ПМТФ, № 6, 1962

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН В ДЕФОРМИРУЕМОМ ХРУПКОМ ТЕЛЕ

В. В. Панасюк

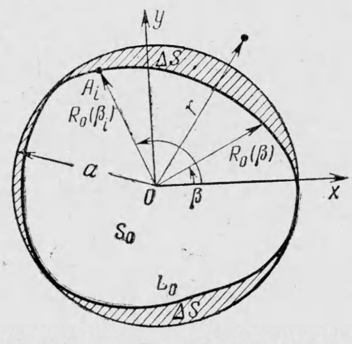
(*Львов*)

Обзор исследований по рассматриваемой проблеме содержится в работах [1,2].
В настоящей работе на основе исследований [3-5] развивается приближенный метод определения критических (предельных [1]) нагрузок для неограниченного хрупкого тела, ослабленного плоскими изолированными трещинами, имеющими в плане (плоскость трещины) форму, близкую к круговой, когда тело подвергнуто растяжению монотонно возрастающими нагрузками, симметричными относительно плоскости трещины. В качестве примеров рассмотрены следующие задачи: растяжение хрупкого тела с эллиптической трещиной; растяжение хрупкого тела с круглой (дискообразной) трещиной двумя сосредоточенными силами, когда линия действия этих сил не проходит через центр указанной трещины; чистый изгиб балки с эллиптической трещиной, когда трещина расположена в зоне растягивающих напряжений.

§ 1. **Постановка задачи и метод ее решения.** Пусть в неограниченном хрупком теле, отнесенном к прямоугольной системе декартовых координат $Oxyz$, содержится изолированная плоская макроскопическая трещина. Предположим, что плоскость трещины совпадает с координатной плоскостью $z = 0$ и трещина занимает в этой плоскости некоторую ограниченную область S_0. Опишем около области S_0 в плоскости $z = 0$ окружность радиусом a (фиг. 1) и будем считать, что начало координат системы $Oxyz$ находится в центре этой окружности. Обозначим далее через $R_0(\beta)$ радиус-вектор контура L_0 области S_0, где β — полярный угол, показанный на фиг. 1. Тогда функция

$$\varepsilon(\beta) = a - R_0(\beta) \qquad (1.1)$$

представляет собой неотрицательную, ограниченную и периодическую функцию с периодом $2\pi (0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi)$.



Фиг. 1

Пользуясь выражением функции (1.1), дадим следующее определение: трещина S_0, ограниченная контуром L_0 (фиг. 1), называется близкой по форме к круговой, если $\max\, \varepsilon(\beta)$ есть величина малая по сравнению с величиной a, т. е. если $\max\, \varepsilon(\beta)$ мало по сравнению с радиусом окружности, описанной около контура L_0 в плоскости трещины.

Предположим теперь, что хрупкое тело, содержащее внутреннюю трещину, близкую по форме к круговой (фиг. 1), растягивается монотонно возрастающими усилиями Q, направленными симметрично относительно плоскости трещины. Определим для такого случая наименьшее значение усилий Q, по достижению которого трещина с контуром L_0 придет в состояние подвижного равновесия [1], хотя бы в одной точке этого контура, т. е. определим наименьшее значение нагрузки $Q = Q_*$, по достижению которой трещина, близкая по форме к круговой, начинает распространяться по сечению тела. Такая нагрузка Q_* называется критической или предельной нагрузкой.

Для определения значений нагрузки $Q = Q_*$ для трещины, имеющей форму, близкую к круговой, воспользуемся некоторыми результатами исследований Г. И. Баренблатта [1,3]. В упомянутых исследованиях показано, что для хрупкого тела с плоской макроскопической трещиной внешние усилия (симметричные относительно плоскости трещины) будут критическими (предельными), если разрывающие упругие напряжения $\sigma_z(x,y,0)$, вызванные этими усилиями, растут в окрестности контура трещины по закону

$$\frac{K}{\pi\sqrt{s}} \quad \text{при } s \to 0 \qquad \left(K = \sqrt{\frac{\pi E \gamma}{1-\nu^2}}\right) \tag{1.2}$$

Здесь $s = s(\beta)$ — расстояние точек тела, расположенных в плоскости трещины, от контура трещины; K — постоянная материала; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; γ — плотность энергии разрушения (поверхностная энергия) материала.

Пользуясь этими результатами, для определения значений нагрузки $Q = Q_*$ получим следующее равенство:

$$\lim_{s\to 0}\{\sqrt{s}\,\sigma_z^*(r, \beta_i, 0)\} = \frac{K}{\pi} \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_z^*(r, \beta, 0)$ — разрывающие упругие напряжения $\sigma_z(r, \beta, 0)$ при нагрузке $Q = Q_*$ в окрестности контура трещины; $r = r(\beta)$ — полярный радиус-вектор точек тела, расположенных в плоскости $z = 0$; необходимо иметь в виду, что $r(\beta)$ можно представить как некоторую комбинацию значений $R_0(\beta_i)$, $s(\beta_i)$ и β_i, где β_i — полярный угол некоторой фиксированной точки контура L_0.

Напряжения $\sigma_z(r, \beta, 0)$ в окрестности трещины, имеющей в плане форму, близкую к круговой (фиг. 1), будем определять приближенно. Для этого используем идею метода, предложенного М. Я. Леоновым для определения давлений под плоским штампом, расположенным на поверхности упругого полупространства и имеющим в плане форму, близкую к круговой [4]. Согласно идее этого метода напряжения $\sigma_z(r, \beta, 0)$ представим в таком виде

$$\sigma_z(r, \beta, 0) = \begin{cases} \sigma_z^{\circ}(r, \beta, 0) + \sigma_z^{(1)}(r, \beta, 0) & \text{при } r \geqslant a \\ -q(r, \beta) & \text{при } R_0(\beta) \leqslant r \leqslant a \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_z^{(0)}(r, \beta, 0)$ — нормальные напряжения, которые возникают в плоскости $z = 0$ упругого неограниченного тела с круглой в плане (плоскость $z = 0$) трещиной радиусом a, когда к телу приложены внешние усилия Q; $q(r, \beta)$ — неизвестное нормальное давление в области ΔS (фиг. 1); $\sigma_z^{(1)}(r, \beta, 0)$ — нормальные напряжения, возникающие в плоскости $z = 0$ при $r \geqslant a$, в результате действия давлений $q(r, \beta)$, приложенных на участках ΔS поверхностей круглой трещины.

Напряжения $\sigma_z^{(0)}(r, \beta, 0)$ для случая, когда внешние усилия Q симметричны относительно плоскости круглой трещины, вычисляются по известным формулам [6, 7]

$$\sigma_z^{(0)}(r, \beta, 0) = \frac{\psi(r, \beta)}{\sqrt{r^2 - a^2}} \qquad (r \geqslant a) \tag{1.5}$$

Здесь $\psi(r, \beta)$ — известная регулярная функция

$$\psi(r, \beta) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}\,[t(\rho, \alpha) + p(\rho, \alpha)]\,\rho d\rho\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \beta)} + \sqrt{r^2 - a^2}\,p(r, \beta) \tag{1.6}$$

где $t(\rho, \alpha)$ — внешнее давление, приложенное к стенкам трещины; $p(\rho, \alpha)$ — нормальные напряжения $\sigma_z(\rho, \alpha, 0)$, возникающие в сплошном (без трещины) упругом теле в плоскости $z = 0$ в результате действия внешних усилий Q, приложенных к телу вне области трещины. В дальнейшем будем считать функцию $p(r, \alpha)$ известной.

Аналогично предыдущему напряжения $\sigma_z^{(1)}(r, \beta, 0)$ выражаются через давление $q(r, \beta)$ формулой

$$\sigma_z^{(1)}(r, \beta, 0) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{r^2 - a^2}} \left\{ \iint_{(\Delta S)} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\, q(\rho, \alpha)\, \rho d\rho\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \beta)} \right\} \quad (r \geqslant a) \tag{1.7}$$

На основании формул (1.4), (1.5) и (1.7) напряжения $\sigma_z(r, \beta, 0)$ при $r \geqslant a$ можно представить в следующем виде:

$$\sigma_z(r, \beta, 0) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \left\{ \psi(r, \beta) + \frac{1}{\pi^2} \iint_{(\Delta S)} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\, q(\rho, \alpha)\, \rho\, d\rho\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \beta)} \right\}$$

$$(r \geqslant a,\ R_0(\beta) \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi) \tag{1.8}$$

Окружность радиусом a (фиг. 1), описанная около контура L_0, расположена в области упругого материала. Следовательно, напряжения σ_z $(r, \beta, 0)$ должны быть непрерывными на линии $r = a$. Из формулы (1.8) следует, что необходимым условием непрерывности напряжений $\sigma_z(r, \beta, 0)$ при $r = a$ является следующее равенство:

$$\lim_{r \to a} \left\{ \psi(r, a) + \frac{1}{\pi^2} \iint_{(\Delta S)} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\, q(\rho, \alpha)\, \rho\, d\rho\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \beta)} \right\} = 0 \tag{1.9}$$

Этим равенством воспользуемся в дальнейшем для определения искомых напряжений $\sigma_z(r, \beta, 0) = -q(r, \beta)$ в области ΔS.

Искомое давление $q(r, \beta)$ представим по аналогии с формулой (1.5) в следующем виде:

$$q(r, \beta) = \frac{\varphi(r, \beta)}{\sqrt{r^2 - R_0^2(\beta)}} \tag{1.10}$$

Здесь $\varphi(r, \beta)$ — неизвестная регулярная функция; будем искать приближенное выражение для $\varphi(r, \beta)$ с точностью до малых $(\varepsilon(\beta) / a)^2$.

Для этого разложим функцию $\varphi(r, \beta)$ в ряд по степеням $(r - a)$ в окрестности точек $r = a$. Тогда с точностью до $(\varepsilon(\beta) / a)^2$ будем иметь

$$\varphi(r, \beta) = \varphi(a, \beta) + (r - a)\, \varphi'_r(a, \beta) \tag{1.11}$$

Кроме того, заметим, что с такой же степенью точности

$$\sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - R_0^2(\alpha)}} \approx \left[1 + \frac{\varepsilon(\alpha)}{4a}\right] \sqrt{\frac{a - \rho}{\rho - R_0(\alpha)}} \tag{1.12}$$

Пользуясь теперь формулами (1.10) — (1.12) и считая контур L_0 регулярным, уравнение (1.9) с точностью до малых величин $(\varepsilon(\beta) / a)^2$ включительно можно записать так

$$\psi(a, \beta) = -\frac{1}{\pi^2} \lim_{r \to a} \int_0^{2\pi} u(\alpha) \{\varphi_0(\alpha)\, I_0(r, \alpha, \theta) + \varphi_1(\alpha)\, I_1(r, \alpha, \theta\}\, d\alpha \tag{1.13}$$

где

$$u(\alpha) = 1 + \frac{\varepsilon(\alpha)}{4a}, \quad \varphi_0(\alpha) = \varphi(a, \alpha), \quad \varphi_1(\alpha) = \varphi'_r(a, \alpha), \quad \theta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$I_0(r, \alpha, \theta) = \int_{R_0(\alpha)}^{a} \sqrt{\frac{a - \rho}{\rho - R_0(\alpha)}} \frac{\rho d\rho}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos 2\theta} \tag{1.14}$$

$$I_1(r, \alpha, \theta) = \int_{R_0(\alpha)}^{a} \sqrt{\frac{a - \rho}{\rho - R_0(\alpha)}} \frac{\rho(\rho - a)\, d\rho}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos 2\theta}$$

Вычислив интегралы (1.14) с точностью до величин порядка $(\varepsilon(\beta)/a)^2$, как это сделано в работах [4,5], и подставив полученные выражения в уравнение (1.13), а затем осуществив предельный переход при $r \to a$ под знаком интеграла, получим с точностью до малых величин $\varepsilon(\beta)/a$ включительно следующее уравнение для определения функции $\varphi_0(\beta)$:

$$\psi(a, \beta) = -\varphi_0(\alpha) + \frac{1}{2}\varepsilon(\beta)\varphi_1(\beta) + \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}[\varepsilon(\alpha)\varphi_0(\alpha)]\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}d\alpha \qquad (1.15)$$

Так как уравнение (1.15) составлено с точностью до малых величин $\varepsilon(\beta)/a$ включительно, то целесообразно решение этого уравнения искать с такой же точностью. Воспользовавшись для этого методом последовательных приближений, из уравнения (1.15) с точностью до величин $\varepsilon(\beta)/a$ включительно получим

$$\varphi_0(\beta) = -\psi(a, \beta) - \frac{1}{2}\varepsilon(\beta)\psi'_r(a, \beta) - \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}[\varepsilon(\alpha)\psi(a, \alpha)]\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}d\alpha \qquad (1.16)$$

Таким образом, на основании равенств (1.4), (1.10), (1.11) и (1.16) получим следующую формулу для приближенного (с точностью до величин $\varepsilon(\beta)/a$ включительно) определения напряжений $\sigma_z(r, \beta, 0)$ в области ΔS (фиг. 1)

$$\sigma_z(r, \beta, 0) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - R_0^2(\beta)}}\Big\{\psi(a, \beta) + \frac{1}{2}\varepsilon(\beta)\psi'_r(a, \beta) + (r-a)\psi'_r(a, \beta) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}[\varepsilon(\alpha)\psi(\alpha, \alpha)]\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}d\alpha\Big\} \qquad \begin{pmatrix} R_0(\beta) \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

Здесь $\psi(a, \beta)$, $\psi'_r(a, \beta)$, $\varepsilon(\beta)$ — известные функции.

Пользуясь теперь выражением (1.17) и равенством (1.3), можно получить после некоторых преобразований приближенное уравнение для определения критических (предельных) значений нагрузки $Q = Q_*^{(i)}$, по достижению которой в точках $R_0(\beta_i)$ контура трещины L_0 (фиг. 1) наступает подвижно-равновесное состояние, т. е. когда трещина в точках $R_0(\beta_i)$ начинает распространяться по сечению тела. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2R_0(\beta_i)}}\Big\{\psi_*(a, \beta_i) - \frac{1}{2}\varepsilon(\beta_i)\psi'_{*r}(a, \beta_i) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}[\varepsilon(\alpha)\psi_*(a, \alpha)]\operatorname{ctg}\frac{\beta_i-\alpha}{2}d\alpha\Big\} = K \qquad (1.18)$$

Здесь обозначено через $\psi_*(a, \beta)$ значение функции $\psi(a, \beta)$ при нагрузке $Q = Q_*$.

Уравнением (1.18) воспользуемся в дальнейшем для решения некоторых неосесимметричных задач теории равновесных трещин.

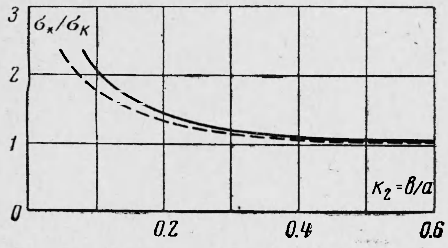
§ 2. Равномерное растяжение хрупкого тела с эллиптической трещиной. Пусть в неограниченном хрупком теле содержится плоская изолированная трещина, имеющая в плане форму эллипса, пусть такое тело растягивается в бесконечно удаленных его точках постоянными напряжениями $\sigma_z(x, y, \infty) = \sigma_\infty$, направленными перпендикулярно к плоскости трещины. Определим для этого случая величину предельной (критической) нагрузки $\sigma_\infty = \sigma_*^{(b)}$, по достижению которой контур эллиптической трещины приходит в состояние подвижного равновесия в точках, расположенных на меньшей полуоси эллипса.

В работе [8] дано точное решение этой задачи и установлено, что

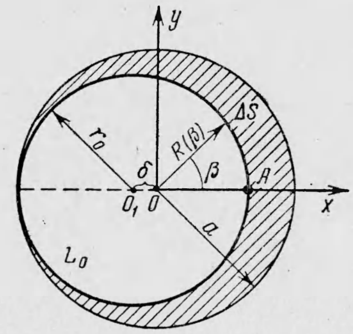
$$\sigma_*^{(b)} = E(k)\sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)b}} \qquad \left(k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) \tag{2.1}$$

где k^2 — эксцентриситет эллипса; a, b — большая и меньшая полуоси эллипса; $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем k

Здесь эта задача решается приближенно на основе метода, изложенного выше, и сопоставляются значения $\sigma_*^{(b)}$, найденные по формуле (1.18), со значениями $\sigma_*^{(b)}$, вытекающими из формулы (2.1).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для рассматриваемой задачи контур трещины определяется равенством

$$R_0(\beta) = R_э(\beta) = \frac{b}{\sqrt{1-k^2\cos^2\beta}} \qquad \left(k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) \tag{2.2}$$

Угол β отсчитывается от большей $(2a)$ оси трещины (фиг. 1). Согласно формуле (1.1) имеем

$$\varepsilon_э(\beta) = a - \frac{b}{\sqrt{1-k^2\cos^2\beta}} \tag{2.3}$$

Здесь a — большая полуось эллиптической трещины и одновременно значение радиуса окружности, описанной около этой трещины.

Для рассматриваемого вида нагрузки $\sigma_z(x, y, \infty) = \sigma_\infty = \text{const}$ по формуле (1.6) имеем

$$\psi(r, \beta) = \frac{2\sigma_\infty}{\pi}\left\{a + \sqrt{r^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{r}\right)\right\} \tag{2.4}$$

$$\psi_*(a, \beta) = \frac{2a\sigma_*}{\pi}, \qquad \psi'_{*r} = \frac{4\sigma_*}{\pi}$$

Подставив выражения (2.3) и (2.4) в уравнение (1.18) и осуществив несложные преобразования, получим

$$\sigma_*^{(\beta)} = \frac{K\sqrt{2R_э(\beta)}}{2\{R_э(\beta) + I(\beta)\}} \qquad \left(I(\beta) = \frac{bk^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1-k^2\cos^2\alpha)^{3/2}}\operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}\,d\alpha\right) \tag{2.5}$$

Здесь интеграл можно представить через полные эллиптические интегралы:

$$I(\beta) = \frac{b}{\pi}\left\{K(k) - \frac{E(k)}{1-k^2\cos^2\beta} - \frac{k^2\sin^2\beta}{1-k^2\cos^2\beta}\Pi(n, k)\right\} \tag{2.6}$$

где $n = -1/\cos^2\beta$; $K(k)$, $E(k)$ и $\Pi(n, k)$ — обычные обозначения полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода соответственно.

Так как для рассматриваемой задачи требуется определить только значения $\sigma_*^{(\beta)}$ при $\beta = \pi/2$, то на основании формул (2.6) и (2.5) легко находим

$$\sigma_*^{(\beta)} = \sigma_*^{(b)} \approx \frac{\pi\sigma_k}{\sqrt{k_1}\,[\pi + K(k) - E(k)]} \qquad \left(k_1 = \frac{b}{a}, \ \sigma_k = \frac{K}{\sqrt{2a}}\right) \tag{2.7}$$

На фиг. 2 построены графики изменения $\sigma_*^{(b)}/\sigma_k$ в зависимости от значений параметра k_1, где сплошная линия соответствует формуле (2.1), а пунктирная — формуле (2.7). Как видно из графиков фиг. 2, значения $\sigma_*^{(b)}/\sigma_k$, вычисленные на основе развиваемого в работе приближенного метода, находятся в хорошем соответствии с точными значениями $\sigma_*^{(b)}/\sigma_k$, вытекающими из формулы (2.1).

§ 3. Растяжение хрупкого тела с круглой трещиной в случае неосесимметричной нагрузки. Рассмотрим неограниченное хрупкое тело, ослабленное внутренней изолированной трещиной, имеющей в плане (плоскость $z = 0$ на фиг. 3) форму круга радиусом r_0 с центром в точке Q_1. Пусть такое тело растягивается двумя равными сосредоточенными силами P, линия действия которых проходит через некоторую точку O, отстоящую от центра трещины на расстоянии $\delta = O_1O$ (фиг. 3). Введем систему декартовых координат $Oxyz$; при этом пусть начало координат совпадает с точкой O, а ось x включает отрезок O_1O. Будем далее считать, что силы P приложены к телу в точках с координатами $(0,\ 0,\ h)$ и $(0, 0, -h)$.

Требуется определить для этого случая предельное (критическое) значение сил $P = P_*$.

Для приближенного решения этой задачи поступим следующим образом. Проведем в плоскости xy окружность радиусом $a = r_0 + \delta$ с центром в точке O и будем считать контур трещины L_0 близким (фиг. 3) к окружности радиусом a. В полярной системе координат с центром в точке O уравнение контура L_0 рассматриваемой трещины можно записать так:

$$R_0(\beta) = R(\beta) = \sqrt{r_0^2 - \delta^2 \sin^2\beta} - \delta \cos\beta \tag{3.1}$$

где β — полярный угол, указанный на фиг. 3.

Тогда согласно (1.1) будем иметь

$$\varepsilon_1(\beta) = a - R(\beta) = a - \sqrt{r_0^2 - \delta^2 \sin^2\beta} + \delta\cos\beta$$

$$\varepsilon_1'(\beta) = \frac{\delta^2 \sin\beta\cos\beta}{\sqrt{r_0^2 - \delta^2\sin^2\beta}} - \delta\sin\beta \qquad (a = r_0 + \delta) \tag{3.2}$$

Распределение нормальных напряжений $\sigma_z(r, \beta, 0)$ в плоскости $z = 0$ упругого тела (без трещины), растягиваемого сосредоточенными силами P перпендикулярно к плоскости $z = 0$, определяется формулой

$$p(r, \beta) = \frac{P}{4\pi(1-\nu)} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \left(\frac{3h^2}{r^2 + h^2} + 1 - 2\nu \right) \tag{3.3}$$

где $2h$ — расстояние между точками приложения сил P.

Пользуясь формулами (1.6) и (3.3), после необходимых вычислений найдем

$$\psi_*(a, \beta) = P_*\psi_0 = P_* \frac{1}{\pi^2(1-\nu)a} \left\{ \frac{1-\nu}{1+m^2} + \frac{m^2}{(1+m^2)^2} \right\} \tag{3.4}$$

$$\psi'_*(a, \beta) = P_*\psi_1 = P_* \frac{2(2-\nu)m^4 - 6m^2 - 2(1-\nu)}{\pi^2 a^2 (1-\nu)(1+m^2)^3} \qquad \left(m^2 = \frac{h^2}{a^2} \right)$$

На основе равенств (3.2), (3.4) и уравнения (1.18) легко получаем формулу для определения предельных значений силы P_*. Эта формула имеет следующий вид:

$$P_*(\beta) = \frac{K\sqrt{2R(\beta)}}{\pi\{\psi_0 - {}^1/{}_2\varepsilon_1(\beta)\psi_1 + \psi_0 I_1(\beta)\}} \tag{3.5}$$

где ψ_0 и ψ_1 определяются из равенств (3.4)

$$I_1(\beta) = \frac{\delta^2}{4\pi a r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1 - \eta^2\sin^2\alpha}} \operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}\, d\alpha - \frac{\delta}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \sin\alpha \operatorname{ctg}\frac{\beta-\alpha}{2}\, d\alpha \quad \left(\eta^2 = \frac{\delta^2}{r_0^2} \right) \tag{3.6}$$

Первый интеграл в (3.6) выражается через комбинацию полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода, а второй интеграл в этой формуле вычисляется элементарно. В частности, при $\beta = 0$ из (3.6) найдем

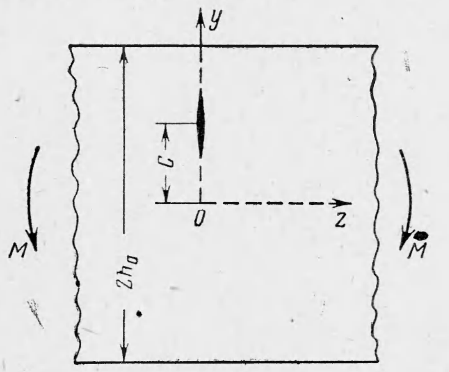
$$I_1(0) = \frac{r_0}{\pi a}[(1-\eta^2)K(\eta) - E(\eta)] + \frac{\delta}{2a} \tag{3.7}$$

Пользуясь этим равенством, формулу (3.5) для точки A (фиг. 3) контура L_0 можно преобразовать к виду

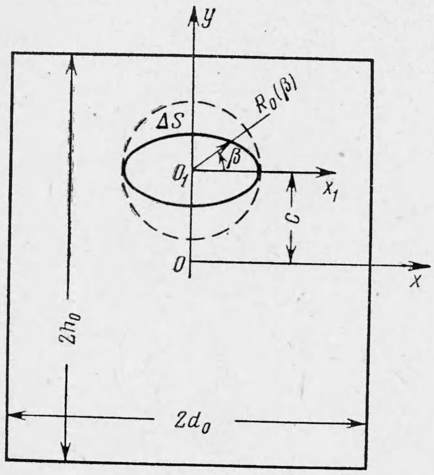
$$P_*^{(0)} = \frac{K\sqrt{2(r_0-\delta)}}{\pi\{\psi_0 - \delta\psi_1 + \psi_0 I_1(0)\}} \tag{3.8}$$

Здесь ψ_0, ψ_1 и $I_1(0)$ определяются формулами (3.4) и (3.7).

Эта формула позволяет приближенно (с точностью до δ/a включительно) определить предельное значение сосредоточенных сил P при эксцентричном растяжении хрупкого тела с круглой трещиной, когда расстояние δ между линией действия сил P и центром контура круглой трещины мало по сравнению с радиусом a (фиг. 3).



Фиг. 4



Фиг. 5

§ 4. Чистый изгиб балки с плоской трещиной, имеющей в плане форму эллипса. Пусть бесконечно длинная упругая балка с поперечным сечением $2h_0 \times 2d_0$ изгибается постоянными изгибающими моментами величины M (фиг. 4 и 5). Отнесем балку к прямоугольной системе декартовых координат $Oxyz$ и будем считать, что ось z этой системы совпадает с осью балки, координатные оси x и y параллельны ее боковым граням, а изгибающие моменты M действуют в плоскостях, параллельных плоскости $x = 0$. Пусть далее в балке в зоне растягивающих напряжений содержится плоская трещина, имеющая в плане (плоскость $z = 0$) форму эллипса (фиг. 5). Для такой задачи требуется определить предельное значение изгибающих моментов $M = M_*$.

В дальнейшем для упрощения вычислений будем считать, что эллиптическая трещина ориентирована так, как это показано на фиг. 5. В таком случае уравнение контура рассматриваемой трещины имеет вид

$$R_э(\beta) = \frac{b}{\sqrt{1-k^2\cos^2\beta}} \qquad \left(k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) \tag{4.1}$$

где a, b — большая и меньшая полуоси эллиптической трещины, которые, вообще говоря, считаются малыми по сравнению с размерами (h_0, d_0) поперечного сечения балки.

Кроме того, обозначим через c расстояние центра трещины от плоскости $y = 0$ (фиг. 5) и будем считать $c \geqslant a$.

Для решения сформулированной задачи аналогично предыдущим примерам опишем около трещины в плоскости $z = 0$ окружность радиусом a и вычислим функции $\varepsilon_э(\beta)$, $\psi_*(a, \beta)$, $\psi'_*(a, \beta)$. Функция $\varepsilon_э(\beta)$ в данном случае определяется формулой (2.3), а для определения функций $\psi_*(a, \beta)$ и $\psi'_*(a, \beta)$ заметим, что для рассматриваемой задачи упругие напряжения $\sigma_z(r,\beta,0) = p(r,\beta)$ в балке без трещины выражаются формулой

$$p(r, \beta) = \frac{M}{I}(r \sin \beta + c) \tag{4.2}$$

где $I = {}^4/_3\, h_0^3 d_0$ — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x.

Пользуясь выражением (4.2) и формулой (1.16), получим

$$\psi(r, \beta) = \frac{M}{\pi^2 I}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\,(\rho \sin \alpha + c)\,\rho\, d\rho\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \beta)} + \sqrt{r^2 - a^2}\, p(r, \beta) \tag{4.3}$$

Для вычисления интегралов, входящих в эту формулу, заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\alpha\, d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2\pi}{r^2 + \rho^2}\,\frac{(1 - \sqrt{1 - \mu^2})^n}{\mu^n \sqrt{1 - \mu^2}} \sin n\beta \qquad (\rho < r)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2\pi}{r^2 + \rho^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} = \frac{2\pi}{r^2 - \rho^2} \qquad \left(\mu = \frac{2r\rho}{r^2 + \rho^2}\right)$$

Пользуясь этими формулами и равенством (4.3), получим

$$\psi(r, \beta) = \frac{2M}{\pi I}\left\{\frac{\sin \beta}{r}\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho^3\, d\rho}{r^2 - \rho^2} + c\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho}{r^2 - \rho^2}\right\} + \sqrt{r^2 - a^2}\, p(r, \beta) \qquad (r \geqslant a) \tag{4.4}$$

Вычислив интегралы, входящие в (4.4), и осуществив необходимые преобразования при $r \to a$, найдем

$$\psi_*(a, \beta) = \frac{2M_*}{\pi I}\left(\frac{2}{3} a^2 \sin \beta + ac\right), \quad \psi'_{*r}(a, \beta) = \frac{2M_*}{\pi I}(4a \sin \beta + 2c) \tag{4.5}$$

Подставив теперь в уравнение (1.18) значения $\varepsilon_э(\beta)$, $\psi_*(a, \beta)$, $\psi'_{*r}(a, \beta)$, представленные для рассматриваемой задачи формулами (2.3), (4.5), получим для критических (предельных) значений изгибающего момента $M = M_*$

$$M_*(\beta) = \frac{K\sqrt{2R_э(\beta)}}{\Lambda(\beta)} \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Lambda(\beta) = \frac{2}{I}\left\{\frac{2}{3}a^2 \sin \beta + ac - (2a \sin \beta + c)\left(a - \frac{b}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \beta}}\right) + cI(\beta) + \frac{2}{3}a\,[aI_2(\beta) - b(1 - k^2)\, I_3(\beta)]\right\}$$

$$I_2(\beta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos \alpha \operatorname{ctg}\frac{\beta - \alpha}{2}\, d\alpha = \frac{1}{2}\sin \beta \tag{4.7}$$

$$I_3(\beta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{(1 - k^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}} \operatorname{ctg}\frac{\beta - \alpha}{2}\, d\alpha$$

Интеграл I (β) определяется формулой (2.6).

Входящий в формулу (4.7) интеграл I_3 (β) выражается через комбинацию полных эллиптических интегралов такой формулой:

$$I_3(\beta) = \frac{\sin\beta}{\pi(1-k^2\cos^2\beta)}\left\{\frac{E(k)}{1-k^2} - \Pi(n, k)\right\}, \qquad I_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{E(k)}{\pi(1-k^2)}$$

Здесь обозначения те же, что и в (2.6).

Пользуясь этими формулами и формулой (4.6), вычислим значения M_* для точки A ($^1/_2\,\pi$) контура рассматриваемой трещины (фиг. 5). Для этого, полагая $\beta = {}^1/_2\pi$ в (4.6), найдем

$$M_*(\pi/2) = \frac{K\sqrt{2b}}{\Lambda(^1/_2\pi)} \tag{4.8}$$

где

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{I}\left\{2ab - a^2 + bc + \frac{b}{\pi}\left[cK(k) - \left(c + \frac{2}{3}a\right)E(k)\right]\right\}$$

В том частном случае, когда контур рассматриваемой трещины (фиг. 5) является окружностью радиусом a, т. е., когда $a = b$, из формулы (4.8) легко получим

$$M_*(\pi/2) = \frac{3IK}{(2a+3c)\sqrt{2a}} \qquad (a=b) \tag{4.9}$$

Пользуясь формулами (4.8) и (4.9), легко подсчитать в каждом конкретном случае предельное значение изгибающего момента M при чистом изгибе балки с внутренней трещиной, имеющей в плане (плоскость трещины) форму эллипса или круга (фиг. 5).

Институт машиноведения
и автоматики АН УССР

Поступила 31 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
2. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
3. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3—5.
4. Леонов М. Я. и Чумак К. И. Тиск пiд штампом, близьким до кругового в планi. Прикладна механiка, АН УРСР, 1959, т. 5, вип. 2.
5. Панасюк В. В. Про поширення трiщини, яка в планi має форму, близьку до круговоi. Доповiдi АН УРСР, 1962, № 7.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
7. Леонов М. Я. Общая задача о давлении штампа на упругое полупространство. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.
8. Панасюк В. В. Про одну просторову задачу теорii пружностi для iзотропного тiла з елiптичною трiщиною. Прикладна механiка, АН УРСР, 1962, т. 6, вип. 3.