой стенкой) и свободной поверхностью  $\Gamma$ , граничащей с газообразной фазой, описывается следующей системой уравнений и условий [17].

В области  $\Omega$  удовлетворяются уравнения Навье — Стокса, несжимаемости и закон Фурье:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}^*, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta,$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  — вектор скорости;  $p(\mathbf{x}, t)$  — давление;  $\theta(\mathbf{x}, t)$  — температура;  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  — радиус-вектор;  $t$  — время;  $\mathbf{f}^*$  — ускорение силы тяжести;  $\rho, \nu, \chi$  — постоянные плотность, ки-

нематическая вязкость и теплопроводность жидкости;  $\nabla$ ,  $\text{div}$ ,  $\Delta$  — соответственно операторы градиента, дивергенции и лапласиана.

На свободной границе ( $\mathbf{x} \in \Gamma$ ) имеются [17]:

— кинематическое условие непротекания  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_n$ ;

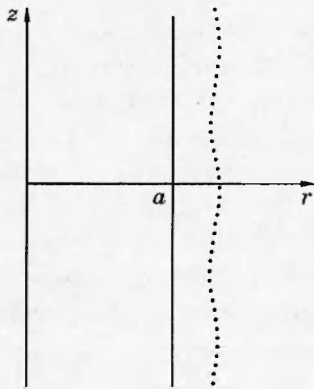
— условие баланса напряжений  $P \cdot \mathbf{n} + p^g \mathbf{n} = 2\sigma H \mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma$ ;

— условие переноса энергии  $(\dot{k} \bar{\nabla} \hat{\theta} - k^g \nabla \theta^g) \cdot \mathbf{n} = \theta \frac{d\sigma}{d\theta} \text{div}_\Gamma \mathbf{v} + \theta \frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt}$ .

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Gamma$ , внешней по отношению к области  $\Omega$ ;  $V_n$  — скорость перемещения поверхности  $\Gamma$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$ ;  $\nabla_\Gamma \equiv \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ ;  $\text{div}_\Gamma \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{n}((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{v})$ ;  $P$  — тензор напряжений;  $H$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ;  $k$  — постоянная теплопроводность жидкости;  $\sigma > 0$  — коэффициент поверхностного натяжения свободной границы  $\Gamma$ ;  $p^g$ ,  $\theta^g$ ,  $k^g$  — соответственно давление, температура и постоянная теплопроводность в газообразной фазе. Функции  $p^g$  и  $\theta^g$  считаются заданными.

Условие переноса энергии означает компенсацию скачка теплового потока в направлении нормали к  $\Gamma$  изменением внутренней энергии этой поверхности, связанным с вариациями площади межфазной границы и температуры [17].

Наконец, предполагаем, что на твердой стенке  $S$  выполняются обычные условия прилипания и изотермичности.



Рассмотрим тонкий пленочный слой вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости, текущий под действием силы тяжести по внешней поверхности вертикальной цилиндрической трубы радиуса  $a^*$ , вдоль которой поддерживается постоянная температура  $\theta_S^*$ . Предполагается, что зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры линейна (эта зависимость хорошо аппроксимирует реальную зависимость для многих жидкостей (воды, растворов органических веществ и др.) в определенных интервалах изменения температуры [18]):  $\sigma = \sigma^{(0)} - \alpha(\theta - \theta^{(0)})$ , где  $\sigma^{(0)} = \text{const}$  — поверхностное натяжение при температуре  $\hat{\theta}^{(0)}$ ,  $\alpha = \text{const}$  — температурный коэффициент; в дальнейшем полагаем  $\hat{\theta}^{(0)} = \theta_S^*$ .

Пусть  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты (радиальная, угловая и осевая, ось  $z$  ориентирована противоположно направлению силы тяжести) и  $(u, v, w)$  — поле скоростей.

В качестве основного процесса рассмотрим ламинарное изотермическое течение слоя в области  $\Omega_0 = \{a^* \leq r \leq a^* + h_0^*, -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < \infty\}$ ,  $h_0^* = \text{const}$ . Масштабными коэффициентами для пространственных переменных, скорости, времени, давления и температуры выберем соответственно  $\dot{h}_0^*$ ,  $w^* = f^* h_0^{*2} / 2\nu$ ,  $h_0^* / w^*$ ,  $\rho w^{*2}$ ,  $\theta_S^*$  ( $f^*$  — ускорение силы тяжести). Полагаем  $a^* / h_0^* = a$  и рассматриваем далее безразмерную задачу. Общий вид исследуемой системы схематично показан на рисунке.

Запишем исходную математическую модель в цилиндрических координатах. В области  $\{a < r < a + h(t, \varphi, z), -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty < z < \infty\}$  должны выполняться уравнения

$$u_t + uu_r + \frac{v}{r} u_\varphi + wu_z - \frac{\nu^2}{r} = -p_r + \frac{1}{\text{Re}} \left( u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} + \frac{1}{r} u_r - \frac{2}{r^2} v_\varphi - \frac{u}{r^2} \right); \quad (1.1)$$

$$v_t + uv_r + \frac{v}{r} v_\varphi + wv_z + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} p_\varphi + \frac{1}{\text{Re}} \left( v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + v_{zz} + \frac{1}{r} v_r + \frac{2}{r^2} u_\varphi - \frac{v}{r^2} \right); \quad (1.2)$$

$$w_t + ww_r + \frac{v}{r} w_\varphi + ww_z = -p_z + \frac{1}{\text{Re}} \left( w_{rr} + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} + w_{zz} + \frac{1}{r} w_r \right) - \frac{2}{\text{Re}}; \quad (1.3)$$

$$u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v_\varphi + w_z = 0; \quad (1.4)$$

$$\theta_t + u\theta_r + \frac{v}{r} \theta_\varphi + w\theta_z = \frac{1}{\text{Re}} \left( \theta_{rr} + \frac{1}{r^2} \theta_{\varphi\varphi} + \theta_{zz} + \frac{1}{r} \theta_r \right). \quad (1.5)$$

Граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (1.6)$$

При  $r = a + h(t, \varphi, z)$  удовлетворяются следующие соотношения:

- условие баланса нормальных напряжений

$$\begin{aligned} & -\text{Re}(p - p^g) + 2 \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-1} \left( u_r - \frac{1}{r} h_\varphi \left( \frac{1}{r} u_\varphi + v_r - \frac{1}{r} v \right) - h_z (w_r + u_z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} h_\varphi h_z \left( v_z + \frac{1}{r} w_\varphi \right) + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 \left( \frac{1}{r} v_\varphi + \frac{1}{r} u \right) + h_z^2 w_z \right) = (\text{We} + \text{Mn}(\theta - 1)) \left( -\frac{2}{r^3} h_\varphi^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} (1 + h_z^2) + \frac{1}{r^2} h_\varphi \varphi (1 + h_z^2) - \frac{2}{r^2} h_\varphi h_z h_{\varphi z} + h_{zz} \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 \right) \right) \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-3/2}; \quad (1.7) \end{aligned}$$

- условия баланса касательных напряжений

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-1/2} \left( \frac{2}{r} h_\varphi u_r + \left( 1 - \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 \right) \left( \frac{1}{r} u_\varphi + v_r - \frac{1}{r} v \right) - h_z \left( v_z + \frac{1}{r} w_\varphi \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} h_z h_\varphi (w_r + u_z) - \frac{2}{r} h_\varphi \left( \frac{1}{r} v_\varphi + \frac{1}{r} u \right) \right) = \text{Mn} \left( \frac{1}{r} \theta_r h_\varphi + \frac{1}{r} \theta_\varphi \right); \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-1/2} \left( 2h_z u_r + (1 - h_z^2)(w_r + u_z) - \frac{1}{r} h_\varphi h_z \left( \frac{1}{r} u_\varphi + v_r - \frac{1}{r} v \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} h_\varphi \left( v_z + \frac{1}{r} w_\varphi \right) - 2h_z w_z \right) = \text{Mn} (\theta_r h_z + \theta_z); \quad (1.9) \end{aligned}$$

- условие переноса энергии

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-1/2} \left( \theta_r - \frac{1}{r^2} h_\varphi \theta_\varphi - h_z \theta_z - \frac{h_z^g}{k} \left( \theta_r^g - \frac{1}{r^2} h_\varphi \theta_\varphi^g - h_z \theta_z^g \right) \right) = \\ & = E \theta \left( 1 + \frac{1}{r^2} h_\varphi^2 + h_z^2 \right)^{-1} \left( u_r - \frac{1}{r^2} h_\varphi u_\varphi - h_z u_z + \frac{1}{r^2} h_\varphi v - \frac{1}{r} h_\varphi v_r + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^3} h_\varphi^2 v_\varphi + \frac{1}{r} h_\varphi h_z v_z + \frac{1}{r^3} h_\varphi^2 u - h_z w_r + \frac{1}{r^2} h_\varphi h_z w_\varphi + h_z^2 w_z \right); \quad (1.10) \end{aligned}$$

- кинематическое условие непротекания

$$u = h_t + \frac{v}{r} h_\varphi + w h_z. \quad (1.11)$$

Здесь  $\text{Re} = w^* h_0^* / \nu$ ;  $\text{Pe} = w^* h_0^* / \chi$ ;  $\text{We} = \sigma^{(0)} / (\rho \nu w^*)$ ;  $\text{Mn} = -\alpha \theta_S^* / (\rho \nu w^*)$ ;  $E = \alpha w^* / k$ ;  $p^g$  и  $\theta^g$  — заданные функции.

Основное ламинарное течение определяется следующим образом:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = (r^2 - a^2)/2 - (1 + a)^2 \ln(r/a), \quad p_0 = \text{const}, \quad \theta_0 = 1, \quad h_0 = 1. \quad (1.12)$$

Наша задача — исследовать развитие возмущений основного состояния (1.12) на слабонелинейной стадии эволюции флуктуаций.

**2. Вывод амплитудного уравнения.** В этом пункте путем редукции исходной задачи методом многомасштабных растяжений [8, 10] выводим эволюционное уравнение, описывающее длинноволновые режимы на свободной поверхности слоя.

Выбор пространственных и временных масштабов. В работе [10] выбор масштабов зависимых и независимых переменных основывался на следующих соображениях. Согласно линейному дисперсионному соотношению, полученному при анализе линейной устойчивости течения слоя вязкой жидкости по плоской вертикальной стенке (без учета термокапиллярных эффектов), для возмущения вида  $\exp(\lambda t + in\hat{z} + il\hat{y})$  ( $\hat{y}, \hat{z}$  — горизонтальная и вертикальная координаты) в режиме неустойчивости имеют место оценки [10]

$$n \sim l \sim We^{-1/2}, \quad \text{Real}(\lambda) \sim We^{-1}, \quad \text{Im}(\lambda) \sim We^{-1/2} \quad \text{при} \quad We \gg 1, \quad \text{Re} = O(1). \quad (2.1)$$

Предположим, что продольный пространственный масштаб течения в цилиндрической геометрии согласуется с оценкой (2.1). Из (2.1) также следует, что характерный пространственный масштаб трансверсальных возмущений  $2\pi/l \sim We^{1/2}$ . Считаем, что кривизна стенок оказывает наиболее сильное влияние на свойства течения, когда число трансверсальных волн  $O(al)$  конечно. Отсюда устанавливается  $a \sim We^{1/2}$ .

Рассматривая линеаризованную на решении (1.12) задачу (1.1)–(1.11) и раскладывая возмущения и величину  $\lambda$  в ряд по малому параметру — волновому числу  $n$ , получим, что оценки (2.1) не меняются, если  $Mn = O(We^{1/2})$ ,  $Pe = O(1)$ ,  $E = O(1)$ .

Рассмотрим далее такие вторичные течения, характерные пространственные масштабы которых в продольном и трансверсальном направлениях имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  ( $\varepsilon$  — параметр малости), при этом  $We = O(\varepsilon^{-2})$ .

Положим [10]

$$X = r - a, \quad Z = \varepsilon z, \quad \alpha = \varepsilon a, \quad Y = \alpha\varphi \quad (-\alpha\pi \leq Y \leq \alpha\pi), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\varepsilon\partial}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon^2\partial}{\partial T}; \quad (2.2)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(X, Y, Z, \tau, T), \quad w = w_0(X, \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n W_n(X, Y, Z, \tau, T),$$

$$p = p_0(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n P_n(X, Y, Z, \tau, T), \quad (2.3)$$

$$\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_n(X, Y, Z, \tau, T), \quad h = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H_n(Z, Y, \tau, T).$$

Отметим, что  $w_0(X, \varepsilon) = X^2 - 2X - \varepsilon(X^3/3 - X^2 + X)/\alpha + O(\varepsilon^2)$ .

Предположим, что порядки безразмерных параметров задачи определены следующим образом:

$$We = O(\varepsilon^{-2}), \quad Mn = O(\varepsilon^{-1}), \quad Re = O(1), \quad Pe = O(1), \quad E = O(1). \quad (2.4)$$

Обозначим  $\overline{Mn} = Mn\varepsilon$ ,  $\overline{We} = We\varepsilon^2$ .

Влияние возмущений температуры в газообразной фазе. В большинстве случаев теплопроводность газообразных веществ на порядок меньше, чем для жидких [18], поэтому вполне естественно считать, что  $k^g/k \leq O(\varepsilon)$ . Положим

$$\theta^g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_{\pm}^g(X, Y, Z, \tau, T), \quad X \geq 1.$$

Характерный пространственный масштаб в радиальном направлении в области, занимаемой газообразной фазой, совпадает с масштабами в продольном и трансверсальном направлениях. Следовательно, в области, смежной с пленочным слоем ( $X \geq 1$ ),  $\partial/\partial X = O(\varepsilon)$ . С учетом приведенных выше предположений и замечаний в рассматриваемом случае возмущение температуры в газообразной фазе ощутимого влияния на динамику в пленочном слое не оказывает.

В то же время можно считать, что флуктуации температуры в области, граничащей с тонким слоем, в достаточной степени подавляются изотермическим потоком газа.

Последовательность аппроксимационных задач. Подставляя (2.2), (2.3) в (1.1)–(1.11), с учетом (2.4) получим последовательность аппроксимационных задач.

В первом порядке

$$\frac{\partial P_1}{\partial X} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} = \bar{z}(\bar{X} - i)\bar{U}_1, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } 0 < X < 1;$$

$$U_1 = V_1 = W_1 = \Theta_1 = 0 \quad \text{при } X = 0; \quad (2.6)$$

$$P_1 = -\frac{\overline{\text{We}}}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\alpha^2} \Pi_1 + \nabla^2 \Pi_1 \right) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial U_1}{\partial X}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial X} = \frac{\overline{\text{Mn}}}{\text{Re}} \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y}, \quad (2.7)$$

$$2H_1 + \frac{\partial W_1}{\partial X} = \overline{\text{Mn}} \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z}, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = \text{E} \frac{\partial U_1}{\partial X}, \quad U_1 = 0 \quad \text{при } X = 1.$$

Здесь  $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial Y^2 + \partial^2/\partial Z^2$ . Задача (2.5)–(2.7) имеет решение

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad W_1 = -2H_1 X, \quad \Theta_1 = 0, \quad P_1 = -\frac{\overline{\text{We}}}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\alpha^2} H_1 + \nabla^2 H_1 \right). \quad (2.8)$$

Во втором порядке уравнения (1.2)–(1.6), (1.8)–(1.11) имеют вид

$$-\frac{\partial P_1}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V_2}{\partial X^2} = 0,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \tau} + 2(X-1)U_2 + X(X-2) \frac{\partial W_1}{\partial Z} = -\frac{\partial P_1}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W_1}{\partial X} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial X} + \frac{\partial W_1}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} = 0 \quad \text{при } 0 < X < 1;$$

$$U_2 = V_2 = W_2 = \Theta_2 = 0 \quad \text{при } X = 0; \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial X} = \overline{\text{Mn}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial Y}, \quad \frac{\partial W_2}{\partial X} + 2H_2 = \overline{\text{Mn}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}, \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} = \text{E} \frac{\partial U_2}{\partial X}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \tau} - \frac{\partial H_1}{\partial Z} = U_2 \quad \text{при } X = 1.$$

Задача (2.9)–(2.11) с учетом (2.8) имеет решение

$$H_1 = H_1(\zeta, T), \quad U_2 = X^2 \frac{\partial H_1}{\partial \zeta}, \quad \Theta_2 = 2\text{E} X \frac{\partial H_1}{\partial \zeta},$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \overline{\text{We}} X(X-2) \left( \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial H_1}{\partial Y} + \nabla^2 \frac{\partial H_1}{\partial Y} \right) + 2\overline{\text{Mn}} \text{E} X \frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta \partial Y}, \quad (2.12)$$

$$W_2 = \text{Re} \left( \frac{1}{6} X^4 - \frac{2}{3} X^3 + \frac{4}{3} X \right) \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \overline{\text{We}} X(X-2) \left( \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} + \nabla^2 \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} \right) + \\ + \frac{1}{\alpha} X(X-2) H_1 - 2X H_2 + 2\overline{\text{Mn}} \text{E} X \frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta^2},$$

где  $\zeta = Z + 2\tau$ .

Кинематическое условие (1.11) в третьем порядке имеет вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial T} + \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} + W_1 \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - \frac{1}{3\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} = U_3 + \frac{\partial U_2}{\partial X} H_1 \quad (X = 1). \quad (2.13)$$



Это условие является основой искомого эволюционного уравнения. Функция  $U_3$  определяется из (1.4), (1.6):

$$\frac{\partial U_3}{\partial X} + \frac{1}{\alpha} \bar{U}_2 + \frac{\partial V_2}{\partial Y} + \frac{\partial W_2}{\partial \zeta} = 0, \quad U_3(0) = 0.$$

Следовательно, с учетом (2.12)

$$U_3 = -\frac{2}{\alpha} \left( \frac{1}{3} X^3 - \frac{1}{2} X^2 \right) \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - \operatorname{Re} \left( \frac{1}{30} X^5 - \frac{1}{6} X^4 + \frac{2}{3} X^2 \right) \frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta^2} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\overline{\operatorname{We}}}{\operatorname{We}} \left( \frac{1}{3} X^3 - X^2 \right) \left( \frac{1}{\alpha^2} \nabla^2 H_1 + \nabla^4 H_1 \right) + X^2 \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} - \frac{\overline{\operatorname{Mn}} \operatorname{E}}{\operatorname{Mn}} X^2 \frac{\partial^3 H_1}{\partial \zeta^3} - \frac{\overline{\operatorname{Mn}} \operatorname{E}}{\operatorname{Mn}} X^2 \frac{\partial^3 H_1}{\partial \zeta \partial Y^2}.$$

Тогда (2.13) принимает вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial T} - \frac{2}{3\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - 4H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} + \frac{8}{15} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{3\alpha^2} \overline{\operatorname{We}} \nabla^2 H_1 + \\ + \overline{\operatorname{Mn}} \operatorname{E} \left( \frac{\partial^3 H_1}{\partial \zeta^3} + \frac{\partial^3 H_1}{\partial \zeta \partial Y^2} \right) + \frac{1}{3} \overline{\operatorname{We}} \nabla^4 H_1 = 0. \quad (2.14)$$

Во вращательно-симметричном случае

$$\frac{\partial H_1}{\partial T} - \frac{2}{3\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} - 4H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} + \left( \frac{8}{15} \operatorname{Re} + \frac{1}{3\alpha^2} \overline{\operatorname{We}} \right) \frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta^2} + \overline{\operatorname{Mn}} \operatorname{E} \frac{\partial^3 H_1}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 H_1}{\partial \zeta^4} = 0. \quad (2.15)$$

**Замечания о физическом механизме.** Уравнение (2.14) совпадает с точностью до слагаемого с коэффициентом  $\overline{\operatorname{Mn}} \operatorname{E}$  с полученным в [10] уравнением; новое слагаемое отражает влияние термокапиллярных эффектов на вторичные режимы в исследуемой системе. Условия (2.11) выражают основную особенность физического механизма, соответствующего рассматриваемой редукции. Отклонение границы раздела от равновесного состояния изменяет ее внутреннюю энергию, что влияет на возмущения теплового потока через межфазную поверхность. Индуцируемое таким образом возмущение температуры сопрягается с гидродинамическими возмущениями в процессе уравнивания касательных напряжений на свободной границе. В то же время возмущения поля скоростей порождаются флуктуациями давления, которые, в свою очередь, индуцируются деформацией межфазной поверхности через граничное условие баланса нормальных напряжений, что присуще гидродинамическим задачам подобного типа.

В [19] изучалась задача, родственная рассматриваемой в настоящей работе. Учет термокапиллярных эффектов при описании поведения границы раздела в двухфазном течении вязких несмешивающихся жидкостей вдоль цилиндрической трубки в случае, когда толщина слоя, примыкающего к цилиндрической стенке, асимптотически мала и выполняется ряд других ограничений, также приводит к эволюционному уравнению вида (2.15), в котором слагаемое с третьей производной обусловлено термокапиллярными факторами.

**Волновое течение в плоской геометрии.** Аналогично рассматривается течение тонкого слоя по вертикальной плоской стенке. Пусть  $r, z$  — декартовы координаты (ограничиваемся двумерным случаем) и пленочный слой под действием силы тяжести свободно стекает по плоской поверхности  $r = a = \operatorname{const}$ ; возмущенная межфазная поверхность определяется уравнением  $r = a + h(z, t)$ . В (1.1)–(1.11) полагаем  $v \equiv 0, \partial/\partial \varphi \equiv 0$ . В исходной математической модели уравнения (1.1)–(1.5) видоизменяются очевидным образом. Условие (1.7) теперь имеет вид

$$-\operatorname{Re}(p - p^g) + 2(1 + h_z^2)^{-1}(u_r - h_z(w_r + u_z) + h_z^2 w_z) = (\operatorname{We} + \operatorname{Mn}(\theta - 1))h_{zz}(1 + h_z^2)^{-3/2},$$

$$r = a + h(z, t).$$

Остальные граничные условия не изменяются. Основное решение имеет вид  $u_0 = 0$ ,  $w_0 = r^2 - 2r$ ,  $p_0 = \text{const}$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $h = 1$ .

Анализ, подобный проведенному выше, при тех же условиях на порядки безразмерных параметров задачи приводит к той же цепочке формул, что и в случае цилиндрической геометрии, в которых формально нужно положить  $\alpha = \infty$ . Соответственно итоговое амплитудное уравнение имеет вид (2.15), но нужно опустить слагаемые  $-(2/3\alpha)H_{1\zeta}$ ,  $(1/3\alpha^2)WeH_{1\zeta\zeta}$ .

Влияние кривизны стенок на упорядоченность вторичных движений. Известно, что кривизна стенки, по которой стекает жидкость, обладает регуляризирующим влиянием на течение пленочного слоя. Рассмотрим этот вопрос в линейном приближении. Анализ дисперсионного соотношения уравнения (2.14) показывает [10], что чем меньше кривизна стенки, тем больше гармоник с высокой угловой частотой являются линейно неустойчивыми. Рассматриваемые термокапиллярные эффекты не влияют на рассуждения, приведенные в [10], поскольку имеют чисто дисперсионный характер.

**3. Формирование квазистационарных упорядоченных режимов.** Ограничимся вращательно-симметричным случаем. Путем замены переменных уравнение (2.15) может быть приведено к виду

$$H_t + 2QH H_x + UH_{xx} + DH_{xxx} + SH_{xxxx} = 0, \quad U > 0, \quad S > 0. \quad (3.1)$$

Линейное дисперсионное соотношение уравнения (3.1) для гармоники  $\propto \exp(\lambda t + inx)$  имеет вид  $\lambda = Un^2 + iDn^3 - Sn^4$ . Отсюда следует, что слагаемое со второй производной связано с дестабилизирующими эффектами, с третьей — с дисперсионными, а с четвертой — с диссипативными. Соотношение (3.1) является одной из простейших моделей слабонелинейных диссипативных процессов в системах с дисперсионными и дестабилизирующими факторами. Данное уравнение встречается в разных задачах, например, при описании гидродинамики пленочных течений [20], в физике плазмы, при исследовании модуляции процессов, описываемых обобщенным уравнением Гинзбурга — Ландау [21].

Приведем некоторые известные результаты численных исследований [9, 11–16], касающиеся общих свойств  $L$ -периодических решений, описываемых уравнением (3.1) ( $H(t, 0) = H(t, L)$ ). В дальнейшем будет удобно использовать параметр  $\mu = (L/2\pi)(U/S)^{1/2} > 0$ , естественным образом возникающий при приведении рассматриваемой задачи к канонической форме и отражающий степень неустойчивости однородного состояния.

При  $D = 0$  (3.1) является уравнением Курамото — Сивашинского, которое часто упоминается как простейшая детерминистическая модель слабой турбулентности на межфазных границах и фронтах [12]. Для сравнительно небольших значений параметра  $\mu$  наблюдаются регулярные решения установившегося либо осциллирующего характера, но при увеличении пространственного периода на оси бифуркационного параметра  $\mu$  появляются островки нерегулярного поведения, а для достаточно больших значений  $\mu$  устанавливается четко выраженное хаотическое поведение (в качестве аттракторов или весьма длительных переходных процессов) [9, 12, 14]. Данные нерегулярные режимы представляют собой хаотические осцилляции во времени с элементами пространственной когерентности.

В случае, когда величина  $\mu$  сравнительно велика, так что динамика уравнения Курамото — Сивашинского имеет хаотический характер, при положительных значениях коэффициента  $D$ , достаточно близких к нулю, наблюдается стохастическое поведение. Однако при увеличении  $D$  степень упорядоченности резко возрастает: можно наблюдать последовательности уединенных волн, причем по мере усиления дисперсионных эффектов расстояния между отдельными импульсами изменяются все более регулярным образом. Наконец, при достаточно больших значениях параметра  $D$  после переходного процесса формируется



цепочка уединенных волн с практически одинаковыми профилями и расстояниями между соседними максимумами [14–16].

Таким образом, под влиянием дисперсионных эффектов нерегулярные режимы уравнения Курамото — Сивашинского становятся упорядоченными квазистационарными.

При определенных условиях наблюдаемые в численных исследованиях предельные режимы уравнения (3.1), устанавливающиеся после переходных нестационарных процессов (последовательности уединенных волн), могут быть удовлетворительно описаны с помощью некоторого асимптотического решения, представляющего собой суперпозицию стационарных уединенных волн с одним максимумом ( $H^s(x - Vt + \psi_i)$ ,  $H^s \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ ), достаточно слабо взаимодействующих друг с другом [16, 22]. Профиль  $H^s$  определяется численно. Расстояния между импульсами в подобного рода цепочке одинаковых одиночных волн могут изменяться как упорядоченным, так и нерегулярным образом [16, 22].

Уравнение (3.1) имеет также другие типы стационарных решений  $H(x - Vt)$ , качественно соответствующие наиболее важным видам регулярных движений, присущих пленочным течениям: периодическим режимам и последовательностям уединенных волн с несколькими максимумами. В фазовом пространстве  $(H, H', H'')$  решениям последнего типа соответствуют траектории, близкие к двоякоасимптотическим к неподвижной точке  $(0, 0, 0)$  и циклически возвращающиеся к ней, описывающие на каждом цикле несколько витков около второй неподвижной точки  $(V/Q, 0, 0)$  [22, 23].

Уравнение (3.1) может описывать и режимы типа гидравлических прыжков. В специальном случае удастся получить соответствующее точное решение (по аналогии с уравнением Курамото — Сивашинского [24]). Именно уравнение

$$-VH + QH^2 + UH' + DH'' + SH''' = q = \text{const} \quad (3.2)$$

( $H = H(\xi)$ ,  $\xi = x - Vt$ ) имеет решение вида

$$H = a + b \operatorname{th}(\alpha\xi) + c \operatorname{th}^2(\alpha\xi) + d \operatorname{th}^3(\alpha\xi). \quad (3.3)$$

Здесь

$$a = \frac{V}{2Q} + \frac{15}{2} \delta M, \quad b = \left( \frac{180}{7} + \frac{15}{56} \delta^2 \right) M, \quad c = -\frac{15}{2} \delta M, \quad d = 60M, \quad M = S\alpha^3/Q \quad (3.4)$$

при условии, что выполняются соотношения

$$V^2 = 4 \left( \frac{83\,520}{49} + \frac{3000}{49} \delta^2 + \frac{195}{3136} \delta^4 \right) S^2 \alpha^6 - 4Qq, \quad U = \left( \frac{380}{7} + \frac{13}{56} \delta^2 \right) S\alpha^2, \quad D = \delta S\alpha, \quad (3.5)$$

где  $\delta = \pm 32$  либо  $\delta = \pm 24$ .

В фазовом пространстве решение (3.3)–(3.5) уравнения (3.2) соответствует гетероклической орбите.

Наконец, остановимся кратко на том, как влияют на динамику рассматриваемые дисперсионные эффекты в случае, когда величина параметра  $\mu$  достаточно мала, так что уравнение (3.1) при  $D = 0$  имеет регулярные периодические решения. Задача исследовалась численно с помощью метода Галеркина с числом аппроксимирующих мод порядка 5μ [25]. Проведенные расчеты показали следующее.

1. Аттракторы уравнения Курамото — Сивашинского ( $D = 0$ ) вида унимодальных установившихся состояний [11] трансформируются в стационарные бегущие волны, у которых на пространственном периоде имеется единственный экстремум.

2. В диапазоне значений  $\mu$ , где предельный режим в случае  $D = 0$  представляет собой периодические пульсации между двумя установившимися, инвариантными относительно  $\pi$ -трансляций состояниями [13], при достаточно слабой дисперсии возможно возникновение пульсирующих бегущих волн. Форма этих волновых образований периодически меняется: первая и вторая фурье-компоненты доминируют попеременно. Если же дисперсия

сравнительно велика, предельным режимом является последовательность бегущих волн постоянной формы.

3. В области значений  $\mu$ , где в качестве аттрактора уравнения Курамото — Сивашинского наблюдаются бимодальные установившиеся состояния [11], возможны следующие типы поведения, обнаруженные в результате численных расчетов:

а) бегущие волны постоянной формы, характеризующиеся наличием двух экстремумов на пространственном периоде;

б) аттракторы вида периодически пульсирующих с течением времени бегущих волн;

в) цепочки бегущих волн с единственным экстремумом на периоде.

Таким образом, появление дисперсионных эффектов существенно расширило многообразие предельных режимов в области невысоких значений параметра  $\mu$ , соответствующих регулярным аттракторам уравнения Курамото — Сивашинского.

**Заключение.** Суть рассматриваемого в настоящей работе физического механизма развития длинноволновых возмущений в тонком слое жидкости состоит в том, что изменение внутренней энергии межфазной поверхности жидкость — газ вызывает соответствующее изменение в поле температуры в окрестности границы раздела, что приводит к возникновению (либо изменению) напряжений Марангони. Та же особенность присуща и термокапиллярному механизму, рассмотренному в [19] для системы жидкость — жидкость.

В рассматриваемом случае линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры удельная (отнесенная к единице площади поверхности раздела) поверхностная внутренняя энергия постоянна [17]. Однако внутренняя энергия межфазной поверхности может изменяться вследствие флуктуаций площади поверхности.

Приведем некоторые соображения о реализуемости рассматриваемого термокапиллярного механизма развития возмущений на практике. Ключевым параметром для проводимого анализа является  $Mn E$ . Этот параметр выражает сравнительную величину эффектов, обусловленных наличием поверхностной внутренней энергии, и эффекта Марангони. Известно [1], что обычно величина  $Mn E$  мала, но при достаточно высоких температурах для большинства жидкостей  $Mn E = O(1)$ . Значение величины  $Mn E$  увеличивается также для жидкостей с малой вязкостью. В рассматриваемом в настоящей работе случае  $Mn E = O(\varepsilon^{-1})$ , а в [19]  $Mn E = O(1)$ .

При использовании в качестве условия переноса энергии через свободную границу соотношения (1.10) вместо часто используемого на практике условия вида

$$k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} + b(\theta - \theta^g) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

( $b(\mathbf{x}, t)$  — коэффициент межфазного теплообмена,  $\theta^g$  — контролируемое значение температуры в некоторой точке газовой фазы) могут возникнуть известные трудности при постановке экспериментов, соответствующих математической формулировке задачи. Однако в рассматриваемом случае, когда основное состояние системы изотермично, эта проблема, по-видимому, не должна служить препятствием (см. соответствующие пояснения в п. 2).

Изложенное выше дает основание полагать, что рассмотренный физический механизм может быть реализован на практике для систем жидкость — газ или жидкость — жидкость.

В этой связи целесообразно также отметить, что наблюдаемые при опытном изучении волновые режимы пленочного течения качественно могут соответствовать решениям упрощенных моделей, подобных уравнению (2.15), в диапазонах значений определяющих параметров более широких, чем это обуславливается при выводе этих моделей.

В заключение отметим две характерные особенности влияния рассматриваемых термокапиллярных эффектов на волновые режимы в тонком слое. В рассматриваемом приближении напряжения Марангони, связанные с изменениями внутренней энергии свободной поверхности слоя, способствуют:

а) регуляризации динамики;

б) формированию волновых режимов типа неупорядоченной либо квазирегулярной последовательности уединенных волн.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00340а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Torres F. E., Herbolzheimer E.** Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5, N 3. P. 537–549.
2. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // *Инж.-физ. журн.* 1976. Т. 30, № 5. С. 780–785.
3. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В., Орлов В. В.** Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости // *Инж.-физ. журн.* 1977. Т. 33, № 3. С. 399–404.
4. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Радев К. Б.** Влияние волн на конвективную диффузию газа в стекающей пленке жидкости // *Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики.* 1985. С. 5–32.
5. **Liu J., Paul J. D., Gollub J. P.** Measurements of the primary instabilities of film flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 250. P. 69–101.
6. **Холпанов Л. П.** Процессы тепломассообмена в системах с поверхностью раздела фаз // *Гидродинамические проблемы технологических процессов.* М.: Наука, 1988. С. 93–101.
7. **Капица П. Л.** Теплопроводность и диффузия в жидкой среде при периодическом течении // *ЖЭТФ.* 1951. Т. 21, вып. 9. С. 964–978.
8. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1974. № 3. С. 28–34.
9. **Sivashinsky G. I., Michelson D. M.** On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane // *Prog. Theor. Phys.* 1980. V. 63, N 6. P. 2112–2114.
10. **Shlang T., Sivashinsky G. I.** Irregular flow of a liquid film down a vertical column // *J. Physique.* 1982. V. 43. P. 459–466.
11. **Hyman J. M., Nicolaenko B.** The Kuramoto — Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // *Physica D.* 1986. V. 18. P. 113–126.
12. **Hyman J. M., Nicolaenko B., Zaleski S.** Order and complexity in the Kuramoto — Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // *Physica D.* 1986. V. 23. P. 265–292.
13. **Kevrekidis I. G., Nicolaenko B., Scovel J. C.** Back in the saddle again: a computer assisted study of the Kuramoto — Sivashinsky equation // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. V. 50, N 3. P. 760–790.
14. **Kawahara T.** Formation of saturated solutions in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51, N 5. P. 381–383.
15. **Toh S., Kawahara T.** On the stability of soliton-like pulses in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation // *J. Phys. Soc. Japan.* 1985. V. 54, N 4. P. 1257–1269.
16. **Kawahara T., Toh S.** Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system // *Phys. Fluids.* 1988. V. 31, N 8. P. 2103–2111.
17. **Пухначев В. В.** Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1989.

18. **Физические** величины: Справ. / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Михайлова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
19. **Захватаев В. Е.** Некоторые слабонелинейные амплитудные уравнения, описывающие поведение тонкого слоя в двухфазном течении вязких теплопроводных жидкостей вдоль цилиндра // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 178–186.
20. **Benney В. J.** Long waves in liquid films // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 150–155.
21. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.** Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
22. **Balmforth N. J., Ierley G. R., Spiegel E. A.** Chaotic pulse trains // SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54, N 5. P. 1291–1334.
23. **Arneodo A., Couillet P. H., Spiegel E. A., Tresser C.** Asymptotic chaos // Physica D. 1985. V. 14. P. 327–347.
24. **Kuramoto Y., Tsuzuki T.** Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55, N 2. P. 356–369.
25. **Захватаев В. Е.** Об одной модели волнового течения тонкого слоя вязкой жидкости: уравнение Бенни // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тез. докл. конф. Екатеринбург: РАН. Урал. отд-ние, 1996. С. 19, 20.

*Поступила в редакцию 17/IV 1996 г.,  
в окончательном варианте — 3/II 1997 г.*

---