ПМТФ, № 6, 1984

УДК 533.695.5

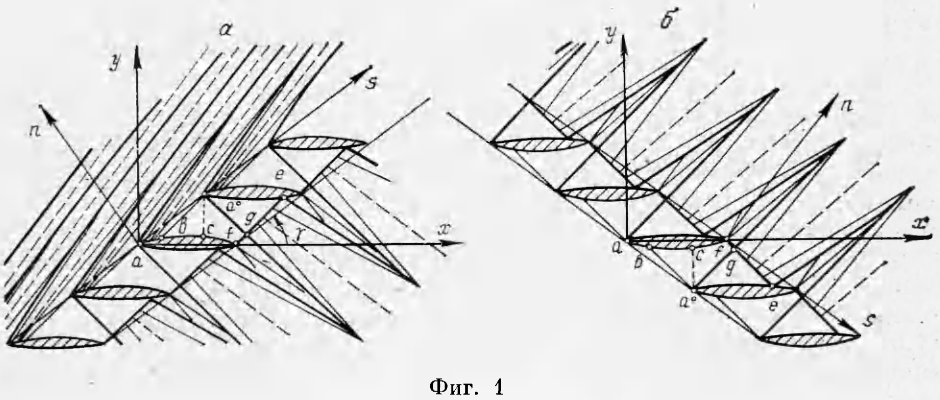
К СТАЦИОНАРНОМУ ОБТЕКАНИЮ ПЛОСКОЙ РЕШЕТКИ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

А. Н. Крайко, В. А. Широносов, Е. Я. Широносова

(Москва)

Рассматривается стационарное безотрывное обтекание плоской решетки идеальным газом. Главное внимание уделяется режимам запирания со сверхзвуковой скоростью во всем течении и дозвуковой нормальной к фронту решетки ее компонентой. На этих режимах проявляется «направляющее воздействие» решетки (направление скорости и число Маха набегающего потока оказываются связанными), являющееся следствием независимости течения перед решеткой от условий за ней [1—5]. Распространенный способ их расчета [3, 4, 6] основан на методе характеристик с установлением течения вне решетки по временноподобной координате. Хотя при этом интегральные законы сохранения позволяют найти и параметры на бесконечности, численное построение сколь угодно дальних полей с периодическими последовательностями затухающих скачков практически невозможно. Здесь оправдано приближение нелинейной акустики (ПНА) [7, 8], весьма эффективное в подобных задачах [8—12]. Сочетание ПНА, интегральных законов сохранения и установления при счете по [13, 14] с выделением скачков реализовано в [5] для построения решения на входном участке решетки и везде перед ней. Ниже метод [5] распространен на весь поток и еще более упрощен. Поток на входном участке решетки, как и в [3], находится в приближении простой волны, в остальной ее части и в конечной полосе за ней — с помощью «сквозного» варианта схемы [13, 14], а в «дальнем поле» — в ПНА. Предложен и более простой вариант. В нем вне решетки применяется ПНА, а внутри — линейная теория. Приводятся примеры расчетов. Для всех режимов обтекания сформулированы законы подобия.

1. Схема обтекания решетки на сверхзвуковых запертых режимах изображена на фиг. 1, *а*, где xy и sn — прямоугольные координаты, жирные линии — ударные волны, а тонкие — характеристики (штриховые — нейтральные характеристики, уходящие в бесконечность). Газ течет слева направо, перед и за решеткой нормальная к ее фронту компонента скорости дозвуковая. Поэтому при $n \to -\infty$ следует ставить одно граничное условие, например, задавать давление p или, как делается ниже, один из инвариантов Римана. В зависимости от его величины и значений параметров набегающего потока влияние этого условия ограничено слева скачком или замыкающей c^+-характеристикой fe пучка волн разрежения, исходящих из f. Если ba^0 — c^+-характеристика, приходящая на переднюю



Фиг. 1

кромку верхнего профиля (речь идет об одном межлопаточном канале), то на течение перед решеткой влияет лишь отрезок ab верхней образующей нижнего профиля. Решение задачи начнем с рассмотрения течения в полуплоскости $n > 0$ и в треугольнике aba^0, причем первоначальный анализ потока при $n > 0$ проведем, приняв, что параметры при $n = 0$ заданы. Затем, выяснив структуру течения при $n > 0$, дадим способ его построения и обоснуем возможность использования решения типа простой волны в примыкающей к aa^0 части межлопаточного канала $afga^0a$. На рассматриваемых режимах ударные волны, уходящие вверх по потоку, обычно [5] слабы уже на передних кромках профилей. Поэтому волновые структуры перед передним фронтом можно описывать в рамках ПНА. Пусть $\delta\varphi = \delta\varphi(n)$ — приращение φ на скачке на расстоянии n от переднего фронта, а σ — удельная энтропия. Тогда $\delta\sigma = O(\varepsilon^3)$, где $\varepsilon = \delta p$, суммарное изменение σ в бесконечной последовательности затухающих скачков, как показано в [11], есть $O(\varepsilon^2)$ и перед решеткой

$$\sigma = \sigma_- + O(\varepsilon^2), \quad 2i + V^2 = 2i_- + V_-^2 \equiv 2I_-. \tag{1.1}$$

Здесь i — удельная энтальпия; $V = |\mathbf{V}|$; $\mathbf{V}$ — вектор скорости; минус приписан параметрам набегающего потока. Второе равенство справедливо всюду.

В областях непрерывности потока на характеристиках

$$dn/ds = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu), \quad dy/dx = \operatorname{tg}(\beta \pm \mu), \quad d\theta = d\beta = \tag{1.2}$$
$$= \mp [\sqrt{M^2 - 1}/(\rho V^2)]dp,$$

где θ и $\beta = \theta + \gamma$ — углы, образуемые $\mathbf{V}$ с осями s и x; γ — угол установки решетки (фиг. 1, a, $0 < \gamma \leqslant \pi/2$); $M = V/a$ и $\mu = \arcsin(1/M)$ — число и угол Маха; a — скорость звука; ρ — плотность; верхний (нижний) знак отвечает c^+ (c^-)-характеристике. В силу (1.1) и уравнений состояния $i = i(p, \sigma)$, $\rho = \rho(p, \sigma)$ множитель при dp в (1.2) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ включительно — известная функция только p, и третье уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$dJ^{\pm} \equiv d[\theta \pm \Phi(p)] = O(\varepsilon^2)\, dp, \quad \Phi(p) = \int\limits_{p_*}^{p} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho V^2}\, dp. \tag{1.3}$$

Здесь $J^{\pm}$ — инварианты Римана; звездочка приписывается критическим параметрам, отвечающим $M = 1$ при $\sigma = \sigma_-$. Если характеристика пересекает скачок противоположного семейства, то, как и для σ, изменение отвечающего ей инварианта есть $O(\varepsilon^3)$, а в данной задаче суммарное изменение J^- есть $O(\varepsilon^2)$. Отсюда с учетом (1.3) найдем, что если $(1 - p/p_-)$ мало́ (далее это предполагается), то при $n \geqslant 0$

$$\theta - \theta_- - \Phi(p) + \Phi(p_-) = O(\varepsilon^2). \tag{1.4}$$

Аналогично, если $\varepsilon_0 = \delta p_0 = \delta p(0)$ — разность p на скачке в передней точке профиля, а s_0 — координата s точки линии $y = x \operatorname{tg}\gamma$ или $n = 0$, из которой выходит данная c^+-характеристика, то на ней

$$\theta + \Phi(p) = J^+(s_0) + O(\varepsilon_0^3). \tag{1.5}$$

В (1.5) остаточный член оценен в предположении, что вдоль каждой c^+-характеристики p меняется на $O(\varepsilon_0)$. В действительности указанное изменение есть $O(\varepsilon_0^2)$. Это ведет к замене $O(\varepsilon_0^3)$ в (1.5) на $O(\varepsilon_0^4)$, не меняющей, однако, последующих оценок.

В силу периодичности по s с периодом d, где d — шаг решетки, рассмотрим одну полосу, опирающуюся на отрезок оси s длины d и ограниченную линиями, совмещаемыми сдвигом вдоль s, например, соседними скачками или нейтральными характеристиками. Согласно (1.1), (1.4) и (1.5), течение в ней с точностью до ε_0 включительно — простая волна с прямолинейными c^+-характеристиками, каждая из которых (кроме нейтральной) приходит на один из скачков. Интенсивность скачка дается разностью p или J^+, т. е. δJ^+. Правая часть (1.4), связанная с приращениями σ и J^- при пересечении линий тока и c^--характеристик бесконечной последовательностью затухающих скачков, характеризует изменение левой части того же равенства во всем потоке, например, от $n = 0$ до $n \gg \gg d$. Для близких точек правые части (1.4), будучи $O(\varepsilon^2)$, различаются на $O(\varepsilon^3)$. С учетом сказанного из (1.3) — (1.5) найдем.

$$(1.6)\quad \delta p = [\rho V^2/(2\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1})]_- \delta J^+ + O(\varepsilon^2), \qquad \delta J^+ = J^+(s^+) - J^+(s^-).$$

Здесь $s^\pm$ — значения s_0 для c^+-характеристик, пришедших на скачок с разных сторон.

Пусть при $n = 0$ известно $\chi(s) = \mathrm{ctg}(\theta + \mu)$. Так как рассматриваемое течение — простая волна, то все параметры — функции χ, в частности $J^+ = J^+(\chi)$, где $\chi(s)$ — периодическая функция периода d, в общем случае разрывная при $s = kd$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Разрывы обусловлены скачками на передних кромках профилей. При известной $\chi(s)$ построение скачка сводится к решению уравнений [8]

$$(1.7)\quad \begin{gathered} S = s^- + n\chi(s^-) + O(\varepsilon_0^2), \quad S = s^+ + n\chi(s^+) + O(\varepsilon_0^2), \\ dS/dn = [\chi(s^-) + \chi(s^+)]/2 + O(\varepsilon^2) \end{gathered}$$

с равномерными по n оценками погрешностей ($s = S(n)$ — уравнение скачка). При $S(0) = 0$ уравнения (1.7) определяют S и $s^\pm$ как функции n. Затем по $s^\pm$ с помощью (1.6) можно найти интенсивность скачка. После того (см. ниже) как по распределениям на aa^0 определены параметры набегающего потока, течение между соседними скачками находится из (1.1), (1.4), (1.5) и уравнения почти прямолинейных c^+-характеристик

$$(1.8)\quad s = s_0 + n\chi(s_0) + O(\varepsilon_0^2).$$

В общем случае система (1.7) решается численно, причем вместо первых двух уравнений (1.7) удобно использовать результат их дифференцирования по n и исключения dS/dn. Результирующие уравнения имеют вид

$$(1.9)\quad ds^\pm/dn = (\chi^\mp - \chi^\pm)[2(1 + n\chi_s^\pm)]^{-1} + O(\varepsilon^2),$$

где $\chi^\pm = \chi(s^\pm)$, а $\chi_s = d\chi(s_0)/ds_0$. В рассматриваемой задаче $\chi_s > 0$.

При линейной зависимости χ от s_0 система (1.9) интегрируется. Действительно, вычтя второе (с нижними индексами) уравнение (1.9) из первого и умножив результат на $\chi_s = -\delta\chi_0/d$, получим равенство

$$d(\delta\chi)/d\nu = (1 + \nu\delta\chi_0)^{-1}\delta\chi_0 + O(\varepsilon^3) \quad (\nu = n/d).$$

Проинтегрировав его от $\nu = 0$, где $\delta\chi = \delta\chi_0$, и перейдя от $\delta\chi$ к δp, найдем, что в данном случае

$$(1.10)\quad \frac{\delta p}{\delta p_0} = \left[1 + \frac{\nu\alpha\delta p_0 \,\mathrm{tg}\,\mu}{2\rho a^2 \sin^2(\theta + \mu)}\right]^{-1} + O(\varepsilon_0^2) \quad (\alpha = \rho^3 a^4 \omega_{pp}),$$

где $\omega = 1/\rho$, $\varphi_{pp} = (\partial^2\varphi/\partial p^2)_\sigma$, величины без индексов (кроме δp) можно вычислять по параметрам при $n \to \infty$. Для совершенного газа $\alpha = 1 + \varkappa$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты, и (1.10) сводится к известным формулам [5, 10, 11]. Для любого нелинейного распределения $\chi(s_0)$ с удалением от решетки распределение χ по s становится линейным. Поэтому если ν — расстояние от соответствующего сечения, а δp_0 — интенсивность скачка в нем, то (1.10) дает дальнее поле при любых распределениях на aa^0. Согласно расчетам [5], в типичных ситуациях линейная зависимость χ от s устанавливается через три-четыре полосы по n.

Условие сохранения J^+ на c^+-характеристиках, описывающее вместе с (1.1), (1.4) и (1.8) течение между скачками, эквивалентно уравнению

$$\partial J^+/\partial n + \chi \partial J^+/\partial s = 0.$$

Так как $J^+ = J^+(\chi)$ с $J^+_\chi = dJ^+/d\chi = (\chi_J)^{-1} \neq 0$, то, поделив его на J^+_χ, получим

$$\partial\chi/\partial n + \chi\partial\chi/\partial s = 0. \tag{1.11}$$

Если Γ — замкнутый контур плоскости sn, то (1.11) и последнее равенство (1.7), определяющее направление скачка, следуют из «интегрального закона сохранения»

$$\oint\limits_\Gamma \chi ds - \frac{\chi^2}{2} dn = 0. \tag{1.12}$$

Для (1.12) справедливо «правило площадей» [7, 8], позволяющее строить разрывные решения без численного интегрирования (1.7) и (1.9).

При любом способе построения решения перед решеткой параметры с индексом минус, отвечающие равномерному набегающему потоку (теоретически при $n \to \infty$), как и в [3—5], находятся по распределениям при $n = 0$ из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных для замкнутого контура, образованного соседними скачками и отрезками оси s длины $\Delta(s/d) \equiv \Delta\zeta = 1$ при $n = 0$ и $n \to \infty$. При $n = 0$ параметры потока, как и всюду, удовлетворяют условию $2i_0 + V_0^2 = 2I_0$ с константой I_0 и с $\varphi_0 = \varphi_0(\zeta) \equiv \varphi(\zeta, 0)$. С учетом этого перечисленные законы принимают вид

$$\mathbf{R}_- = \int\limits_0^1 \mathbf{R}_0(\zeta)\, d\zeta, \quad 2i_- + V_-^2 = 2I_0, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор с компонентами $\rho V \sin\theta$, $\rho V^2 \sin 2\theta$ и $p + \rho V^2 \sin^2\theta$.

При известных правых частях система (1.13) вместе с уравнением состояния $i = i(p, \rho)$ однозначно определяет сверхзвуковой ($M_- \geqslant 1$) набегающий поток, в частности σ_- и J_-^-. В рассматриваемой задаче скачки образуют малые углы с c^+-характеристиками. Поэтому интенсивность каждого скачка на длине порядка d меняется на $O(\varepsilon^2)$, а получающаяся из-за воздействия всех скачков суммарная неравномерность по σ и J^- на aa^0 есть $O(\varepsilon_0^3)$. Это согласуется с тем, что $\delta\sigma_0$ и δJ_0^- также есть $O(\varepsilon_0^3)$. Итак, с точностью до ε_0^2 включительно неравномерные распределения σ и J^- при $n = 0$ можно заменить константами σ_0 и J_0^-, отличающимися от σ_- и J_-^- на $O(\varepsilon_0^2)$. Рост σ характеризует необратимые потери в скачках ($\sigma_0 > \sigma_-$). Меньшая, чем во всей полубесконечной полосе, погрешность решения типа простой волны на входном участке $afga^0a$ межлопаточного канала есть следствие его конечных (порядка d) размеров.

Сказанное оправдывает частичную замену прямой задачи на обратную. В последней вместо σ_- и J_-^- фиксируются σ_0 и J_0^-, задание которых наряду с $I_0 \equiv I_-$ позволяет в приближении простой волны построить течение в $afga^0a$. Именно такой подход принят в [3], где, правда, задавалось не J_0^-, а точка b. По найденным распределениям на aa^0 из (1.13) определяются параметры набегающего потока (при $n \to \infty$), и в рамках ПНА строится возникающая перед решеткой волновая структура. Поскольку набегающий поток характеризуется четырьмя параметрами, допустим, p_-, ρ_-, M_- и θ_- или β_-, а решение зависит только от трех констант I_0, σ_0 и J_0^-, то один из параметров, например θ_-, оказывается функцией трех других. Это и означает, что на режимах запирания решетка оказывает на поток перед ней направляющее воздействие. Для совершенного газа I_0 и σ_0 дают лишь масштабы скорости, давления и плотности и для фиксированного $\varkappa$ и заданной решетки $\theta_- = f(M_-)$. Указанное свойство (см. [1—4]) не связано с упрощениями, вводимыми в способ решения.

Для построения течения в оставшейся части межлопаточного канала использовалось два метода. В основе первого лежит численное решение слоями $x = \mathrm{const}$ по сквозному варианту разностной схемы [13, 14]. Для упрощения численного алгоритма за сечение начальных данных брался отрезок ca^0, а не заранее неизвестные ударные волны или характеристики a^0g и fg. Второй метод опирался на линеаризацию уравнений характеристик (1.2). Линеаризация выполнялась относительно сверхзвукового поступательного потока с параметрами, равными параметрам на ba^0, которым далее приписывается индекс b. После линеаризации все одноименные характеристики имеют одинаковый наклон, а на тех, которые заменяют скачки уплотнения или пучки разрежения, параметры рвутся. Вдоль характеристик (в том числе при пересечении «скачков» — характеристик противоположного семейства) сохраняются линеаризованные инварианты, введенные согласно (1.2) одним из двух способов:

$$(1.14)\quad J^{\pm} = \beta \pm Bp,\quad J^{+} = \beta \pm B^0\pi,\quad B = \sqrt{M_b^2 - 1}\big/(\rho V^2)_b,\quad B^0 = Bp_b.$$

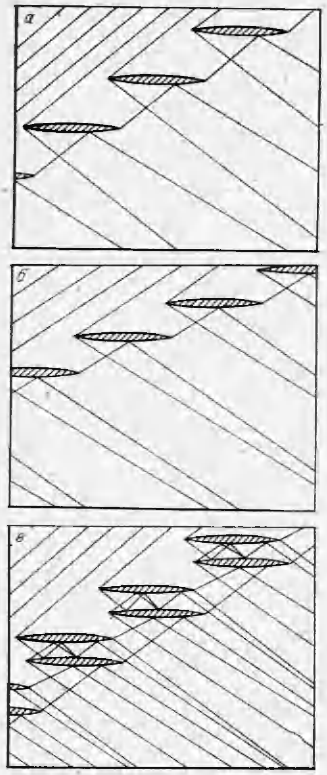
Первый способ соответствует обычной линеаризации. Второй отличается заменой p на $\pi = \ln p$, что, как известно [15], при умеренных сверхзвуковых скоростях снижает погрешности линейной теории. Другие уравнения (изэнтропичности, изоэнергетичности, состояния и т. п.), а также граничное условие $\beta = \beta(x)$ на профилях не линеаризовывались. Хотя в оценках «по порядку величин» такие уточнения являются внепорядковыми, на практике они всегда повышают точность результатов.

Расчеты с использованием постоянства инвариантов (1.14) на отрезках характеристик ведутся по конечным формулам и сводятся к последовательному определению параметров на профилях и в заданных сечениях. Для тонких профилей использование линейной теории внутри решетки (в том числе на всем входном участке) не противоречит необходимости привлечения ПНА вне ее: нелинейные эффекты носят кумулятивный характер, накапливаясь на больших расстояниях.

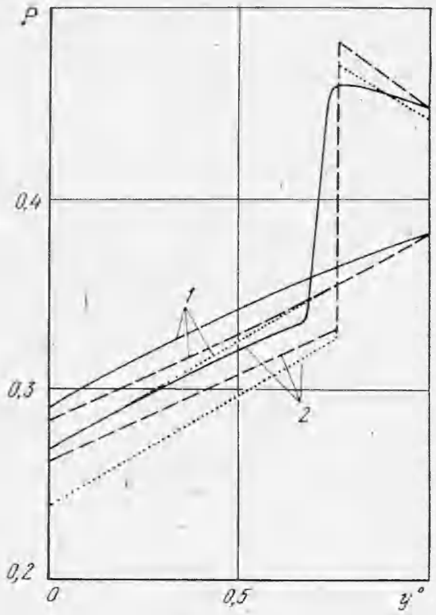
Для удобства дальнейшего изложения изменим ориентацию решетки и осей y и n, чтобы они расположились, как показано на фиг. 1, *б*. Точки a, b, ... и направление осей x и s на фиг. 1, *а*, *б* совпадают, а J^+ и J^- меняются ролями. Как уже отмечалось, на участок межлопаточного канала правее fe влияют условия вниз по потоку. На фиг. 1, *б* их влияние осуществляется заданием J^- при $n \to \infty$. Проще и здесь частично обратить задачу, задав не J_+^-, а J_0^-. Если начальная (при $n = 0$) интенсивность скачков, уходящих вниз по потоку, сравнительно велика и нельзя применять линейную теорию, а вблизи $n = 0$ — ПНА, то в полосе $0 \leqslant n \leqslant \leqslant n_0$ за решеткой течение рассчитывается методом [13, 14] с установлением по x. При этом J^- фиксируется на линии тока, идущей из f, а для установления в типичных примерах достаточно трех шагов решетки. Обычно же при счете слоями в обратной постановке тем же способом рассчитывается область, захватывающая лишь чуть больше одного шага. Это делается для того, чтобы на линии $n = n_0 > 0$ сформировать начальные распределения для ПНА и определения (по (1.13) с индексом плюс вместо минуса) параметров далеко вниз по потоку. При линейном подходе требуемые распределения получаются на заднем фронте.

К отличительным особенностям течения за решеткой следует отнести, во-первых, то, что энтропия σ_+ из-за потерь в скачках превосходит σ_0. Во-вторых, за решеткой слабые скачки одноименного семейства обычно пересекаются. Это, однако, не усложняет анализа, так как в ПНА такие пересечения ведут к слиянию скачков без появления особенностей другого семейства. В итоге вдали от заднего фронта по-прежнему верна формула (1.10).

2. Описанные в п. 1 подходы были реализованы на ЭВМ БЭСМ-6 в программах, приспособленных для расчета обтекания одиночных и так



Фиг. 2



Фиг. 3

называемых биплановых решеток. Возможности этих программ демонстрируют примеры, представленные на фиг. 2. На ней для двух одиночных (фиг. 2, *а*, *б*) и одной биплановой (фиг. 2, *в*) решеток, симметричные двояковыпуклые профили которых образованы дугами окружностей радиуса $r/d = 5$ при длине хорды $l/d = 1$, жирными линиями нанесены скачки, возникающие при обтекании совершенным газом с $\varkappa = 1{,}4$. Биплановая решетка (фиг. 2, *в*) образована двумя надвинутыми друг на друга решетками фиг. 2, *а*. Поток за всеми решетками на фиг. 2 определялся заданием правого инварианта на ее заднем фронте: $J^{+}=2{,}08$. В случае фиг. 2, *а*, *в* $\gamma = 30°$, а в случае фиг. 2, *б* $\gamma = 20°$. Рассчитанные режимы характеризовались следующими значениями числа Маха и угла β набегающего потока: фиг. 2, *а*, *в* — $M_{-} = 1{,}7$, $\beta_{-} = 4{,}15°$; фиг. 2, *б* — $M_{-} = 2$, $\beta_{-} = 3{,}33°$. Отношение $\Sigma \equiv P_{+}/P_{-}$, где P — давление торможения, для биплановой решетки несколько выше (0,932), чем для одиночной (0,926). Сравнивая эти величины, следует иметь в виду, что p_{+}/p_{-} в рассчитанных случаях также различаются. При получении результатов, представленных на фиг. 2, внутри решетки (правее ca^0) использовался метод сквозного счета. Расчет одиночной решетки с числом ячеек поперек канала $N = 30$, что обеспечивает постоянство (при дальнейшем увеличении N) не менее трех значащих цифр в Σ и в параметрах при $n \to \pm\infty$, требует на БЭСМ-6 2 мин. Аналогичный расчет биплановой решетки с $N = 80$ в ее двух каналах требует не более 6 мин. В линейном приближении эти варианты считаются секунды при вполне приемлемой точности. Это подтверждает фиг. 3, на которой в типичном случае для двух сечений ($x = x_c$ — кривые *1* и $x = x_f$ — кривые *2*) нанесены распределения p, найденные тремя способами: сплошные кривые — численным интегрированием по [13, 14], штриховые — по линейной теории с заменой p на π и пунктир — без такой замены (y^0 — расстояние от нижнего профиля, отнесенное к высоте канала в данном сечении). Переход от p к π снижает погрешности линейной теории.

Развитые подходы и программы применимы и в случаях, когда $M_n \equiv |V \sin\theta|/a > 1$ и поток перед фронтом решетки не возмущен, а также в аналогичных задачах о сверхзвуковом истечении из решеток плоских сопел. Если за решеткой $M_n > 1$, то течение в общем случае содержит скачки обоих семейств. После того как скачки становятся слабыми, их дальнейшее затухание, как и в [9, 11], описывается ПНА, волны разных семейств рассматриваются независимо, а суммарные распределения получаются их суперпозицией.

3. Не ограничиваясь далее режимами с $M > 1$, перейдем к законам подобия для стационарного обтекания решеток. В случае тонких профилей и не близких к единице M их вывод опирается на линеаризацию уравнений и граничных условий. При этом для решетки достаточно рассмотреть полосу $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, $0 \leqslant y \leqslant y_{a0} = d \sin\gamma$, ставя в дополнение к условию непротекания на профилях условие периодичности $\varphi(x + x_{a0}, y_{a0}) = \varphi(x, 0)$ при $x < 0$ и $x > l$, где φ — любой параметр, а $x_{a0} = d\cos\gamma$. Ограничимся аффинно подобными профилями: $y = \tau l \Gamma_{\pm}(x^0)$, где $x^0 = x/l$, τ — относительное отклонение образующих от хорды, $\Gamma_{\pm}(x^0)$ — функции порядка единицы, знак плюс (минус) дает верхнюю (нижнюю) образующую профиля, расположенного у оси x, причем $\Gamma_+(0) = \Gamma_-(0)$ и $\Gamma_+(1) = \Gamma_-(1)$. При обтекании с $M > 1$ и $M_{n-} < 1$ закон подобия, получающийся описанным выше способом, сводится к уравнениям

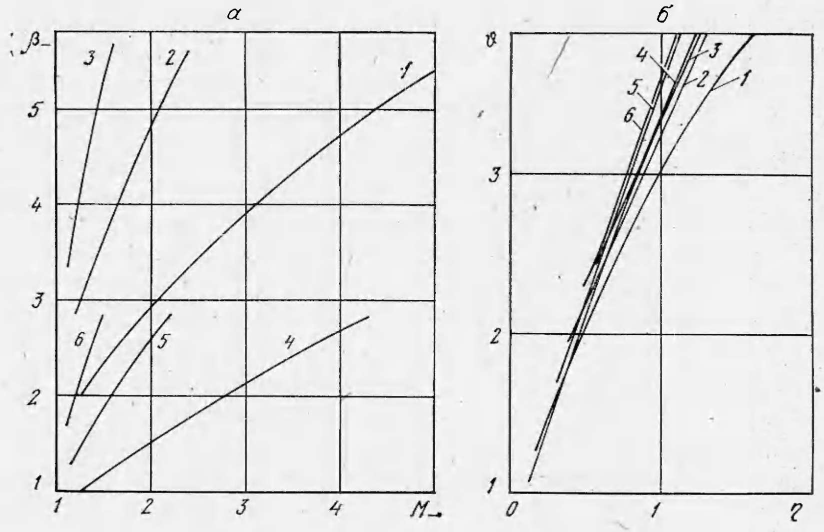
(3.1)
$$
\begin{gathered}
u' = V_-\lambda^{-1}\tau u^0, \quad v = V_-\tau v^0, \quad p' = -\rho_- V_-^2 \lambda^{-1}\tau u^0, \\
\rho' = a_-^{-2} p', \quad \varphi^0 = \varphi^0(x^0, y^0, \xi, \eta, j), \\
X = \rho_- V_-^2 \lambda^{-1}\tau^2 l X^0, \quad Y = \rho_- V_-^2\lambda^{-1}\tau l Y^0, \\
\Phi^0 = \Phi^0(\xi, \eta, j), \quad \lambda = \sqrt{M_-^2 - 1}, \quad y^0 = y\lambda/l, \\
\xi = x_{a0}/l, \quad \eta = y_{a0}\lambda/l, \quad j = J_+^+/\tau,
\end{gathered}
$$

где u, v и X, Y — проекции **V** и силы, действующей на профиль, на оси x и y, а для u, p и ρ принята запись $u = u_- + u'$, ..., причем в данном приближении $u_- = V_-$. На режимах запирания влияние параметра j ограничено слева скачком или характеристикой fe. На незапертых режимах с $M_- > 1$, когда указанный скачок уходит вверх по потоку (это имеет место для достаточно редких решеток), j влияет на все течение. При этом, однако, нет направляющего воздействия, и вместо j в качестве параметра подобия можно взять $\vartheta = \beta_-/\tau$. На запертых режимах в силу (3.1), а также линеаризованных законов сохранения (1.13) с удовлетворяющими (3.1) распределениями на переднем фронте имеем

(3.2)
$$
\vartheta = \beta_-/\tau \simeq v_-/(V_-\tau) = \varphi(\xi, \eta).
$$

Для проверки (3.1) и (3.2) с помощью описанного в п. 1 подхода без использования линеаризованных соотношений (1.14) были выполнены расчеты обтекания шести решеток с $\xi = \sqrt{3}/2$ при разных M_-. Их результаты приведены на фиг. 4 (*а* — зависимости β_- в градусах от M_-, *б* — ϑ от η). Цифрами помечены кривые, отвечающие решеткам с такими значениями γ, d/l и τ: *1* — 16,1°; 0,9015; 0,025, *2* — 30°; 1; 0,025, *3* — 45°; $\sqrt{3/2}$; 0,025, *4* — 16,1°; 0,09015; 0,0125, *5* — 30°; 1; 0,0125, *6* — 45°; $\sqrt{3/2}$; 0,0125. Видно, что (3.2) группирует кривые, относящиеся к разным решеткам, в пределах, не превышающих $\pm$ 10% по ϑ.

Закон подобия (3.1), (3.2), полученный в линейном приближении, не обеспечивает подобия нелинейного затухания волновых структур вдали от решетки. Как можно показать в ПНА, для этого в дополнение к параметрам подобия из (3.1) требуется постоянство $K_- = \lambda^2(M_-^4 \alpha\tau)^{-2/3}$, где α — то же, что в (1.10). Данное условие получается из анализа уравнения, определяющего в ПНА наклон прямолинейных характеристик в плоскости $x^0 y^0$. В отличие от (3.1) через α в K_- входят константы, характеризующие термодинамику среды. Для совершенного газа $\alpha = 1 + \varkappa$ и $K_- = \lambda^2[M_-^4(1 + \varkappa)\tau]^{-2/3}$. На сверхзвуковых режимах с $M_{n-} > 1$, когда поток перед решеткой не возмущен, j в (3.1), как и на незапертых



Фиг. 4

режимах с $M_- > 1$, удобно заменить на ϑ. Та же замена необходима (а не только удобна) при полностью дозвуковом обтекании. Кроме того, здесь $\lambda = \sqrt{1 - M_-^2}$. Соответствующий закон подобия, обобщающий закон подобия Прандтля — Глауэрта для одиночного профиля, известен [16]. Отметим, что при этом в силу парадокса Даламбера $|X^0| = \vartheta|Y^0|$.

Пусть теперь решетка обтекается трансзвуковым потоком. Поступая здесь так же, как в [17], найдем, что на незапертых режимах

$$
\begin{gathered}
u = a_*(1 + \tau^{2/3}\alpha^{-1/3}u^0), \quad v = a_*\tau v^0, \quad p = p_* - \rho_* a_*^2 \tau^{2/3}\alpha^{-1/3}u^0, \\
\rho = \rho_*(1 - \tau^{2/3}\alpha^{-1/3}u^0), \quad \varphi^0 = \varphi^0(x^0, y^0, \xi, \eta, K, \vartheta), \\
X = \rho_* a_*^2 \tau^{5/3} l X^0, \quad Y = \rho_* a_*^2 \tau^{2/3} l Y^0, \; \Phi^0 = \Phi^0(\xi, \eta, K, \vartheta), \\
x^0 = x/l, \quad y^0 = y(\tau\alpha)^{1/3}/l, \quad \xi = x_{a0}/l, \quad \eta = y_{a0}(\tau\alpha)^{1/3}/l, \\
K = (M_- - 1)(\tau\alpha)^{-2/3}, \quad \vartheta = \beta_-/\tau
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

с α из п. 1 (в [17] одно из выражений для α неверно).

Если поток перед решеткой сверхзвуковой и $M_n < 1$, что на трансзвуковых режимах для $\gamma < \pi/2$ обычно выполняется, то, как можно показать, (3.3) обеспечивает подобие ближних и дальних полей. На режимах запирания ϑ становится функцией ξ, η и K, а X^0, Y^0 и параметры за решеткой (справа от так называемого замыкающего скачка при $M_- < 1$ и от fe в противном случае) — функциями не ϑ, а $\pi = (p_+ - p_*)\alpha^{1/3}/(\rho_* a_* \tau^{2/3})$ с заданным p_+. При сверхзвуковом истечении из решетки с $M_n < 1$ параметр π можно заменить на j из (3.1). Хотя для расчета трансзвуковых режимов требуются подходы, отличные от развитых в п. 1 (см. [18]), сверхзвуковые дальние поля и здесь описываются ПНА.

Законы подобия (3.1) — (3.3) основаны на предположении о малости возмущений, нередко нарушающемся в некоторых локальных областях. На всех режимах таковыми являются окрестности затупленных передних кромок, а при до- и трансзвуковом обтекании — критических точек (включая задние кромки, обтекаемые по схеме Чаплыгина — Жуковского) и передних острых кромок. Здесь (3.1) и (3.3), естественно, не имеют места. Более того, если даже подобные особенности не влияют на поля параметров вдали от них, их воздействие на интегральные характеристики может быть заметным (например, из-за подсасывающей силы на передней кромке), вызывая отклонения по X и Y от (3.1) и (3.3).

Авторы признательны А. Б. Ватажину за совет включить в алгоритм линейное приближение и В. А. Вострецовой за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов Г. Ю.** Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И.** Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М.: Машиностроение, 1967.
3. **Lawaczeck O. K.** Calculation of the flow properties up and downstream of and within a supersonic turbine cascade. Pap. ASME, 1972, N GT-47. Рус. пер. Расчет сверхзвукового течения через турбинную решетку.— Экспресс-информация. ВИНИТИ. Сер. Поршневые и газотурбинные двигатели, 1973, № 3.
4. **Lichtfuss H. J., Starken H.** Supersonic cascade flow.— In: Progress Aerospace Sci. Vol. 15. Oxford e. a.: Pergamon Press, 1974.
5. **Богод А. Б., Крайко А. Н., Черняк Е. Я.** Исследование обтекания плоской решетки сверхзвуковым потоком идеального газа при дозвуковой «нормальной» компоненте на режимах с присоединенными скачками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 4.
6. **York R. E., Woodard H. S.** Supersonic compressor cascades-an analysis of the entrance region flow field containing detached shock waves.— Trans. ASME. Ser. A. J. Eng. Power, 1976, vol. 98, N 2.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
8. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. **Simons G. A.** Decay of a diamond shock pattern.— AIAA J., 1972, vol. 10, N 8.
10. **Fink M. R.** Shock wave behavior in transonic compressor noise generation. Pap. ASME, 1971, N GT-7.
11. **Крайко А. Н., Осипов А. А.** Затухание периодической последовательности слабых ударных волн в каналах со «звукопоглощающими» стенками.— Изв. АН СССР. МГЖ, 1976, № 4.
12. **Крайко А. Н., Ни А. Л.** О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1.
13. **Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В.** Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 2.
14. **Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Мир, 1976.
15. **Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.** К построению линейной теории неравновесных и равновесных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6.
16. **Oswatitsch K.** Grundlagen der Gasdynamik. Wien — New York: Springer-Verlag, 1976.
17. **Крайко А. Н., Тагиров Р. К.** К околозвуковому обтеканию тел вращения с протоком при наличии истекающей из протока струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6.
18. **Messiter A. F., Adamson T. C. Jr.** Transonic small-disturbance theory for lightly loaded cascades.— AIAA J., 1981, vol. 19, N 8.

Поступила 19/IX 1983 г.

УДК 532.517.6

СМЕНА РЕЖИМА В ПЛОСКОЙ СТРУЕ СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Е. П. Курочкина

(Новосибирск)

В экспериментальных исследованиях на начальном участке струй наблюдаются течения с почти ступенчатым профилем скорости.

В данной работе теоретически анализируются устойчивость и характер ветвления вторичных режимов в плоской затопленной струе со ступенчатым профилем скорости. Кусочно-постоянный вид профиля позволяет большую часть выкладок выполнить аналитически. Установлен мягкий режим возбуждения, и рассчитана структура вторичного режима.

Методика расчета ветвления исходного ламинарного режима изложена в [1, 2]. Здесь используется плоскопараллельное приближение. В этом случае задача об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к уравнению Орра — Зоммерфельда

$$L_\alpha\varphi = \varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi - i\alpha\mathrm{Re}[(U - C)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi] = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока; $U(y)$ — профиль скорости потока; $C = X + iY$ — искомое комплексное собственное значе-