

**ДВУМЕРНОЕ РАСШИРЕНИЕ СГУСТКА ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ****В. И. Яковлев***(Новосибирск)*

Построено автомоделное решение задачи о расширении в магнитном поле сгустка проводящего газа в виде цилиндра некругового сечения. По цилиндрической поверхности газ удерживается непроводящей оболочкой, расширяющейся по заданному закону. Форма поперечного сечения цилиндрического сгустка определяется из решения. Полученные для конкретного случая сечения представлены в графическом виде.

Необходимость исследования двумерных нестационарных движений в магнитной газодинамике вызывается характером течений во многих МГД устройствах. Теоретическому рассмотрению подобных задач посвящено большое число работ. В предположении малости магнитного числа Рейндольдса R_m и параметра магнитогидродинамического взаимодействия изучены вихревые токи, возникающие в газе за ударной волной в области неоднородности внешнего магнитного поля, и их влияние на скорости распространения ударной волны [1] и на торможение плазменного сгустка в канале [2]. В работе [3] при $R_m = \infty$ изучено поведение двумерного Z-пинча с образованием плазменного фокуса; установлены параметры осевой плазменной струи.

В двумерных задачах, так же как в одномерных, важно рассмотрение конечных значений числа R_m , так как, во-первых, в некоторых экспериментальных установках это число заведомо не мало [4], а во-вторых, как показано в работе [5], даже в течениях с первоначально малым R_m развитие малых, но конечных возмущений проводимости может привести к существенной перестройке течения с образованием высокотемпературных слоев, в результате чего эффективное значение магнитного числа Рейнольдса увеличивается и индуцированные магнитные поля становятся существенными.

В общем случае эти задачи могут быть исследованы, очевидно, только с применением методов вычислительной математики, но и при этом остается необходимость в точных решениях.

Одним из наиболее известных методов получения точных решений является метод автомоделных решений. Обычно при этом рассматриваются задачи, в первоначальной формулировке которых все искомые функции зависят только от двух независимых переменных; введение автомоделной переменной сводит задачу к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 7].

В случае же нестационарных двумерных задач магнитной газодинамики с тремя независимыми переменными возможность получения точного решения автомоделной задачи не очевидна, поэтому построение такого решения представляет интерес.

В данной работе приведен пример автомоделного решения задачи для случая двумерного расширения сгустка проводящего газа, ограниченно-го непроводящей подвижной оболочкой.

Пусть имеется двумерный сгусток проводящего газа в виде цилиндра с образующими по оси z , удерживаемый с боковой поверхности непроводящей оболочкой. Сечением цилиндра плоскостью $z = \text{const}$ является некоторая замкнутая кривая, вид которой находится из решения. Вся система находится во внешнем магнитном поле, имеющем только z -компоненту.

Пусть в некоторый момент времени оболочка начнет расширяться, оставаясь геометрически подобной по форме сечения, а напряженность внешнего магнитного поля начнет уменьшаться. Перемещение оболочки приводит в движение газ, в котором индуцируются замкнутые электрические токи, лежащие в плоскости $z = \text{const}$. Магнитное поле этих токов будет складываться с внешним магнитным полем и изменять его внутри сгустка; на поле вне сгустка токи проводимости влияния не оказывают. Влияние токов смещения на магнитное поле вне сгустка также пренебрежимо мало (так как скорость расширения сгустка мала по сравнению со скоростью света).

По истечении некоторого промежутка времени характерный размер сгустка d становится существенно больше начального размера d_0 , а напряженность внешнего поля H — меньше H_0 . С этого времени решение перестает зависеть от d_0 , H_0 и начальных условий в сгустке (за исключением малой окрестности начала координат). Решение, получающееся после выхода на автомодельный режим, будет построено в данной работе.

Используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) , рассматривается случай $\partial/\partial z \equiv 0$. Пусть r_* есть r -координата точек границы сгустка; по условию $r_* = r_*(\varphi, t)$.

Ищется решение с полем скоростей

$$\mathbf{v} = v(r, t) \mathbf{e}_r, \quad v(r, t) = rf'(t)/f(t) \quad (1)$$

и с магнитным полем $\mathbf{H} = H(r, \varphi, t) \mathbf{e}_z$.

Движение с полем скоростей (1) обеспечивает геометрическое подобие границы сгустка (что необходимо для автомодельности процесса) при любых t .

Уравнения магнитной газодинамики с учетом (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) &= 0 \\ \rho \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rvH) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(v_m r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v_m}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad \left(v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad \sigma = \Omega P^n \rho^m \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где v_m — магнитная вязкость, σ — проводимость, c — скорость света.

Уравнения (2) записаны в предположении, что среда представляет собой совершенный газ с постоянными теплоемкостями, вязкость и теплопроводность отсутствуют, проводимость считается связанной с давлением P и плотностью ρ степенной зависимостью. В уравнении энергии джоулево тепло не учтено.

Предполагая поперечный размер сгустка равным нулю в момент времени $t = 0$, будем считать, что закон перемещения оболочки задан в виде

$$r_* = lt^{\beta} \psi(\varphi) \quad (3)$$

а напряженность внешнего магнитного поля изменяется по закону

$$H_*(t) = \Lambda t^{\alpha} \quad (4)$$

Здесь $\psi(\varphi)$ — подлежащая определению безразмерная периодическая функция от угла φ , l и Λ — размерные постоянные с размерностями $[l] = \text{см} \cdot \text{сек}^{-\beta}$, $[\Lambda] = \varepsilon^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{сек}^{-(1+\alpha)}$, α ; β — безразмерные постоянные. Кроме того, пусть M_0 — масса газа, приходящего на единицу длины цилиндрического сгустка, $[M_0] = \varepsilon \cdot \text{см}^{-1}$. Таким образом, определяющими параметрами задачи по [6] являются

$$r, \varphi, t, \Lambda, 4\pi\Omega/c^2, l, M_0 \quad ([4\pi\Omega/c^2] = \varepsilon^{-(n+m)} \cdot \text{см}^{n+3m-2} \cdot \text{сек}^{2n+1})$$

при $\alpha = -1$, $\beta = -(2n+1)/2(m-1)$ задача автомодельна. При этом из параметров $r, t, \Lambda, 4\pi\Omega/c^2, l, M_0$, можно образовать единственную безразмерную величину

$$\xi = r l^{-1} t^{(2n+1)/2(m-1)} \quad (5)$$

которая на внешней границе сгустка согласно (3) принимает значение

$$\xi_* = \psi(\varphi) \quad (6)$$

Искомое решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} v(r, t) &= -\frac{2n+1}{2(m-1)} \frac{r}{t} = -\frac{2n+1}{2(m-1)} l t^{-(2n+1)/2(m-1)-1} \xi \\ H(r, \varphi, t) &= \sqrt{8\pi\Lambda} t^{-1} h(\xi, \varphi), \quad P(r, \varphi, t) = \Lambda^2 t^{-2} p(\xi, \varphi) \\ \rho(r, t) &= \frac{M_0}{r^2} \rho_1(\xi) = \frac{M_0}{l^2} t^{(2n+1)(m-1)} \rho_0(\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

Скорость v удовлетворяет требуемому граничному условию

$$v(r, t)|_{r=r_*(\varphi, t)} = \partial r_* / \partial t$$

в выражении для плотности опущена зависимость от φ , что очевидно из уравнений (2).

Подстановка (7) в (2) определяет уравнения для функций $\rho_0(\xi)$, $h(\xi, \varphi)$, $p(\xi, \varphi)$. При этом первое из уравнений (2) удовлетворяется тождественно, а пятое уравнение из (2) сводится к соотношению

$$\gamma = -2(m-1)/(2n+1) \quad (8)$$

где γ — показатель адиабаты.

Второе, третье и четвертое уравнения из системы (2) приводятся к следующим:

$$\frac{M_0}{\Lambda^2} \frac{\gamma-1}{r^2} \xi \rho_0(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} (p + h^2), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (p + h^2) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[p^{-n} \rho_0^{-m} \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[p^{-n} \rho_0^{-m} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right] = \frac{2-\gamma}{\gamma} N h(\xi, \varphi) \quad (10)$$

$$\left(N = \frac{4\pi\Omega}{c^2} l^2 \Lambda^{2n} \left(\frac{M_0}{l^2} \right)^m \right)$$

Кроме уравнений (9), (10) искомое решение обязано удовлетворять граничному условию по магнитному полю

$$H(r, \varphi, t)|_{r=r_*(\varphi, t)} = H_*(t)$$

которое с учетом (4), и второго из (7) приводится к виду

$$h[\xi_*(\varphi), \varphi] = (8\pi)^{-1/2} \quad (11)$$

Ищутся частные решения уравнений (9), (10) вида

$$h(\xi, \varphi) = R(\xi) F(\varphi), \quad p(\xi, \varphi) = R^2(\xi) [1 - F^2(\varphi)] \quad (12)$$

причем функции $R(\xi)$, $\rho_0(\xi)$, $F(\varphi)$ согласно (9), (10) должны удовлетворять уравнениям

$$[R^2(\xi)]' = \frac{M_0}{\Lambda^2} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \xi \rho_0(\xi) \quad (13)$$

$$\frac{1}{\xi R} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi R'(\xi)}{R^{2n} \rho_0^m} \right] \frac{1}{(1-F^2)^n} + \frac{1}{\xi^2 R^{2n} \rho_0^m} \frac{1}{F(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{F'(\varphi)}{(1-F^2)^n} \right] = \frac{2-\gamma}{\gamma} N$$

последнее из которых эквивалентно следующим:

$$\xi^2 R^{2n}(\xi) \rho_0^m(\xi) = a, \quad \frac{1}{\xi R(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi R'(\xi)}{R^{2n}(\xi) \rho_0^m(\xi)} \right] = b \quad (14)$$

$$\frac{ab}{(1-F^2)^n} + \frac{1}{F(\varphi)} \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{F'(\varphi)}{(1-F^2)^n} \right] = aN \frac{2-\gamma}{\gamma} \quad (15)$$

Здесь a, b — произвольные константы, на которые накладывается ограничение (17).

Решения уравнений (13), (14) имеют вид

$$R(\xi) = a^{1/2(m+n)} \left(\frac{M_0}{2\Lambda} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{m+n}{m-1} \right)^{m/2(m+n)} \xi^{(m-1)/(m+n)} \quad (16)$$

$$\rho_0(\xi) = a^{1/(m+n)} \left(\frac{M_0}{2\Lambda} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{m+n}{m-1} \right)^{-n/(m+n)} \xi^{-2(n+1)/(m+n)}$$

Эти решения удовлетворяют второму уравнению из (14), при

$$ab = \frac{(m-1)(3m+2n-1)}{(m+n)^2} \quad (17)$$

Следует заметить, что решения (16) получены в предположении $m \neq 0$, $m+n \neq 0$. Случай $m=0$ отброшен как физически неинтересный, случай $m+n=0$ не рассматривается вследствие того, что при этом совместность уравнений (13), (14) достигается только при $n=-1$ (т. е. проводимость обратно пропорциональна температуре), что также не представляет физического интереса.

Граничное условие (11) с учетом (12), (16) приобретает вид

$$\xi_*^{(m-1)/(m+n)}(\varphi) F(\varphi) = a^{-1/2(m+n)} \left(\frac{M_0}{2\Lambda} \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{m+n}{m-1} \right)^{-m/2(m+n)} (8\pi)^{-1/2} \quad (18)$$

Оно фактически используется для нахождения $\xi_*(\varphi)$, т. е. для определения формы поперечного сечения цилиндрического ступка, после решения уравнения для $F(\varphi)$.

Обратимся к уравнению (15). Из вида решения (12) и условия (18) видно, что физический смысл имеет ограниченное пределами $0 \leq F \leq 1$ периодическое решение этого уравнения. Период должен совпадать с одним из значений $2\pi/i$ ($i=1, 2, 3, \dots$), где i на основании (18) определяет количество «лепестков» в сечении ступка.

Обозначив через F_0 ($0 < F_0 < 1$) минимальное значение $F(\varphi)$, граничные условия для уравнения (15) можно записать в виде

$$F(0) = F_0, \quad F'(0) = 0 \quad (19)$$

Значение F_0 определяется из условия, чтобы период функции $F(\varphi)$ совпадал с $2\pi/i$.

Уравнение (15) содержит две постоянные — ab и aN . Первая из постоянных определена условием (17) и при выбранных ниже (20) значениях m, n принимает значение $ab = 35$. Вторая постоянная aN является про-

извольной, удовлетворяющей, как показано ниже, условию $(2 - \gamma) \gamma^{-1} \cdot aN > ab$.

Постоянная aN связана с магнитным числом Рейнольдса. Так как в рассматриваемой задаче нет характерных масштабов длины и скорости, число R_m может быть вычислено только по текущим параметрам $\sigma(\xi, \varphi, t) = \Omega P^n(\xi, \varphi, t) \rho^m(\xi, \varphi, t), v(\xi, t), r(\xi, t)$ некоторой фиксированной частицы. Оказывается, что для полученного решения это число не зависит от ξ, t и определяется только параметром φ рассматриваемой частицы. Действительно, подстановка решений P, ρ, v, r в выражение R_m приводит к следующему результату:

$$R_m = 4 \pi \Omega P^n \rho^m v r c^{-2} = aN (1 - F^2)^n$$

Отсюда видно, что задание aN в некоторой степени равносильно заданию числа R_m .

Введя новую функцию

$$u(F) = \frac{F'(\varphi)}{(1 - F^2)^n}, \quad \frac{d}{d\varphi} = F'(\varphi) \frac{d}{dF} = u(1 - F^2)^n \frac{d}{dF}$$

уравнение (15) можно один раз проинтегрировать. В результате получим

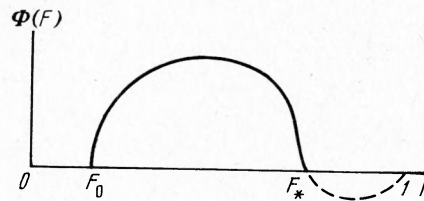
$$u^2 = \frac{2 - \gamma}{\gamma} aN J_1(F) - ab J_2(F) + D$$

$$\left(J_1(F) = \int \frac{2F dF}{(1 - F^2)^n}, \quad J_2(F) = \int \frac{2F dF}{(1 - F^2)^{2n}} \right)$$

где D — произвольная постоянная интегрирования. Интегралы $J_1(F)$ и $J_2(F)$ принимают различный вид в зависимости от показателя n .

При выборе n необходимо иметь в виду, что постоянные γ, m, n должны удовлетворять условию (8), которое, ограничивая произвол в выборе γ, m, n , тем не менее оставляет возможность для рассмотрения физически оправданных случаев. Например, можно взять

$$\gamma = 5/3, \quad m = -3/2, \quad n = 1 \quad (20)$$



Фиг. 1

При этих значениях m, n зависимость проводимости σ от температуры и давления $\sigma \sim T^{3/2} P^{-1/2}$ достаточно хорошо описывает реальную зависимость. Поэтому ниже принимается $n = 1$, хотя случай $n \neq 1$ исследуется совершенно аналогично. Из $n = 1$

$$u^2 = - (2 - \gamma) \gamma^{-1} aN \ln(1 - F^2) - ab(1 - F^2)^{-1} + D$$

постоянная D определяется из условия $u(F_0) = 0$, следующего из (19).

В результате получается

$$\left(\frac{dF}{d\varphi} \right)^2 = \Phi(F)$$

$$\Phi(F) = (1 - F^2)^2 \left\{ \frac{2 - \gamma}{\gamma} aN \ln(1 - F_0^2) + ab(1 - F_0^2)^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 - \gamma}{\gamma} aN \ln(1 - F^2) - ab(1 - F^2)^{-1} \right\} \quad (21)$$

$$\Phi(F_0) = 0$$

Для периодичности функции $F(\varphi)$ и изменения в пределах $F_0 \leq F \leq F_*$, ($F_* < 1$) необходимо, чтобы кривая $\Phi(F)$ имела вид, схематически показанный на фиг. 1 (сплошной участок), т. е. должна удовлетворять следующим условиям:

$$\Phi(F_0) = 0, \Phi(F_*) = 0, \Phi(F) > 0 \quad (22)$$

$$(F_0 < F < F_*)$$

Первое из условий (22) выполняется автоматически, для выполнения третьего условия (22) необходимо, чтобы $\Phi'(F_0) > 0$. Вычисление производной дает

$$\Phi'(F) = 2F(1-F^2) \left\{ \frac{2-\gamma}{\gamma} aN + ab \left(\frac{1}{1-F^2} - \frac{2}{1-F_0^2} \right) + 2 \frac{2-\gamma}{\gamma} aN \ln \frac{1-F^2}{1-F_0^2} \right\}$$

$$\Phi'(F_0) = 2F_0(1-F_0^2) \left[\frac{2-\gamma}{\gamma} aN - ab(1-F_0^2)^{-1} \right]$$

Отсюда видно, что при выполнении условий

$$(2-\gamma)\gamma^{-1}aN > ab, \quad 0 < F_0 < F_{0*}, \quad F_{0*}^2 = 1 - \gamma/(2-\gamma)ab/aN \quad (23)$$

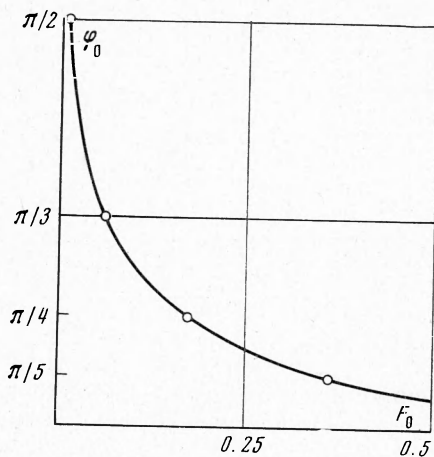
условие $\Phi'(F_0) > 0$ выполняется. Если же $\gamma^{-1}(2-\gamma)aN < ab$, то не существует значения $F_0 < 1$, при котором $\Phi'(F_0) > 0$, поэтому физического смысла решение при $(2-\gamma)\gamma^{-1}aN < ab$ не имеет. Второй корень F_* уравнения $\Phi(F) = 0$ на первый взгляд кажется совпадающим с точкой $F = 1$, так как $\Phi(1) = 0$. Однако исследование производной показывает, что

$$\lim_{F \rightarrow 1} \Phi'(F) = ab > 0$$

так что при $F \rightarrow 1$ $\Phi(F) \rightarrow 0$ со стороны отрицательных значений, как показано пунктирной линией на фиг. 1. Поэтому при выполнении условий (23) обязательно существует корень F_* , причем $F_* = F_*(F_0) < 1$. Это означает, что при условиях (23) существуют периодические решения, изменяющиеся от F_0 при $\varphi = 0$ до $F_*(F_0)$. Значение F_* достигается при некотором значении аргумента $\varphi = \varphi_0$, представляющем собой половину периода, которое должно равняться π/i , т. е.

$$\int_{F_0}^{F_*(F_0)} \frac{dF}{\sqrt{\Phi(F)}} = \frac{\pi}{i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

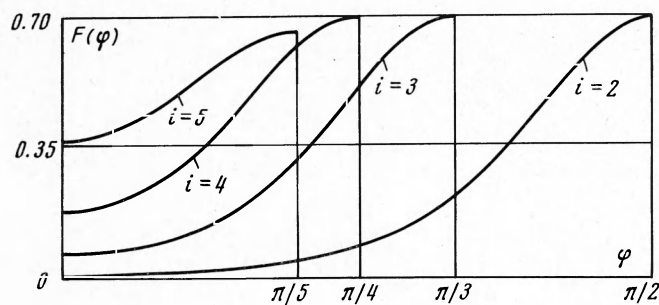
Это условие может служить для выбора произвольной постоянной F_0 . Практически этим соотношением пользоваться неудобно и определение F_0 лучше производить, интегрируя численно уравнение (15) с начальными условиями (19) и варьируя F_0 в пределах (23) до совпадения аргумента φ_0 с одним из значений π/i .



Фиг. 2

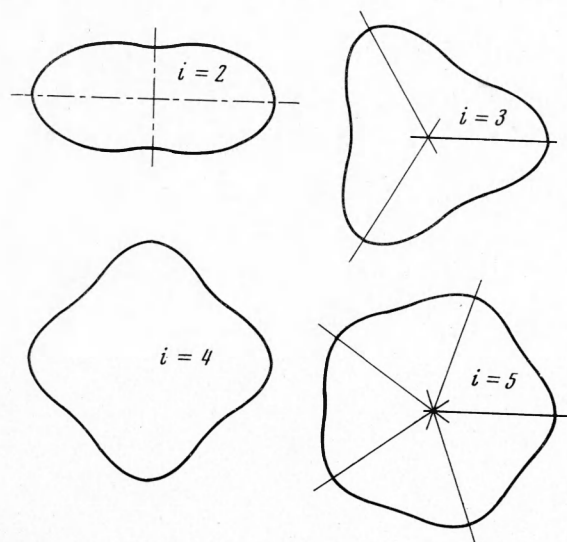
Для иллюстрации сказанного было проведено численное интегрирование уравнения (15) при значении $(2 - \gamma) \gamma^{-1} aN = 50$, удовлетворяющем первому из условий (23). Полученная зависимость полупериода φ_0 от начального значения F_0 представлена на фиг. 2. Точки пересечения кривой $\varphi_0(F_0)$ с прямыми $\varphi_0 = \pi / i$ определяют значения F_{0i} , обеспечивающие необходимую периодичность функции $F(\varphi)$. Эти точки на графике отмечены кружочками.

Функции $F(\varphi)$, отвечающие соответствующим значениям F_{0i} , представлены на фиг. 3. Кривые приведены на полупериоде $0 \leq \varphi \leq \pi / i$, так как



Фиг. 3

вторая половина кривой симметрична относительно точки $\varphi = \pi / i$. Согласно соотношению (18), которое в рассматриваемом случае ($m = -3/2$, $n = 1$) приводится к виду $\xi_*^5 F(\varphi) = \text{const}$, функция $F(\varphi)$ определяет



Фиг. 4

форму поперечного сечения ступка. Полученные для приведенных на фиг. 3 функций $F(\varphi)$ картины представлены на фиг. 4. Отсюда видно, что чем больше количество лепестков, тем ближе форма поперечного сечения к окружности.

В заключение автор благодарит В. И. Хоничева за помощь в численных расчетах.

Поступила 4 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. Распространение ударной волны в канале при взаимодействии сжатого в ней газа с неоднородным магнитным полем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. В а т а ж и н А. Б. Торможение проводящих ступков, движущихся по каналам в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
3. Д ь я ч е н к о В. Ф., И м ш е н н и к В. С. Плазменный фокус и механизм нейтронного излучения в Z-пинче. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 5.
4. К е р к и с А. Ю., Т р ы н к и н а Н. А. Экспериментальное исследование эффективности индукционного взаимодействия ступка проводящего газа с электрическим контуром, в который включена сторонняя ЭДС (электродвижущая сила). ПМТФ, 1971, № 2.
5. Д е г т я р е в Л. М., З а к л я з ь м и н с к и й Л. А., К у р д ю м о в С. П., С а м а р с к и й А. А., С о к о л о в В. С., Ф а в о р с к и й А. П. Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, № 3.
6. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
7. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.