УДК 517.93+537.33

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИОНИЗОВАННОЙ ПРИМЕСИ В ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ОБЛАСТИ ПОЛУПРОВОДНИКА

А. А. Папин, А. П. Мажирин*

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул
*Институт физики полупроводников СО РАН, 630090 Новосибирск

Построено точное решение нелинейной задачи, в которой определяются электростатический потенциал и профиль распределения ионизованной примеси в приповерхностной области полупроводника.

Введение. В статье рассматривается одномерный случай распределения ионизованной примеси в полупроводнике n-типа в стационарных условиях под воздействием внешнего электрического поля. Распределение электростатического потенциала Ψ в зависимости от координаты x, отсчитываемой от поверхности полупроводника, описывается уравнением Пуассона

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0\,\varepsilon_s}[N - n], \tag{1}$$

где $N(x)$ — профиль распределения ионизованной примеси. Концентрация n электронов в условиях, близких к термодинамическому равновесию, выражается через электрохимический потенциал φ_0 [1]:

$$n = n_i \exp\left(\beta(\Psi - \varphi_0)\right), \qquad \beta = q/(kT). \tag{2}$$

Здесь n_i — концентрация носителей в собственном полупроводнике; q — заряд электрона ($q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл); T — температура ($T = 300$ К); k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К); ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума ($\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-14}$ Ф/см); ε_s — диэлектрическая проницаемость в полупроводнике ($\varepsilon_s = 11{,}8$).

В данной постановке учитывается «хвост» распределения концентрации основных носителей заряда в переходной области между областью пространственного заряда и квазинейтральным объемом полупроводника [3], который описывается экспоненциальным членом в уравнении Пуассона, обычно отбрасываемым в приближении барьера Шоттки [1]. В эксперименте измерялась емкость C пространственного заряда, нормированная по площади контакта и зависящая от напряжения смещения v. Концентрации ионизованной примеси $\overline{N}$ и ширина обедненной области w определяются по известным формулам через $C(v)$ [1]. Однако величина $\overline{N}(w)$ соответствует истинному распределению примеси $N_n = N/n_0$ ($n_0 = n_i \exp(-\beta\,\varphi_0)$) только в случае плавных изменений N_n, т. е. удовлетворяющих условию $dN_n/dx \ll N_n/L_d$ (L_d — длина Дебая). Когда реализуется наиболее часто встречающийся на практике случай резких градиентов концентрации примеси, то $\overline{N}$ существенно отличается от N_n. В связи с этим актуальна задача определения профиля $N(x)$ в случае больших градиентов концентрации примеси и с учетом основных носителей заряда в области пространственного заряда.

Прямая задача о нахождении электростатического потенциала по глубине при заданном распределении концентрации ионизованной примеси изучалась во многих работах [1–3], где уравнение (1), рассматриваемое при $x > 0$, дополнялось граничными условиями

$$\int_0^\infty \frac{d\Psi}{dx}\,dx = v, \qquad \Big(\frac{d\Psi}{dx}, \Psi\Big) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{3}$$

(v — заданный параметр).

В настоящей работе рассматривается решение обратной задачи о нахождении распределения концентрации ионизованной примеси по глубине. Предполагается, что в условиях квазиравновесия электрохимический потенциал φ_0 не зависит от глубины и дополнительно к (3) выполнены условия

$$\int_0^\infty \Big(\frac{d\Psi}{dx}\Big)^2 dx = J_0(v), \qquad \int_0^\infty \frac{d^2\Psi}{dx^2}\,dx = z_0(v); \tag{4}$$

$$\frac{N(x)}{n_0} > 0, \qquad (N(x) - n_0) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{5}$$

где $J_0(v)$, $z_0(v)$ — функции, определяемые из эксперимента по измерению вольт-фарадных характеристик обедненного слоя. Помимо (5), предполагается, что $N(x)$ — двухпараметрическая ступенчатая функция вида

$$\frac{N(x)}{n_0} = \begin{cases} a, & 0 \leqslant x < \rho, \\ 1, & x \geqslant \rho, \end{cases} \tag{6}$$

где a и ρ — подлежащие определению положительные постоянные.

Постановка задачи. Положим

$$u = \beta\Psi, \qquad \xi = \frac{x}{|L|}, \qquad L^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_s kT}{2q^2 n_i}, \qquad q \neq 0.$$

В новых переменных условия (1)–(5) принимают вид

$$2u'' = \exp(u) - \frac{N(\xi)}{n_0}, \quad u' \equiv \frac{du}{d\xi}; \tag{7}$$

$$(u, u', N - n_0) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty; \tag{8}$$

$$u(0) = -\beta v \equiv u_0; \tag{9}$$

$$u'(0) = -\beta|L|z_0 \equiv -z; \tag{10}$$

$$\int_0^\infty u'^2\,d\xi = \beta^2|L|J_0 \equiv J. \tag{11}$$

В силу (6) вторая производная u'' может иметь разрыв первого рода. Первая производная u' и, следовательно, сама функция $u(\xi)$ являются непрерывными.

Предполагая существование искомых параметров $a > 0$ и $\rho > 0$, рассмотрим при $\xi > \rho$ уравнение (7) $2u'' = \mathrm{e}^u - 1$. С учетом двух первых условий из (8) выводим

$$u'^2 = \mathrm{e}^u - u - 1 \equiv g_\infty(u), \tag{12}$$

где $g_\infty(u) \geqslant 0$ для всех $u \in (-\infty, \infty)$. Аналогично при $\xi < \rho$ из уравнения $2u'' = \mathrm{e}^u - a$ получаем $u'^2 + au - \mathrm{e}^u = C$. Постоянная C определяется из условия непрерывности $u(\xi)$ и $u'(\xi)$ в точке $\xi = \rho$:

$$C = (a-1)u_\rho - 1, \qquad u_\rho \equiv u(\rho).$$

Поэтому для всех $\xi \leqslant \rho$

$$u'^2 = e^u - au + (a-1)u_\rho - 1 \equiv g_a(u). \tag{13}$$

Условия, при которых гарантируется неотрицательность $g_a(u)$, излагаются в лемме 1. При извлечении корня в равенствах (12), (13) нужный знак определяется граничными условиями(9)–(11). Возможны следующие варианты:

A. $u' \geqslant 0, \quad u(0) < 0$;

B. $u' \leqslant 0, \quad u(0) > 0$.

Случай $u(0) = 0$ приводит к тривиальному решению. Поэтому здесь и далее $u(0) \neq 0$. В статье рассматривается только вариант A, соответствующий обеднению области пространственного заряда.

Задача A. Пусть имеет место условие A. Необходимо определить непрерывно дифференцируемую функцию $u(\xi)$ и положительные параметры a, ρ, удовлетворяющие соотношениям

$$u' = \sqrt{g_\infty(u)}, \quad \xi \geqslant \rho, \quad (u, u') \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty;$$

$$u' = \sqrt{g_a(u)}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \rho, \quad u(0) = u_0 < 0, \quad u'(0) = -z \geqslant 0, \quad \int\limits_0^\infty u'^2\, d\xi = J,$$

где u_0, z, J — заданные вещественные параметры.

Начальные данные u_0, z, J в общем случае считаются независимыми. Структуру множества значений u_0, z, для которых $g_a(u) \geqslant 0$, $a > 0$, $\rho > 0$, удобно описать с помощью параметра

$$F(u_0, z) = \frac{1}{u_0}(g_\infty(u_0) + u_0 - z^2). \tag{14}$$

В силу (13) при $\xi = 0$ и (14) имеем

$$u_0(1 - F) = (a-1)(u_\rho - u_0). \tag{15}$$

Случай $F = 1$ приводит в конечном итоге к равенству $a = 1$ и редуцирует задачу A к виду

$$u' = \sqrt{g_\infty(u)}, \quad \xi > 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = -z,$$

$$\int\limits_0^\infty u'^2 d\xi = J, \quad (u, u') \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Данная задача разрешима при определенном согласовании начальных данных. В дальнейшем считаем, что $F \neq 1$ ($a \neq 1$). Таким образом, неизвестный параметр u_ρ из (15) можно представить в виде

$$u_\rho = u_0 \frac{a - F}{a - 1}. \tag{16}$$

Разрешимость задачи A. Решение задачи A будет получено в квадратурах. Но сначала необходимо указать условия неотрицательности $g_a(u)$.

В силу монотонности $u(\xi)$ имеем неравенства

$$u_0 \leqslant u(\xi) \leqslant u_\rho, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \rho; \qquad u_\rho \leqslant u(\xi) \leqslant 0, \quad \xi \geqslant \rho.$$

Из этих неравенств и (16) при $F > 1$ выводим, что $a \geqslant F > 1$. Поэтому для всех $u \in [u_0, u_\rho]$:

$$g_a(u) = g_\infty(u) + (a-1)(u_\rho - u) \geqslant 0.$$

Замечая, что при условиях задачи А

$$F = \frac{1 - \exp(u_0) + z^2}{|u_0|} > 0,$$

предположим, что $F < 1$. Тогда аналогично предыдущему получим, что $a \leqslant F < 1$. Если $a < F$ и дополнительно

$$\exp(u_\rho) \leqslant a, \tag{17}$$

то $0 < g_\infty(u_\rho) \leqslant g_a(u) \leqslant z^2$. Неравенство (17) эквивалентно условию неотрицательности функции

$$w(a) = |u_0|\frac{F-a}{1-a} + \ln a, \quad a \in (0, F). \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что для $a \in (0, F)$

$$\max w(a) = w(a_*) = |u_0| - S(\tau),$$

где

$$a_* = 1 + \frac{1}{2}\eta - \sqrt{\eta + \frac{1}{4}\eta^2}, \qquad a_* \in (0, F), \qquad S(\tau) = \tau + \ln(1+\tau),$$

$$\tau = \frac{1}{2} + \sqrt{\eta + \frac{1}{4}\eta^2} > 0, \qquad \eta = |u_0|(1-F) = g_\infty(u_0) - z^2 > 0.$$

Поскольку функция $S(y)$ при $y \geqslant 0$ монотонно возрастает, то уравнение

$$|u_0| = S(y) \tag{19}$$

при каждом конечном значении $u_0 \neq 0$ имеет единственное решение $y_*(|u_0|)$. Поэтому при $F < 1$ всегда можно указать такие значения u_0 и z, для которых $\max w(a) > 0$. Для этих значений начальных данных функция (18) имеет два нуля a_1^0, a_2^0, причем $0 < a_1^0 < a_* < a_2^0 < F$. Таким образом, для всех $a \in (a_1^0, a_2^0)$ и $u \in [u_\theta, u_\rho]$ функция $g_a(u)$ положительна.

Лемма 1. *Пусть $u_0 < 0$ и $z < 0$ — начальные данные задачи* А.

1. *Если $F = 1$, то $a = 1$, $g_a(u) = g_\infty(u) \geqslant 0$.*
2. *Если $F > 1$, то $a \geqslant F$, $g_a(u) \geqslant 0$.*
3. *Если $F < 1$ и дополнительно $g_\infty(u_0) - z^2 < y_*/(1 + y_*^2)$* ($y_*$ — корень уравнения (19)), *то $0 < a_1^0 < a < a_2^0 < F$, $g_a(u) > 0$, где a_1^0, a_2^0 — корни уравнения*

$$|u_0|\frac{F-a}{1-a} + \ln a = 0. \tag{20}$$

С учетом этой леммы доказательство разрешимости задачи А проводится по следующей схеме. Пусть заданы u_0, z, J. Вычисляя значения F, определяем множество значений искомого параметра a и параметра u_ρ. Функция $g_a(u)$ определена и неотрицательна на этом множестве. С учетом неравенств

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u_0}u^2(\xi) < \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u_\rho}u^2(\xi) \leqslant g_\infty(u) \leqslant \frac{1}{2}\,u^2(\xi), \qquad u(\xi) \in [u_0, 0]$$

для всех допустимых значений параметра a, за исключением $a = F$, имеем

$$0 < \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u_0}u_\rho^2 \leqslant g_\infty(u_\rho) \leqslant g_a(u) \leqslant z^2. \tag{21}$$

В силу (21) решение задачи

$$u' = \sqrt{g_a(u)}, \qquad 0 < \xi < \rho, \qquad u(0) = u_0, \tag{22}$$

можно представить в виде

$$K(u(\xi), a, u_0, z) \equiv \int\limits_{u_0}^{u(\xi)} g_a^{-1/2}(s)\, ds = \xi. \tag{23}$$

Откуда, используя условие $u(\rho) = u_\rho$, имеем

$$\rho = K(u_\rho, a, u_0, z), \quad u(\xi) = \tilde{U}(\xi, a, u_0, z), \quad \xi \in [0, \rho], \tag{24}$$

где $\tilde{U}(\xi, a, u_0, z)$ есть функция, обратная $K(u(\xi), a, u_0, z)$. Аналогично при $\xi \geqslant \rho$ решение задачи

$$u' = \sqrt{g_\infty(u)}, \quad u(\rho) = u_\rho \tag{25}$$

имеет вид

$$K_\infty(u(\xi), a, u_0, z) \equiv \int\limits_{u_\rho}^{u(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\, ds = \xi - \rho, \qquad u(\xi) = U_\infty(\xi, a, u_0, z).$$

Таким образом, для всех $\xi \geqslant 0$

$$u(\xi) = U(\xi, a, u_0, z), \qquad \rho = \rho(a, u_0, z), \tag{26}$$

и, следовательно, функционал

$$N = \int\limits_0^\infty u'^2\, d\xi = \int\limits_0^\rho \left|\frac{d\tilde{U}}{d\xi}\right|^2 d\xi + \int\limits_\rho^\infty \left|\frac{dU_\infty}{d\xi}\right|^2 d\xi \tag{27}$$

зависит от a, u_0, z. Фиксируя значения u_0, z и привлекая последнее условие в формулировке задачи А, приходим к уравнению

$$N(a) = J. \tag{28}$$

Решения последнего дают искомые значения параметра a. После нахождения a из (16) определяется параметр u_ρ, из (24) — параметр ρ, а из (26) — искомая функция $u(\xi)$. Таким образом, вопрос о разрешимости задачи А сводится к анализу разрешимости уравнения (28). Исследуем свойства функции $N(a)$.

Пусть $u_1(\xi)$, ρ_1, $u_2(\xi)$, ρ_2 — решения задач (22), (25), отвечающие значениям a_1, a_2 параметра a. Положим $\hat{u}(\xi) = u_1(\xi) - u_2(\xi)$, $\hat{\rho} = \rho_1 - \rho_2$, $\hat{a} = a_1 - a_2$ и без ограничения общности считаем $\hat{a} < 0$. Имеем

$$\hat{u}_\rho \equiv u_{\rho_1} - u_{\rho_2} = \hat{a}\frac{u_0(F-1)}{(a_1-1)(a_2-1)}. \tag{29}$$

Лемма 2. *Пусть a_1, a_2 — произвольные значения параметра a, удовлетворяющие одновременно условиям 2 или 3 леммы 1. Пусть $a_1 < a_2$. Тогда $\hat{u}(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \geqslant 0$, $\hat{\rho} > 0$ при $F > 1$ и $\hat{\rho} < 0$ при $F < 1$. При этом функция $N(a)$ из (28) монотонно убывает.*

Доказательство. Рассмотрим два варианта: $F > 1$ и $F \in (0,1)$. При $a_1 > F > 1$ из (29) имеем $\hat{u}_\rho > 0$. Поскольку $g_{a_1}(s) - g_{a_2}(s) = \hat{a}(u_0 - s)$, то для $s > u_0$ и при $\xi \in (0, \min(\rho_1, \rho_2)]$ из (23) следует $\hat{u}(\xi) > 0$. На этом интервале

$$\int\limits_{u_2(\xi)}^{u_1(\xi)} g_a^{-1/2}(s)\, ds = -\hat{a} \int\limits_{u_0}^{u_2(\xi)} f(s)\, ds, \tag{30}$$

где

$$f(s) = \frac{(s - u_0)}{(g_{a_1}^{1/2}(s) + g_{a_2}^{1/2}(s))g_{a_1}^{1/2}(s)g_{a_2}^{1/2}(s)}.$$

Предположим, что $\hat\rho < 0$. Ввиду монотонности $u_i(\xi)$ на интервале $[\rho_1, \rho_2]$ имеем

$$u_i(\rho_1) \leqslant u_i(\xi) \leqslant u_i(\rho_2), \quad i = 1,\ 2.$$

Откуда $0 < \hat u_\rho \leqslant \hat u(\xi) \leqslant u_1(\rho_2) - u_2(\rho_1)$ и, в частности, $\hat u(\rho_2) > 0$. Поэтому для всех $\xi \geqslant \rho_2$ из представления

$$\xi - \rho_2 = \int\limits_{u_1(\rho_2)}^{u_1(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds = \int\limits_{u(\rho_2)}^{u_2(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds \tag{31}$$

следует $\hat u(\xi) \geqslant 0$. Если $\hat\rho > 0$, то на интервале $[\rho_2, \rho_1]$ из представления

$$\xi - \rho_2 = \int\limits_{u_1(\rho_2)}^{u_1(\xi)} g_{a_1}^{-1/2}(s)\,ds = \int\limits_{u_2(\rho_2)}^{u_2(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds$$

с учетом неравенства $g_{a_1}(s) > g_\infty(s)$, а также ранее полученного неравенства $\hat u(\rho_2) > 0$ имеем

$$\int\limits_{u_1(\rho_2)}^{u_1(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds > \int\limits_{u_1(\rho_2)}^{u_1(\xi)} g_{a_1}^{-1/2}(s)\,ds > \int\limits_{u_1(\rho_2)}^{u_2(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds.$$

Откуда $\hat u(\xi) > 0$ при $\xi \in [\rho_2, \rho_1]$. Используя (31) с заменой ρ_2 на ρ_1, получим, что $\hat u(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \geqslant \rho_1$. Таким образом, $\hat u(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in (0, \infty)$ в случае $a_1 < a_2$. Уравнение (7) умножим на достаточно гладкую функцию $\psi(\xi)$ и полученное равенство проинтегрируем по ξ от нуля до некоторого $R > \rho$. Устремляя R к бесконечности, с учетом граничных значений (8)–(11) получим равенство

$$\int\limits_0^\infty (2u'\psi' + \psi(\mathrm{e}^u - 1))\,d\xi + (1 - a)\int\limits_0^\rho \psi\,d\xi = -2u'(0)\psi(0). \tag{32}$$

Для $\hat u(\xi)$ из (32) имеем

$$\int\limits_0^\infty (2\hat u'\psi' + \psi(\mathrm{e}^{u_1} - \mathrm{e}^{u_2}))\,d\xi - \hat a\int\limits_0^{\rho_1} \psi\,d\xi = -(a_2 - 1)\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \psi\,d\xi. \tag{33}$$

При $\psi = 1$ из (33) выводим

$$\int\limits_0^\infty (\mathrm{e}^{u_1} - \mathrm{e}^{u_2})\,d\xi + |\hat a|\rho_1 = (a_2 - 1)\hat\rho, \tag{34}$$

и, следовательно, $\hat\rho > 0$. Положим

$$N(a_i) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{du_i}{dx}\right)^2 d\xi.$$

С учетом (34) и условия $\hat u(0) = 0$ имеем

$$N(a_1) - N(a_2) = -\int\limits_0^{\rho_2} (\mathrm{e}^{u_1} - a_1 + \mathrm{e}^{u_2} - a_2)\hat u\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{\rho_2}^{\rho_1}(\mathrm{e}^{u_1}-a_1+\mathrm{e}^{u_2}-1)\hat{u}\,d\xi-\int\limits_{\rho_1}^{\infty}(\mathrm{e}^{u_1}-1+\mathrm{e}^{u_2}-1)\hat{u}\,d\xi. \qquad (35)$$

Согласно вышеизложенному, правая часть (35) положительна. Поэтому $N(a)$ при $F > 1$ монотонно убывает от $N_F = N(F)$ до $N_\infty = N(a_0)$, $a_0 = \sup a$.

Пусть $F < 1$ и выполнено условие 3 леммы 1, т. е. $0 < a_1^0 < a_1 < a_2 < a_2^0 < F$, $\exp(u_i) \leqslant a_i$. Из (29) следует $\hat{u}_\rho < 0$. В данном случае $\hat{\rho} < 0$, поскольку

$$\rho_2=\int\limits_{u_0}^{u_{\rho_2}} g_{a_2}^{-1/2}(s)\,ds=\int\limits_{u_0}^{u_{\rho_1}} g_{a_2}^{-1/2}(s)\,ds+\int\limits_{u_{\rho_1}}^{u_{\rho_2}} g_{a_2}^{-1/2}(s)\,ds>\rho_1.$$

Из (30) выводим $\hat{u}(\xi) > 0$ для $\xi \in (0,\rho_1]$. Для $\xi \in [\rho_1,\rho_2]$ с учетом неравенства $\hat{u}(\rho_1) > 0$ получим

$$\xi-\rho_1=\int\limits_{u_1(\rho_1)}^{u_1(\xi)} g_{\infty}^{-1/2}(s)\,ds=\int\limits_{u_2(\rho_1)}^{u_1(\rho_1)} g_{a_2}^{-1/2}(s)\,ds+\int\limits_{u_1(\rho_1)}^{u_2(\xi)} g_{a_2}^{-1/2}(s)\,ds>\int\limits_{u_1(\rho_1)}^{u_2(\xi)} g_{\infty}^{-1/2}(s)\,ds.$$

Откуда имеем $\hat{u}(\xi) > 0$ и, в частности, $\hat{u}(\rho_2) > 0$. Используя (31), получим $\hat{u}(\xi) > 0$ для $\xi > 0$. В силу (35), функция $N(a)$ при $F < 1$ монотонно убывает на интервале (a_1^0, a_2^0).

Замечание 1. Пусть $F > 1$, $a = F$ $(u_\rho = 0)$. Из (25) вытекает $u(\xi) = u'(\xi) = 0$ при $\xi \geqslant \rho$. Задачи (22), (25) сводятся к задаче

$$u'=\sqrt{g_F(u)},\quad 0<\xi<\rho,\quad u(0)=u_0;\quad u(\xi)=0,\quad \xi\geqslant\rho.$$

Решение этой задачи $u_F(\xi)$, ρ_F дается формулами (23), (24). Поэтому определен функционал

$$N(a)|_{a=F}\equiv N_F=\int\limits_0^{\rho_F}\left(\frac{du_F}{dx}\right)^2 d\xi. \qquad (36)$$

Замечание 2. В равенстве (32) положим $\psi(\xi) = u(\xi)$ и воспользуемся последним условием задачи А. Получим, что

$$\int\limits_0^{\infty} u(\mathrm{e}^u-1)\,d\xi+(1-a)\int\limits_0^{\rho} u\,d\xi=-2(u'(0)u(0)+J). \qquad (37)$$

При $F > 1$ левая часть (37) неотрицательна. Приходим к необходимому условию разрешимости задачи А при $F > 1$:

$$0<J<-u(0)u'(0).$$

Замечание 3. В формулах (16), (25), (27) перейдем к пределу при $a \to \infty$. Имеем

$$\lim_{a\to\infty} u_\rho=u_0,\quad \lim_{a\to\infty} g_\infty(u_\rho)=g_\infty(u_0),\quad \lim_{a\to\infty}\rho=0. \qquad (38)$$

Последнее равенство есть следствие леммы 2 при $F > 1$ и неравенства

$$\rho\leqslant\int\limits_{u_0}^{u_\rho}((a-1)(u_\rho-s))^{-1/2}\,ds=\frac{2}{a-1}\sqrt{|u_0|(F-1)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{a\to\infty}\rho(a-1)=2(|z|-\sqrt{g_\infty(u_0)}). \qquad (39)$$

Поскольку $\rho \to 0$, то уравнение (22) теряет смысл (предельное значение функции $(a-1)(u_\rho - u(\xi))$ и, следовательно, производной $u'(\xi)$ не определено). Однако решение $u_\infty(\xi)$ задачи (25) при $a \to \infty$ определено, и его можно представить в виде

$$\xi = \int\limits_{u_0}^{u_\infty(\xi)} g_\infty^{-1/2}(s)\,ds, \qquad u_\infty(0) = u_0.$$

Для предельного значения N из (28), используя (38), (39) и теорему о среднем, получим

$$N_\infty = \lim_{a\to\infty} N = \int\limits_0^\infty g_\infty(u_0)\,d\xi. \tag{40}$$

Теорема 1. *Существует единственное решение $(u(\xi), a, \rho)$ задачи* А, *если дополнительно к предположениям леммы* 1 *выполнены следующие условия на начальные данные: если $F > 1$, то*

$$N_\infty < J \leqslant \min(N_F, |u_0 z|); \tag{41}$$

если $F < 1$, то

$$N(a_2^0) < J < N(a_1^0), \tag{42}$$

где N_F, N_∞, $N(a)$ определены формулами (27), (36), (40); a_1^0, a_2^0 — *корни уравнения* (20).

Доказательство. Условия (41), (42) обеспечивают ввиду монотонности функции $N(a)$ существование единственного корня a^* уравнения (28). Из (16) по a^* однозначно определяется параметр u_ρ, а из (24) — параметр ρ. По заданным a^*, u_ρ, ρ функция $u(\xi)$ единственным образом определяется формулами (23), (24).

Таким образом, существует единственное решение задачи А. Этот результат может иметь большое практическое значение при определении профиля концентрации ионизованной примеси по данным C–V измерений на структурах металл — полупроводник в случае больших градиентов концентрации примеси по глубине.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зи С.** Физика полупроводниковых приборов. Т. 1. М.: Мир, 1984.
2. **Гаман В. И.** Физика полупроводниковых приборов. Томск: Изд-во ТГУ, 1989.
3. **Klopfenstein R. W., Wu C. P.** Computer solution on one-dimensional Poisson's equation // IEEE Trans. on Electron Devices. 1975. V. ED-22, N 6. P. 329–333.

Поступила в редакцию 29/VII 1996 г.,
в окончательном варианте — 28/XI 1996 г.