УДК 531.391.539.371

ДЕЙСТВИЕ ВЗРЫВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛАСТИНУ

Р. Г. Якупов

(*Уфа*)

Действие подвижной нагрузки на бесконечную упругую пластину, свободно покрывающую поверхность идеальной сжимаемой жидкости, рассматривалось в работах [1—3]. Обзор работ по динамике пластины под действием движущейся нагрузки приведен в [4].

Рассматривается движение прямоугольной пластины конечных размеров под действием ударной пластической плоской взрывной волны сжатия, падающей под углом. Пластина является гранью прямоугольной полости, наполненной идеальной сжимаемой жидкостью. Полость находится в плотной среде (грунте) и ограничена жесткими неподвижными стенками. В той же среде на расстоянии $\eta_0 a$ под углом α к поверхности пластины взрывается плоский слой заряда ВВ толщиной $2a$ (фиг. 1), где $\eta_0 = (z\cos\alpha)/a$ — безразмерное расстояние. Заряд ВВ при взрыве мгновенно без изменения объема превращается в газ высокого давления, в результате чего к поверхности среды AB прикладывается начальное давление p_2, которое вызывает образование в среде ударной пластической волны сжатия. Скорость фронта и параметры движения среды известны (определены расчетным или экспериментальным путем [5, 6]).

Предполагается, что диаграмма сжатия среды описывается степенным законом и имеет асимптоту, соответствующую давлению, стремящемуся к бесконечности. Тогда давление на фронте волны определяется по формуле [5]

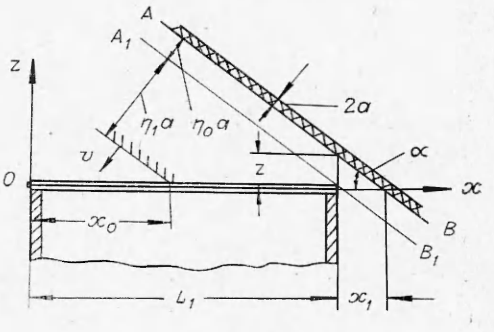
$$p_1 = C_1(\eta_0 + \eta_1)^\lambda,$$

где $C_1 = p_2\beta A_0^{\gamma+2}$; $\lambda = \omega(m+2)$; η_1 — безразмерное расстояние, отсчитываемое в направлении нормали к фронту; величины β, A_0, m и ω зависят от показателя степени сжатия среды n, показателя изэнтропы для продуктов детонации и находятся по известным соотношениям [5].

Используя результаты работ [7, 8], запишем выражение давления ударной пластической волны на поверхность в момент отражения в виде

$$p = p_1(1+q)\cos\alpha,$$

где величина $(1+q)$ — коэффициент отражения при нормальном падении; q — определяется из соотношения $(1+q^{-1})^n = 1+q$. Так как $n \geqslant 1$, то значение $q \geqslant 1$ и коэффициент отражения для ударной пластической волны всегда больше двух. Для песчаных грунтов нарушенной структуры значения $n = 2{,}5—3{,}0$ и соответственно величина $1+q = 2{,}84—3{,}0$, что хорошо согласуется с результатами эксперимента [9], проведенного в песчаных грунтах. На коэффициент отражения влияет скорость преграды в



Фиг. 1

момент отражения. Однако вычисления показывают, что даже в случае равенства скоростей преграды и частиц в падающей волне величина q изменяется в пределах не более 10% [8], так что влиянием скорости преграды пренебрегаем.

По мере распространения взрывной волны скорость фронта и напряжения на фронте убывают. Поэтому на пластину действует распределенная нагрузка, фронт которой движется также с монотонно убывающей скоростью. Закон движения фронта нагрузки находится из соотношений [5] (см. фиг. 1)

$$x_0 = L_1 - (\eta_1 a/\sin\alpha), \quad t_1 = (\rho_0/p_2)^{1/2}\,[a/A_0(1-\omega)]\,\eta_1^{1-\omega}, \tag{1}$$

где ρ_0 — плотность среды; L_1 — длина пластины в направлении оси x. Время t_1 отсчитывается с момента движения фронта волны от плоскости A_1B_1. Закон изменения давления после отражения принимаем в форме $[1-(t/t_0)]^s$, где $s \geqslant 1$; t — время, отсчитываемое с момента отражения; t_0 — время действия волны на пластину. Действие пластической волны на пластину прекращается в момент остановки границы каверны AB, закон движения которой имеет вид

$$\bar{x} = 1 + \varepsilon_* A_0^{-1/\omega} + \left[\beta A_0^{\gamma_1}/(1+m\omega)\right](\eta_0+\eta_1)^{1+m\omega}, \quad \eta = \eta(t),$$

где $\bar{x}$ — безразмерное смещение границы каверны; ε_* — предельное значение деформации среды.

Таким образом, функция нормального давления на пластину в точке с фиксированной координатой записывается в виде

$$p = \begin{cases} p_0\,[1+(\eta_1/\eta_0)]^{\lambda}\,[1-(t/t_0)]^s\,(1+q)\cos\alpha, & \eta_1 > 0, \\ 0, \quad \eta_1 = 0, \end{cases}$$

где p_0 — давление на фронте волны в момент $\eta_1 = 0$.

В системе координат xyz (см. фиг. 1) уравнение, описывающее движение пластины, принимаем в виде

$$\rho_1 h(\partial^2 w/\partial t^2) + D\nabla^2\nabla^2 w + p_* = -p(x,\,t) \text{ при } t_1 > 0, \tag{2}$$

где w, h — смещение и толщина пластины; $\nabla^2 = \partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2$; D — цилиндрическая жесткость; ρ_1, ν — плотность и коэффициент Пуассона материала; p_* — давление жидкости; $p(x,\,t)$ — функция нагрузки. Влиянием касательных сил на движение пластины пренебрегаем и считаем, что перед фронтом падающей волны возмущения среды отсутствуют.

Движение пластины должно удовлетворять условиям закрепления и начальным условиям

$$w = \partial w/\partial t = 0, \; t_1 = 0. \tag{3}$$

Когда пластина соприкасается с жидкостью, то в результате движения пластины в жидкости возникает волновое движение — волна излучения. Пусть φ — потенциал скорости в жидкости. Смещения w и φ должны удовлетворить граничным условиям

$$\partial w/\partial t = \partial\varphi/\partial z, \; z = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant L_1. \tag{4}$$

Используя гипотезу плоского отражения [10] и условие (4), запишем выражение давления жидкости

$$p_* = \rho_2 c(\partial w/\partial t), \tag{5}$$

где ρ_2 — плотность жидкости; c — скорость звука.

Определим движение пластины под действием единичной ступенчатой нагрузки, фронт которой движется по закону (1)

$$p(x) = H(x - x_0), \quad H(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant x_0, \\ 0 & \text{при} \quad x < x_0, \end{cases}$$

$$x_0 = L_1 - (\eta_1 a/\sin\ \alpha).$$

Выражение для прогиба пластины принимаем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y). \tag{6}$$

Функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ подбираем из числа фундаментальных функций, исходя из условий закрепления пластины по краям. Если края свободно оперты, то

$$X_m(x) = \sin\ \beta_m x,\ Y_n(y) = \sin\gamma_n y,\ (\beta_m = \pi m/L_1,\ \gamma_n = \pi n/L_2),$$

где L_2 — размер пластины в направлении оси y. Для закрепленных краев при $x = 0,\ L_1$ имеем

$$X_m(x) = \sin\lambda_m x - \operatorname{sh}\lambda_m x - g_m(\cos\lambda_m x - \operatorname{ch}\lambda_m x), \tag{7}$$

где

$$g_m = (\sin\mu_m - \operatorname{sh}\mu_m)/(\cos\mu_m - \operatorname{ch}\mu_m),\quad \mu_m = \lambda_m L_1 = (2m + 1)\pi/2$$

— характеристическое число функции (7) является корнем уравнения $\operatorname{ch}\mu_m \cos\mu_m - 1 = 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогичное выражение берется и для $Y_n(y)$, если края закреплены при $y = 0,\ L_2$.

Подставляем выражения (5), (6) в уравнение (2) и будем решать его методом Бубнова—Галеркина, затем умножая его на $X_k(x)$, $Y_j(y)$ и интегрируя в пределах от 0 до L_1, от 0 до L_2, приходим к уравнению

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\delta_{km,jn}\left(f''_{mn} + 2\varkappa f'_{mn}\right) + \Omega^2_{km,jn} f_{mn} + \varkappa Q_{kj}/\rho_1 h L_1 L_2\right] = 0,$$

где $\delta_{km,jn}$ — символ Кронекера (1 при $m = k,\ j = n$; 0 при $m \neq k,\ n \neq j;\ m = k,\ n \neq j;\ m \neq k;\ n = j$); $\Omega^2_{mk,jn}$ — квадрат частоты собственных колебаний пластины; $2\varkappa = \rho_2 c/\rho_1 h$; $Q_{kj} = \int\limits_{x_0}^{L_1}\int\limits_{0}^{L_2} X_k(x) Y_j(y)\,dxdy$, штрих обозначает дифференцирование по времени t_1.

Для свободно опертой пластины имеем (при интегрировании k и j заменили на m и n)

$$\Omega^2_{mn} = D\left(\beta^2_m + \gamma^2_n\right)^2/\rho_1 h, \quad Q_{mn} = 2\left[\cos(\pi m x_0/L_1) - (-1)^m\right],$$
$$n = 1, 3, 5, \ldots; \quad \chi = 4.$$

Для защемленной по краям пластины

$$\Omega^2_{mk,jn} = D\left[F_{mk} + 2H_{mk}H_{nj} + F_{nj}\right]/\rho_1 h,$$
$$Q_{kj} = 4\left[2(-1)^{k+1} + \cos\lambda_k x_0 + \operatorname{ch}\lambda_k x_0 + g_m(\sin\lambda_k x_0 - \operatorname{sh}\lambda_k x_0)\right],$$
$$j = 1, 3, 5, \ldots; \quad \chi = 1;$$

(8)

$$F_{mk}=\begin{cases}\lambda_m^4 & \text{при } m=k,\\ 0 & \text{при } m\neq k;\end{cases}\qquad H_{mk}=\begin{cases}\lambda_m^2\left[1-(2/\mu_m)\right] & \text{при } k=m,\\ \dfrac{2\lambda_m^2(\lambda_k-\lambda_m)}{\lambda_m\mu_m+\lambda_k\mu_k} & \text{при } k\neq m,\ k+m=\text{нечетно},\\ \dfrac{4\lambda_m^2\lambda_k^2}{(\lambda_k^2+\lambda_m^2)(\mu_m+\mu_k)} & \text{при } k\neq m,\ k+m=\text{четно}.\end{cases}$$

Выражения для H_{nj} и F_{nj} получаются из (8) заменой соответствующих индексов.

Используя соотношения (1), выражение $Q_{kj}(x_0)$ представим в виде $Q_{kj}(t_1)$. Тогда для свободно опертой пластины имеем уравнение

$$f''_{mn}+2\varkappa f'_{mn}+\Omega_{mn}^2 f_{mn}=\left[8(-1)^{m+1}/\pi^2 mn\rho_1 h\right]\left(\cos\Delta t_1^{s_1}-1\right), \tag{9}$$

где $s_1=1/(1-\omega)$; $\Delta=\left[(\rho_0/p_2)^{1/2}a^{\omega}(L_1\sin\alpha)^{1-\omega}/A_0(1-\omega)\right]^{-s_1}$.

Приводим решение (9), удовлетворяющее начальным условиям (3), к виду

$$f_{mn}=\frac{8(-1)^{m+1}}{\pi^2 mn\rho_1 h(r_2-r_1)}\int_0^{t_1}\left(e^{r_2(t_1-\theta)}-e^{r_1(t_1-\theta)}\right)\left(\cos\Delta\theta^{s_1}-1\right)d\theta, \tag{10}$$

где $r_{1,2}$ — корни характеристического уравнения.

В случае единичной ступенчатой нагрузки, движущейся с постоянной скоростью v, так что $x_0=vt$, и для действительных $r_{1,2}$ решение (9) имеет вид

$$f_{mn}=-\frac{8}{\pi^2 mn\rho_1 h}\left\{\frac{1}{r_2-r_1}\left[\frac{2\varkappa\Delta_1^2}{\Delta_2}\left(e^{r_1 t}-e^{r_2 t}\right)+\right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}-\frac{(-1)^m}{\Omega_{mn}^2}\right)\left(r_1e^{r_2 t}-r_2e^{r_1 t}\right)\right]+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\cos\Delta_1 t+\frac{2\varkappa\Delta_1}{\Delta_3}\sin\Delta_1 t-\frac{(-1)^m}{\Omega_{mn}^2}\right\},$$

где $\Delta_1=m\pi v/L_1$; $\Delta_2=\Omega_{mn}^2-\Delta_1$; $\Delta_3=\Delta_2^2+(2\varkappa\Delta_1)^2$.

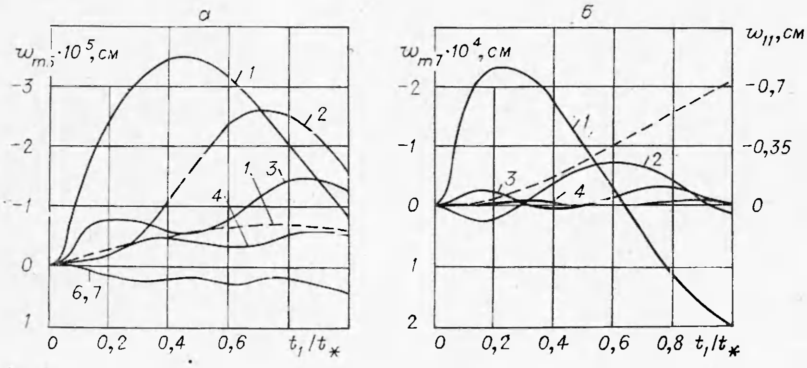
Полагая в (9) $\varkappa=0$ и $x_0=vt$, находим решение без учета влияния жидкости

$$f_{mn}=-\frac{8}{\pi^2 mn\rho_1 h}\left[\left(\frac{(-1)^m}{\Omega_{mn}^2}-\frac{1}{\Delta_2}\right)\cos\Omega_{mn}t+\frac{1}{\Delta_2}\cos\Delta_1 t-\frac{(-1)^m}{\Omega_{mn}^2}\right]. \tag{12}$$

Значения скорости фронта волны, удовлетворяющие условию $v_k=\Omega_{mn}L_1/\pi m$, назовем критическими. Как видно из (11), (12), при критических значениях скорости движения фронта нагрузки $v=v_k$ прогибы пластины имеют повышенные значения и зависят от величины гидродинамического демпфирования. Из (12) следует, что при отсутствии демпфирующего влияния жидкости ($\varkappa=0$) и $v=v_k$ прогибы пластины стремятся к бесконечности (подобно явлению резонанса в колебательных системах).

Решения (10) — (12) можно рассматривать как функцию влияния и определить w под действием нагрузки произвольной формы с помощью интеграла

$$f_{mn}^{*}=p(x_0)f_{mn}(x_0)+\int_{x_0}^{L_1}f_{mn}(x_0-x)\left[\partial p(x)/\partial x\right]dx,$$



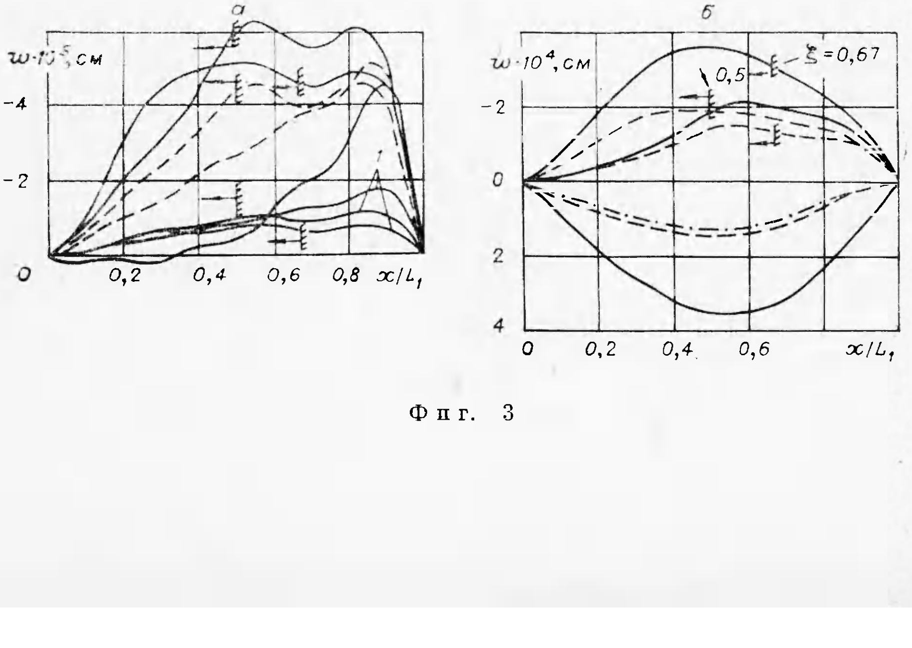
Ф и г. 2

где $p(x_0)$ — значение нагрузки на фронте; $p(x)$ — функция, характеризующая изменение нагрузки за фронтом.

Численный пример. Пластина имеет размеры $L_1 = 200$ см, $L_2 = 100$ см, $h = 1$ см, $E = 2\cdot 10^6$ кг/см^2, $\nu = 0{,}3$, $\rho_1 = 8\cdot 10^{-6}$ кг$\cdot$с^2/см^4. В полости содержится вода, $\rho_2 = 1{,}02\cdot 10^{-6}$ кг$\cdot$с^2/см^4, $c = 1{,}5\cdot 10^5$ см/с. Прогибы w определены для единичной ступенчатой нагрузки, движущейся с постоянной скоростью $v = 6\cdot 10^4$; $8{,}76\cdot 10^4$ и $9\cdot 10^4$ см/с. Результаты вычислений приведены на фиг. 2, 3.

На фиг. 2 показаны изменения прогиба w_{mn} в заданном сечении пластины $x/L_1 = 0{,}8$ в зависимости от безразмерного времени. Здесь t_* — время продвижения фронта нагрузки от $x = L_1$ до $x = 0$. Штриховая и сплошные линии на фиг. 2, *а* соответствуют значению $n = 3$ и 5, сплошные линии на фиг. 2, *б*—значению $n=7$, а штриховая кривая показывает изменение прогиба w_{11} в сечении пластины $x/L_1=0{,}5$ без учета влияния жидкости. Масштаб для этой кривой показан справа. При определении w без учета влияния жидкости с большой точностью можно ограничиться одним членом ряда $m = 1$, $n = 1$ (вклад остальных членов ряда не более 2%). Кривые *1—4*, *6*, *7* на фиг. 2 соответствуют числам $m = 1—4$, 6, 7.

Кривые на фиг. 3 соответствуют прогибам w по длине пластины для нескольких фиксированных положений фронта нагрузки $\xi = x_0/L_1 = 0{,}67$; 0,5 и 0. Положение фронта показано штрихом. При расчете предполагалось, что в направлении оси y на длине L_2 образуется заданное число n



Ф и г. 3

полуволн, суммирование ряда производилось по m от $m = 1$ до $m = 8$. Кривые *1* на фиг. *3*, *а* соответствуют значению $n=3$, остальные — значению $n = 5$, а на фиг. 3, *б* принято значение $n = 7$. Сплошные линии относятся к скорости $v = 6 \cdot 10^4$ см/с, штриховые и штрихпунктирные — к скорости $v = 8{,}76 \cdot 10^4$ и $9 \cdot 10^4$ см/с.

Как видно из фиг. 2, *б* (штриховая линия), при отсутствии в полости жидкости прогиб пластины в течение времени t_* монотонно возрастает и достигает величины 0,7 h.

Если же пластина соприкасается с жидкостью, движение пластины близко к апериодическому и величина прогиба намного меньше, чем прогибы без учета влияния жидкости, что обусловлено большим демпфированием жидкости. Изменение w_{mn} по времени для различных мод m и n неодинаково. Значительно быстрее развиваются прогибы при $m = 1$, $n = 5$; 7. Поэтому здесь можно ожидать появления прогибов с одной полуволной в направлении оси x и несколькими полуволнами в направлении оси y $(m = 1,\ n > 3)$.

Из сравнения кривых *1* на фиг. 2, *а* следует, что прогиб w_{13} значительно меньше величины w_{15}. Прогиб пластины с числом полуволн $m = 1$, $n = 1$; 3 должен сопровождаться большими изменениями объема полости. Вследствие слабой сжимаемости жидкости эти прогибы малы. С увеличением числа n жидкость может перетекать из одной области в другую и величина w_{mn} несколько возрастает.

Анализ приведенных на фиг. 2, 3 данных показывает, что величина и характер изменения прогиба пластины зависят от формы волнообразования, положения фронта нагрузки и ее скорости. С увеличением скорости v прогибы уменьшаются.

Для $t_0 > t_*$, полагая $Q_{mn} = 4$, $m = 1, 3, 5, \ldots$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, $Q_{kj} = 16$, $k = 1, 3, 5, \ldots$, $j = 1, 3, 5, \ldots$ и используя полученные значения w_{mn}, w'_{mn} как начальные, можно определить дальнейшее изменение прогиба.

Поступила 4 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматуллин Х. А., Саатов Я. У., Сабодаш П. Ф., Филиппов И. Г.** Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред. Ташкент, «Фан», 1969.
2. **Хейсин Д. Е.** Нестационарная задача о колебаниях бесконечной упругой пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости.— «Изв. АН СССР. ОТН», 1962, № 1.
3. **Хейсин Д. Е.** Перемещение нагрузки по упругой пластине, плавающей на поверхности идеальной жидкости.— «Изв. АН СССР. ОТН», 1963, № 1.
4. **Якушев Н. З.** Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, изд. Казанск. ун-та, 1972.
5. **Якупов Р. Г.** Плоская взрывная волна в грунтах.— ПМТФ, 1974, № 3.
6. **Захаров С. Д., Ляхов Г. М., Мизякин С. Д.** Определение динамической сжимаемости грунта по параметрам плоских взрывных волн.— ПМТФ, 1972, № 1.
7. **Ковшов А. Н., Скобеев А. М.** Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973. № 1.
8. **Зволинский Н. В., Рыков Г. В.** Отражение пластической волны от преграды.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
9. **Ляхов Г. М., Дубова Р. И.** Волны в грунте при наземном взрыве и их взаимодействие с преградами.— В кн.: Труды V сессии Уч. совета по народнохоз. использ. взрыва. Фрунзе, «Илим», 1965.
10. **Григолюк Э. И., Куршин Л. М., Присекин В. Л.** К уточнению гипотезы плоского отражения.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 1.