

12. Масленников М. В., Сигов Ю. В., Чуркина Г. П. Численные эксперименты по обтеканию тел различной формы разреженной плазмой // Космич. исследования. — 1968. — Т. 6, № 2.
13. Сапожников Г. И. Экспериментальные исследования потока ускоренных ионов и его взаимодействия с обтекаемыми моделями // Учен. зап. ЦАГИ. — 1971. — Т. 2, № 1.
14. Гунько Ю. Ф., Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. Методика расчета аэродинамических коэффициентов тел в сильно разреженной плазме при наличии собственного магнитного поля // Аэродинамика разреженных газов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1973.

г. Днепропетровск

Поступила 6/VI 1988 г.,  
в окончательном варианте — 23/IX 1988 г.

УДК 532.529

М. М. Есмуханов

### РЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАЗБАВЛЕННОЙ СУСПЕНЗИИ ОТНОСИТЕЛЬНО КРУПНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧАСТИЦ В ПРОСТОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

В [1, 2] исследовано поведение разбавленной суспензии жестких и деформируемых эллипсоидальных частиц таких размеров, что необходимо учитывать влияние броуновских сил на поведение частиц. В данной работе рассмотрен случай, когда взвешенные деформируемые частицы являются относительно крупными, т. е. влиянием броуновских и инерционных сил на поведение микроструктуры можно пренебречь. При этом реологическое поведение суспензии определяется поведением микроструктуры под действием только гидродинамических сил.

В [3] показано, что в течении простого сдвига жесткая эллипсоидальная частица под действием гидродинамических сил совершает относительно своего центра инерции периодическое движение по одной из замкнутых орбит, которые образуют бесконечное однопараметрическое семейство, расположенное на поверхности сферы. Распределение взвешенных жестких частиц по орбитам невозможно однозначно определить без привлечения каких-либо дополнительных предположений. Так, в [3] считалось, что частицы ориентируются таким образом, что выполняется принцип минимума диссипации энергии. В [4] рассмотрена гипотеза о равновероятном распределении взвешенных жестких частиц по орбитам. В [5, 6] предполагалось, что ось вращения деформируемой эллипсоидальной частицы расположена в плоскости сдвига. Однако, как показано в [7], имеются значительные расхождения между экспериментальными данными по макросвойствам суспензии и теоретическими результатами, полученными на основании данных гипотез. В [8, 9] приведен метод нахождения распределения жестких частиц по орбитам, основанный на предположении о наличии слабого броуновского движения частиц, не влияющего на реологические свойства суспензии. Слабое броуновское движение по истечении длительного промежутка времени приводит к некоторому стационарному распределению взвешенных частиц по орбитам.

В настоящей работе при нахождении распределения деформируемых частиц по семейству орбит используется гипотеза, предложенная в [8, 9] для жестких частиц. В отличие от случая относительно крупных жестких частиц однопараметрическое семейство замкнутых орбит деформируемых вязкоупругих частиц расположено на поверхности трехосного эллипсоида, геометрия и ориентация которого зависят от скорости сдвига, вязкости дисперсионной среды и свойств материала взвешенных частиц.

**1. Реологические уравнения состояния.** Рассмотрим разбавленную суспензию взвешенных деформируемых частиц. Элемент микроструктуры суспензии будем моделировать деформируемым эллипсоидом вращения, напряженное состояние в материале которого определяется внутренней упругостью  $G$  и внутренней вязкостью  $\eta$ . Реологические уравнения состояния такой суспензии имеют вид [2]

$$(1.1) \quad T_{ij} = -\langle P \rangle \delta_{ij} + 2\langle \mu_0 \rangle d_{ij} + \langle \mu_1 n_i n_j \rangle + \\ + \langle \mu_2 n_k n_m n_i n_j \rangle d_{km} + 2\langle \mu_3 (d_{ik} n_k n_j + d_{jk} n_k n_i) \rangle.$$

Здесь  $T_{ij}$ ,  $d_{ij}$  — тензоры напряжений и скоростей деформаций суспензии;  $n_i$  — вектор, направление которого совпадает с направлением оси вращения частицы, а его модуль  $n$  равен половине длины этой оси;  $P$ ,  $\mu_i$  — реологические функции, зависящие от  $G$ ,  $\eta$  и  $n_i$ ; угловые скобки означают

осреднение по угловым положениям частиц в пространстве и длинам полуоси вращения частиц с помощью функции распределения  $F$ , удовлетворяющей уравнению

$$(1.2) \quad \partial F / \partial t + \partial(F \dot{n}_i) / \partial n_i = 0$$

(точка означает производную по времени).

Поведение изолированной взвешенной частицы определяется уравнениями [2]

$$(1.3) \quad \dot{n}_i = \omega_{ij} n_j + \lambda_1 n_i + \lambda_2 d_{km} n_k n_m n_i + \lambda_3 d_{ij} n_j + \\ + \lambda_4 \varepsilon_{ijk} M_j n_k + \lambda_5 R_j n_j n_i,$$

где  $\lambda_i$  — реологические функции, зависящие от  $G$ ,  $\eta$  и геометрии частиц;  $R_j$  и  $M_j$  — сила и момент сил, действующие на частицу, за исключением гидродинамических;  $\varepsilon_{ijk}$ ,  $\delta_{ij}$  — кососимметричный и симметричный символы Кронекера;  $\omega_{ij}$  — тензор вихря скорости.

В случае, когда необходимо учитывать действие на микроструктуру броуновских сил [10],

$$(1.4) \quad R_i = -kT \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad M_i = -kT \varepsilon_{ikm} \frac{n_k}{F} \frac{\partial F}{\partial r_m}$$

( $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура).

Реологические функции  $\mu_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $P$  для разбавленной суспензии вязкоупругих взвешенных частиц найдены в [2]. Однако там при их определении допущена ошибка, связанная с неполным учетом всех сил, действующих на частицу. Подобная ошибка, как показано в [6], была допущена и в [5] при изучении поведения суспензии вязкоупругих сфер.

С учетом указанного замечания  $P$ ,  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  определяются следующим образом:

$$(1.5) \quad \lambda_1 = - \frac{2G a b^2 \beta_0''}{\mu (2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))} \left( \frac{p}{q_0} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{q_0}{p} \right), \\ \lambda_2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{2}{2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1)} - \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right), \\ \lambda_3 = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}, \quad \lambda_4 = \frac{3(p^2 \alpha_0 + \beta_0)}{16 \pi \mu (p^2 + 1)}, \quad \lambda_5 = \frac{3 \beta_0''}{4 \pi \mu (2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))}, \\ P = P_0 - \frac{2 \mu V}{3} \left\{ \frac{\lambda_1}{a b^2 \beta_0''} + \frac{\bar{r}_k \bar{r}_m}{a^3 b^4 \beta_0'' \alpha_0'} (\beta_0'' - \alpha_0'' + b^2 \alpha_0' (\lambda_2 a^2 + \lambda_3)) d_{km} + \right. \\ \left. + kT \left( \frac{1}{a^2} \frac{d}{dn} \left( \frac{p^2 \lambda_5}{\beta_0'} \right) - \frac{6(p^2 - 1) \lambda_4}{a b^2 (p^2 \alpha_0 + \beta_0)} \right) \right\}. \quad \mu_c = \mu \left( 1 + \frac{V}{a b^4 \alpha_0'} \right), \\ \mu_1 = \frac{4 G V (p/q_0)^{2/3} (1 - q_0/p)}{a^2 (2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))} + \frac{9 k T V}{2 \pi a^3 b^2} \left( \frac{3 p (\eta/\mu - 1)}{2} \frac{d}{dp} \left( \frac{a b^2 \beta_0''}{2 (2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1)} + \frac{1}{2} \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right), \\ \mu_2 = \frac{2 \mu V}{a^2 b^2} \left( \frac{\alpha_0'' + \beta_0''}{b^2 \alpha_0' \beta_0''} - \frac{4}{b^2 (p^2 + 1) \beta_0'} - \frac{2}{\beta_0' (2 + 3 a b^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))} \right), \\ \mu_3 = \frac{\mu V}{a^3 b^4} \left( \frac{2}{(p^2 + 1) \beta_0'} - \frac{1}{\alpha_0'} \right).$$

Здесь  $a$  и  $b$  — полуось вращения и экваториальный радиус частицы;  $n = a$ ;  $p = a/b$ ;  $q_0$  — отношение полуосей эллипсоидальной частицы в

недеформированном состоянии;  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_0', \beta_0', \alpha_0'', \beta_0''$  — функции от  $a$  и  $b$ , определенные в [3];  $V$  — объемная концентрация частиц;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $P_0$  — давление в жидкости в отсутствие взвешенных частиц. В случае суспензии относительно крупных вязкоупругих частиц в (1.5) необходимо положить  $T = 0$ .

**2. Поведение изолированной частицы.** Исследуем поведение взвешенных деформируемых частиц в простом сдвиговом течении

$$(2.1) \quad V_x = 0, V_y = Kx, V_z = 0.$$

Поведение относительно крупной частицы в течении простого сдвига описывается уравнениями (1.3). В системе координат, начало которой связано с центром инерции частицы, а оси координат параллельны осям лабораторной системы координат  $(x, y, z)$ , (1.3) имеют безразмерный вид

$$(2.2) \quad (p^2 + 1) \frac{d\theta}{dt} = \frac{p^2 - 1}{4} \sin 2\varphi \sin 2\theta, \quad (p^2 + 1) \frac{d\varphi}{dt} = p^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi,$$

$$\varepsilon \frac{dp}{dt} = - \frac{3ab^2 \beta_0'' p (p/q_0)^{2/3} (1 - q_0/p)}{2 + 3ab^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1)} + \varepsilon \frac{3p \sin 2\varphi \sin^2 \theta}{2 (2 + 3ab^2 \beta_0'' (\eta/\mu - 1))},$$

где  $\varepsilon = K\mu/G$  — параметр, характеризующий отношение гидродинамических сил к силам внутренней упругости частицы;  $\theta$  и  $\varphi$  — углы сферической системы координат  $n_1 = n \cos \varphi \sin \theta$ ,  $n_2 = n \sin \varphi \sin \theta$ ,  $n_3 = n \cos \theta$ ; масштаб времени равен  $1/K$ .

Рассмотрим случай  $\varepsilon < 1$ . Полагаем, что в некоторый момент времени  $t = 0$  в процессе движения эллипсоидальная частица проходит свое недеформированное состояние, т. е.

$$(2.3) \quad p = q_0, \varphi = \varphi^0, \theta = \theta^0 \text{ при } t = 0,$$

где  $\varphi^0$  и  $\theta^0$  — неизвестные углы, характеризующие угловое положение частицы в момент  $t = 0$  при  $p = q_0$ .

Система (2.2), описывающая ориентацию и деформацию взвешенной частицы, при  $\varepsilon = 0$  имеет периодическое решение  $p_0, \varphi_0, \theta_0$ :

$$(2.4) \quad p_0 = q_0, \operatorname{tg} \varphi_0 = q_0 \operatorname{tg} (tq_0/(q_0^2 + 1)), \operatorname{tg} \theta_0 = Cq_0/(q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{1/2}$$

( $C = \operatorname{tg} \theta^0$  — константа). Решение (2.4) дает движение жесткой эллипсоидальной частицы и совпадает с решением, найденным в [3]. Конец полуоси вращения жесткой частицы совершает относительно ее центра инерции периодическое движение по одной из орбит. Орбиты расположены на поверхности сферы и образуют однопараметрическое семейство, характеризующее параметром  $C$ , названным в [3] константой орбиты. В [11] показано, что общее решение систем уравнений типа (2.2) представимо в виде асимптотических рядов по степеням  $\varepsilon$ .

Полагаем

$$(2.5) \quad p = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m p_m, \quad \theta = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \theta_m, \quad \varphi = \varphi^0 + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_m, \quad \varphi^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_m^0.$$

Начальные условия для  $p_m, \theta_m$  и  $\varphi_m$ :

$$(2.6) \quad p_i = 0, \theta_i = 0, \varphi_i = \varphi_i^0 \text{ при } i \geq 1, p_0 = q_0, \theta_0 = \theta^0, \varphi_0 = 0.$$

Выполняя обычные преобразования, можно получить системы уравнений для определения  $p_i, \varphi_i$  и  $\theta_i$ . Причем уравнения для определения  $\varphi_i$  и  $\theta_i$  будут дифференциальными, а уравнения для  $p_i$  вследствие сингулярности исходных уравнений (2.2) — алгебраическими. Значения неизвестных углов  $\varphi_i^0$  находим таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (2.6) для  $p_i$ .

Нулевые члены разложений (2.5) представлены соотношениями (2.4). Первые члены разложений имеют вид

$$(2.7) \quad p_1 = \frac{C^2 q_0^2}{2 (ab^2 \beta_0')_0} \frac{\sin 2\varphi_0}{(C^2 q_0^2 + q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{(q_0^2 - 1)(ab^2\beta_0'')_0} \left[ \frac{(2C^2q_0^2 + q_0^2 + 1)(q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)}{C^2(q_0^4 - 1)} \times \right. \\ \left. \times \ln \left| \frac{C^2q_0^2 + q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0}{(C^2 + 1)(q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)} \right| - \sin^2 \varphi_0 \right] - \frac{q_0^2 - 1}{q_0^2} \varphi_1^0 \sin^2 \varphi_0, \\ \theta_1 = A \frac{(q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{1/2}}{C^2q_0^2 + q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0}, \quad A = \frac{q_0^2(C^2(q_0^2 + 1) + 2)}{C(ab^2\beta_0'')_0(q_0^2 - 1)^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{q_0} \right) - \\ - \frac{2q_0(C^2q_0^2 + 1)^{1/2}(C^2 + 1)^{1/2}}{C(ab^2\beta_0'')_0(q_0^2 - 1)^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{(C^2q_0^2 + 1)^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0}{(C^2 + 1)^{1/2} q_0} \right) + \\ + \frac{C(q_0^2 + (q_0^2 - 1)^2 \varphi_1^0 (ab^2\beta_0'')_0)}{2(ab^2\beta_0'')_0(q_0^2 - 1)q_0} \sin 2\varphi_0 + \frac{q_0(2C^2q_0^2 + q_0^2 + 1)}{2C(ab^2\beta_0'')_0(q_0^4 - 1)} \times \\ \times \sin 2\varphi_0 \ln \left| \frac{C^2q_0^2 + q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0}{(C^2 + 1)(q_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)} \right|, \quad \varphi_1^0 = \frac{q_0^2}{q_0^2 + 1} \frac{2 + 3(ab^2\beta_0'')_0(\eta/\mu - 1)}{3(ab^2\beta_0'')_0}$$

$(ab^2\beta_0'')_0$  — значение функции  $ab^2\beta_0''$  при  $p = q_0$ . В случае, если взвешенная вязкоупругая частица в недеформированном состоянии сферической формы, т. е.  $q_0 = 1$ , то

$$p_1 = \frac{15C^2}{8(C^2 + 1)} \sin 2\varphi_0, \quad \varphi_1 = \frac{15C^2}{32(C^2 + 1)} \sin 2\varphi_0, \\ \theta_1 = \frac{15C^3}{16(C^2 + 1)^2} \left( \varphi_0 - \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right), \quad \varphi_1^0 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\mu} - 1 \right).$$

Приближения высшего порядка по  $\varepsilon$  можно получить аналогично.

Как следует из (2.4) и (2.7), деформация и ориентация взвешенной частицы происходят таким образом, что конец полуоси вращения частицы относительно ее центра инерции совершает периодическое движение по одной из бесконечного однопараметрического семейства замкнутых орбит, характеризующихся  $C$ . Однопараметрическое семейство орбит расположено на поверхности трехосного эллипсоида, геометрия и ориентация которого зависят от скорости сдвига, внутренних свойств материала частицы и вязкости жидкости. Угол  $\varphi^0$  характеризует ориентацию данного трехосного эллипсоида орбит относительно системы координат, начало ее связано с центром инерции взвешенной частицы.

В случае, когда взвешенная частица в недеформированном состоянии является сферой, данные результаты совпадают с решениями [6].

**3. Реологическое поведение суспензии.** Для определения реологического поведения суспензии необходимо найти функцию распределения по угловым положениям и длинам полуоси вращения частиц, удовлетворяющую уравнению (1.2). Так как в процессе движения в течении простого сдвига конец полуоси вращения частицы находится на поверхности трехосного эллипсоида орбит, то для определения функции  $F$  удобно перейти к гауссовым координатам  $(C, \tau)$  на поверхности эллипсоида орбит. Переход от сферической системы координат  $(n, \theta, \varphi)$  к гауссовым координатам  $(C, \tau)$  осуществляется по формулам

$$n = Z(C, \tau), \quad \varphi = \varphi(C, \tau), \quad \theta = \theta(C, \tau),$$

где  $Z = ab^2p^{2/3}$ ;  $\tau = q_0t/(q_0^2 + 1)$ ;  $p, \varphi$  и  $\theta$  — решения уравнений движения частицы, получаемые из (2.4), (2.5) и (2.7).

Уравнение (1.2) для определения стационарного распределения взвешенных частиц в ориентационном и деформационном пространствах в простом сдвиговом течении (2.1) с учетом (1.3) и (1.4) имеет вид

$$(3.1) \quad \operatorname{div}(F\mathbf{n}) + \operatorname{div}(kT(\lambda_4 - \lambda_5)(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} F)\mathbf{n}) + \operatorname{div}(kT\lambda_4 n^2 \operatorname{grad} F) = 0.$$

Здесь последние два члена характеризуют влияние броуновского движе-

ния на поведение микроструктуры суспензии;  $\mathbf{n}$  может изменяться только под действием гидродинамических сил:  $\dot{n}_i = \omega_{ij}n_j + \lambda_1 n_i + \lambda_2 d_{km}n_k n_m n_i + \lambda_3 d_{ij}n_j$ . Функция  $F$  должна удовлетворять условию нормировки на единицу.

В случае относительно крупных частиц, когда влиянием броуновского движения частиц на реологическое поведение суспензии, а значит, и двумя последними членами в (3.1) можно пренебречь, уравнение (3.1) в гауссовой системе координат  $(C, \tau)$  имеет вид

$$(3.2) \quad (\partial/\partial\tau)(F\sqrt{a}) = 0,$$

где  $a = \det(a_{ij})$ ;  $a_{ij}$  — метрический тензор криволинейной неортогональной системы координат  $(C, \tau)$  на поверхности трехосного эллипсоида орбит:

$$a_{11} = Z_C^2 + Z^2(\theta_C^2 + \sin^2 \theta_{\varphi_C}), \quad a_{22} = Z_\tau^2 + Z^2(\theta_\tau^2 + \sin^2 \theta_{\varphi_\tau}), \\ a_{12} = a_{21} = Z_C Z_\tau + Z^2(\theta_C \theta_\tau + \sin^2 \theta_{\varphi_C} \theta_{\varphi_\tau});$$

индексы  $C$  и  $\tau$  означают дифференцирование соответствующей функции по этим переменным.

Решение (3.2) находится с точностью до неизвестной функции  $f(C)$ , характеризующей распределение взвешенных частиц по орбитам:

$$(3.3) \quad F(C, \tau) = f(C)/\sqrt{a}.$$

Для определения  $f(C)$  будем полагать, что существует слабое броуновское движение, которое не влияет на реологические свойства суспензии. Но действие сил, обусловленных слабым броуновским движением частиц, в пределе длительного промежутка времени приводит к некоторому установившемуся распределению частиц по орбитам. Проинтегрируем (3.1) по некоторой односвязной области  $\sigma$ , принадлежащей поверхности эллипсоида орбит, применяя формулу Грина [12] для перехода от поверхностного интеграла к интегралу по замкнутой кривой  $L$ , ограничивающей  $\sigma$ , и учитывая, что  $(\mathbf{n} \cdot \text{grad } F) = 0$ , получим

$$(3.4) \quad \int_L (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) F dl + \int_L kT\lambda_4 n^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad } F) dl = 0$$

( $\boldsymbol{\alpha}$  — внешняя нормаль к  $L$ , расположенная в касательной плоскости к эллипсоиду орбит).

Выберем односвязную область  $\sigma$  таким образом, чтобы кривая  $L$  являлась орбитой, характеризуемой константой  $C$ . Тогда с учетом  $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) = 0$  (3.4) имеет вид

$$\int_C \lambda_4 n^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad } F) dl = 0$$

$$\text{или} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 Z^2 a_{22}}{a} d\tau \frac{df}{dC} + \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 Z^2}{\sqrt{a}} \left[ a_{22} \frac{\partial}{\partial C} (a^{-1/2}) - a_{12} \frac{\partial}{\partial \tau} (a^{-1/2}) \right] a_{11} f(C) = 0,$$

решение которого запишем как

$$(3.5) \quad f(C) = \text{const} \cdot \exp \left\{ - \int_0^C \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 Z^2}{\sqrt{a}} \left( a_{22} \frac{\partial}{\partial C} (a^{-1/2}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - a_{12} \frac{\partial}{\partial \tau} (a^{-1/2}) \right) d\tau \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_4 Z^2 a_{22}}{a} d\tau \right] dC \right\}.$$

Константа в (3.5) определяется из условия нормировки функции  $F(C, \tau)$  на единицу:

$$\int_0^\infty f(C) dC = \frac{1}{4\pi}.$$

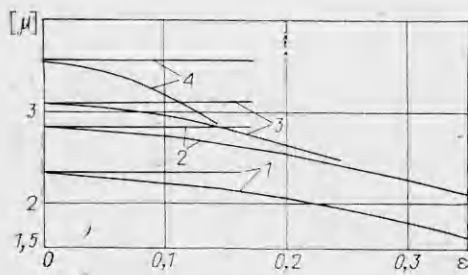


Рис. 1

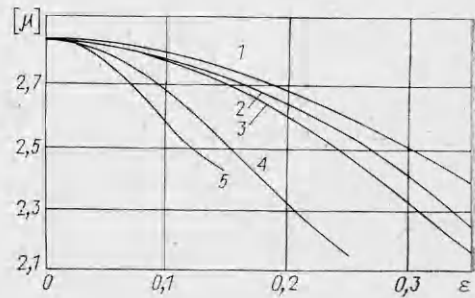


Рис. 2

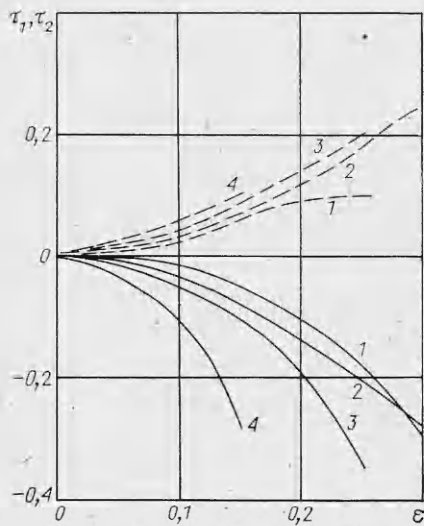


Рис. 3

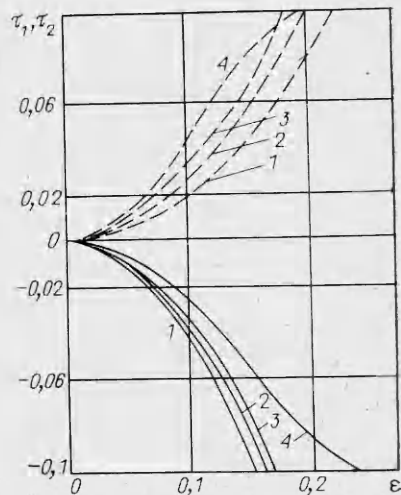


Рис. 4

Осреднение любого значения  $\gamma(C, \tau)$ , входящего в реологические уравнения состояния (1.1), производится следующим образом:

$$\langle \gamma(C, \tau) \rangle = 2 \int_0^{\infty} f(C) \int_0^{2\pi} \gamma(C, \tau) d\tau dC.$$

При  $\varepsilon = 0$  функция  $F(C, \tau)$  совпадает с функцией распределения жестких относительно крупных эллипсоидальных частиц при сдвиговом течении суспензии [8, 9].

На рис. 1—4 даны результаты расчетов реологических характеристик разбавленной суспензии относительно крупных деформируемых частиц от безразмерной скорости сдвига  $\varepsilon = K\mu/G$ , проведенных на основании изложенной выше теории.

На рис. 1 и 2 показаны зависимости характеристической вязкости суспензии

$$(3.6) \quad [\mu] = \lim_{V \rightarrow 0} (\mu_a - \mu) / \mu V$$

от  $\varepsilon$  при различных значениях параметров микроструктуры. В (3.6)  $\mu_a$  — эффективная вязкость суспензии. Так, на рис. 1 кривые 1—4 рассчитаны при  $\eta/\mu = 2$  и  $q_0 = 0,5$ ; 2; 3; 5, прямые линии 1—4 отвечают характеристической вязкости разбавленной суспензии относительно крупных жестких частиц при таких же  $q_0$ , как и у соответствующих кривых. На рис. 2 кривые 1—5 рассчитаны при  $q_0 = 2$  и  $\eta/\mu = 1$ ; 1,5; 2; 6; 11.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости безразмерных разностей нормальных напряжений  $\tau_1 = (T_{xx} - T_{zz})/GV$ ,  $\tau_2 = (T_{yy} - T_{zz})/GV$  от  $\varepsilon$



( $\tau_1$  — сплошные линии, а  $\tau_2$  — штриховые). На рис. 3 кривые 1—4 отвечают  $\eta/\mu = 2$  и  $q_0 = 0,5; 2; 3; 5$ . Кривые 1—4 рис. 4 получены при  $q_0 = 2$  и  $\eta/\mu = 1; 1,5; 2; 6$ .

Результаты расчетов, приведенные на рисунках, показывают, что разбавленная суспензия относительно крупных деформируемых частиц (в отличие от разбавленной суспензии с относительно крупными жесткими частицами) в течении простого сдвига имеет неньютоновское поведение — наличие разностей нормальных напряжений, зависимость реологических характеристик (эффективной вязкости суспензии и разностей нормальных напряжений) от скорости сдвига. Проявление аномальных свойств разбавленной суспензии существенным образом зависит от внутренней вязкости и упругости материала частицы и вязкости дисперсионной среды.

При осуществлении предельного перехода в представленной теории к случаю суспензии твердых сфер характеристическая вязкость суспензии равна 2,5, что совпадает с известной формулой Эйнштейна для вязкости разбавленной суспензии жестких сфер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бегоулев П. Б., Шмаков Ю. И. Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами // ИФЖ.— 1972.— № 23.
2. Придатченко Ю. В., Шмаков Ю. И. Влияние внутренней вязкости и упругости эллипсоидальных макромолекул на реологическое поведение разбавленных растворов полимеров. Реологические уравнения состояния // ПМТФ.— 1976.— № 3.
3. Jeffery G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc.— 1922.— V. A102, N 715.
4. Einsenschtz R. Der Einfluss der Brownschen Bewegung auf die Viscosität von Suspensionen // Z. Phys. Chem.— 1933.— Bd A163, N 2.
5. Cerf R. Recherches théoriques et expérimentales sur l'effect Maxwell des solutions de macromolécules déformables // J. de Chém. Phys.— 1951.— V. 48, N 1.
6. Roscoe R. On the rheology of a suspension of viscoelastic spheres in a viscous liquid // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 28, N 2.
7. Mason S. G., Manley R. St. L. Particle motion in sheared suspensions orientations and interactions of rigid rods // Proc. Roy. Soc.— 1956.— V. A238, N 1212.
8. Hinch E. J., Leal L. G. The effect of Brownian motion on the rheological properties of a suspension of non-spherical particles // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 52, N 4.
9. Leal L. G., Hinch E. J. The effect of weak Brownian rotations on particles in shear flow // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 46, N 4.
10. Покровский В. Н. Статистическая механика разбавленных суспензий.— М.: Наука, 1978.
11. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
12. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике.— М.: Физматгиз, 1963.

г. Киев

Поступила 27/VII 1988 г.

УДК 532,5

Ю. А. Березин, В. П. Жуков

### КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДЕ СО СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В работах Моисеева, Сагдеева, Тура и др. (см. [1] и цитированную там литературу) выдвинута идея, получены соответствующие уравнения и проанализирована возможность генерации крупномасштабных структур при конвективном движении жидкости на фоне развитой спиральной турбулентности, которая однородна, изотропна, но не обладает отражательной инвариантностью. В рамках такой модели случайные возмущения усиливаются, что может привести к возникновению крупных вихрей. Эта ситуация изучена в [1] на примере подогреваемого снизу плоскопараллельного слоя несжимаемой жидкости при схематических (упрощенных) граничных условиях, допу-