

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ В КАНАЛЕ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

А. Б. Ватажин

(Москва)

Исследованию краевых, или «концевых» эффектов в канале магнитогидродинамического генератора при перетекании тока из зоны магнитного поля в область, где величина вектора поля уменьшается до нуля, посвящены работы [1-6]. В одной части этих работ рассматривается течение электропроводной среды в канале либо между стенками-изоляторами, либо между стенками с бесконечными электродами. Учет конечной длины электродов произведен в работах [3-6]. В статье [3] рассматривается решение для случая магнитного поля, бесконечно далеко выходящего за область электродов с условием разделения электрического заряда на бесконечности, и для случая произвольно заданного поля, сосредоточенного только на электроде. Решение задачи для любого распределения магнитного поля изучается в работе [4], где приведены выражения для снимаемой на внешней нагрузке мощности. Подробно рассмотрен случай произвольного ступенчатого задания магнитного поля. В статье [5] сообщаются результаты решения задачи для магнитного поля, постоянного на электродах и спадающего вне электродной зоны по экспоненциальному закону, а также случай постоянного поля, сосредоточенного только на электроде. Статья [6] содержит подробное изложение решения этих задач, а также исследование случая постоянного поля, обрывающегося на некотором расстоянии за электродами.

В перечисленных работах [3-6] сделан ряд упрощающих предположений: рассматривается плоское течение, магнитные числа Рейнольдса предполагаются меньшими единицы, скорость и электропроводность среды считаются постоянными. Общему рассмотрению возможных упрощенных моделей течения среды и описывающих их уравнений посвящена статья [7].

Ниже рассматривается определение джоулевой диссипации при течении газа с переменной электропроводностью в канале со стенками — изоляторами (§ 1). На основании рассмотрения простейших случаев (§ 3—5) задания магнитного поля при течения среды с постоянной электропроводностью в канале с конечными электродами предлагается простая схема определения джоулевой диссипации и эффективности генератора, дающая также возможность приближенно учесть изменение электропроводности по длине канала (§ 6). Приводится решение задачи о распределении электрических величин в канале при косинусоидальном профиле скорости (§ 8, 9).

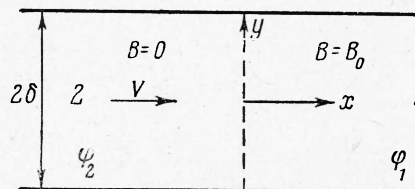
§ 1. Рассмотрим плоский канал  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\delta < y < \delta$  с диэлектрическими стенками, по которому течет электропроводная жидкость — обладающая скоростью  $\mathbf{v} = (V, 0, 0)$ ,  $V = \text{const}$  (фиг. 1). Внешнее магнитное поле  $\mathbf{B} = (0, 0, -B(x))$  задается в виде

$$B(x) = \begin{cases} B_0 & \text{при } x > 0 \text{ (область 1)} \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ (область 2)} \end{cases}$$

Изменение электропроводности среды  $\sigma$  в канале будем учитывать, предполагая, что проводимость в области магнитного поля постоянна, а в области 2 изменяется по экспоненциальной зависимости

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } x > 0 \\ \sigma_2 \exp \chi x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Величины  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\chi$  предполагаются постоянными, причем выполнение равенства  $\sigma_1 = \sigma_2$  является необязательным. Условие  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , например, может реализоваться при введении в поток через стенки канала в плоскости  $x = 0$  легкоионизируемого вещества, способного повысить электропроводность среды.



Фиг. 1

Предполагая, что течение плоское, а магнитные числа Рейнольдса намного меньше единицы, уравнения для распределения потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и компонент вектора плотности электрического тока  $j_{xk}, j_{yk}$  ( $k = 1, 2$ ) можно представить в виде: для области 1

$$j_{x1} = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad j_{y1} = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\sigma_1}{c} VB_0, \quad \Delta \varphi_1 = 0 \quad (1.1)$$

для области 2

$$j_{x2} = -\sigma_2 \exp(\chi x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad j_{y2} = -\sigma_2 \exp(\chi x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \Delta \varphi_2 = -\chi \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (1.2)$$

Запишем граничные условия: при  $x = \infty$  происходит разделение электрического заряда и токи равны нулю; при  $x = -\infty$  токи отсутствуют в силу равенства нулю магнитного поля. На стенках канала всюду обращается в нуль поперечная компонента вектора электрического тока. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{c} VB_0 \quad (x > 0, y = \pm \delta) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{c} VB_0 \quad (x = \infty, -\delta \leq y \leq +\delta) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad (x < 0, y = \pm \delta) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad (x = -\infty, -\delta \leq y \leq +\delta) \quad (1.6)$$

Решения для областей 1 и 2 должны соединяться между собой условиями на линии  $x = 0$ , следующими из непрерывности нормальной к линии раздела компоненты тока  $j_x$  и касательной  $y$ -компоненты вектора электрического поля. Эти условия записываются в виде

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (x = 0, -\delta \leq y \leq +\delta) \quad (1.7)$$

Решение систем уравнений (1.1) и (1.2) с условиями (1.3) — (1.7) можно получить методом разделения переменных. Опуская выкладки, приводим окончательные выражения для потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \frac{y}{c} VB_0 + \frac{2\sigma_2}{c\delta} VB_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \alpha_\nu \sin(r_\nu y) \exp(-r_\nu x)}{r_\nu^2 (\sigma_1 r_\nu + \sigma_2 \alpha_\nu)} \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{2\sigma_1}{c\delta} VB_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \sin(r_\nu y) \exp(\alpha_\nu x)}{r_\nu (\sigma_1 r_\nu + \sigma_2 \alpha_\nu)} \\ r_\nu &= \frac{\pi}{2\delta} (2\nu - 1), \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2} (\sqrt{\chi^2 + 4r_\nu^2} - \chi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Определим полную джоулеву диссипацию в канале, которую обозначим  $Q$ . Имеем

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dx dy = 2\sigma_2 \int_0^{\delta} \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \exp \chi x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \exp \chi x \right) \right] dx dy + \\ &+ 2\sigma_1 \int_0^{\delta} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\varphi_1}{c} VB_0 \right) + \frac{1}{c} VB_0 \left( \frac{1}{c} VB_0 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned}$$

Переходя от интегралов по площади к интегралам вдоль контура канала, используя условия (1.3) — (1.6) и учитывая, что  $\varphi_1(x, 0) = \varphi_2(x, 0)$ , получаем

$$Q = 2 \int_0^\delta \left[ \sigma_2 \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \sigma_1 \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{x=0} dy + \frac{2\sigma_1}{c} VB_0 \int_0^\infty \left[ \frac{\delta}{c} VB_0 - \varphi_1(\delta, x) \right] dx$$

Так как с каждой стороны от линии раздела  $x = 0$  функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  непрерывно дифференцируемы,

$$\varphi_1(0, 0) = \varphi_2(0, 0), \quad (\partial \varphi_1 / \partial y)_{x=0} = (\partial \varphi_2 / \partial y)_{x=0}$$

для любого  $y$ , то на линии раздела

$$\varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y)$$

Используя еще условие (1.7), получим

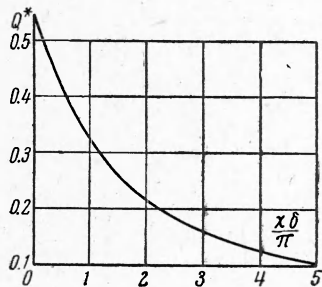
$$Q = \frac{8\sigma_1 \mathcal{E}^2}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2 \{2\nu-1 + [\chi\delta/\pi + \sqrt{\chi^2\delta^2/\pi^2 + (2\nu-1)^2}] (\sigma_1/\sigma_2)\}} \quad (1.9)$$

$$\left( \mathcal{E} = \frac{2\delta}{c} VB_0 \right)$$

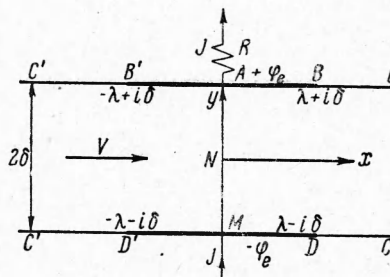
Рассмотрим частные случаи. Если  $\sigma_1 = \sigma_2$  и  $\chi = 0$ , то электропроводность всюду в канале постоянна, а величина  $Q$  равна

$$Q_c = \frac{4\sigma_1}{\pi^3} \Sigma \mathcal{E}^2 \quad \left( \Sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^3} = 1.052 \right) \quad (1.10)$$

Формула (1.10) ранее была получена в работе [1], в которой рассматривалась задача с постоянной электропроводностью, но не обязательно малыми числами Рейнольдса.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если  $\chi = 0$ , но  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , то электропроводности в областях 1 и 2 постоянны, но отличаются одна от другой. Для этого случая из (1.9) находим

$$Q = \frac{8 \Sigma \mathcal{E}^2 \sigma_1 \sigma_2}{\pi^3 (\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (1.11)$$

Если за величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  принять средние значения электропроводностей соответственно в зоне магнитного поля и зоне входа (или выхода) из поля, то формула (1.11) дает возможность приближенно рассчитать диссипацию при изменении электропроводности в канале. Из формулы (1.11) следует, что с уменьшением электропроводности в зоне входа (области 2) величина диссипации монотонно убывает, обращаясь при  $\sigma_2 = 0$  в нуль. При  $\sigma_2 = 0$  ток не перетекает в область 2, а в области 1 происходит разделение электрического заряда и  $j = 0$ . Аналогичное снижение величины диссипации наблюдается при уменьшении величины  $\sigma_1$ . С уменьшением  $\sigma_1$  область 1 начинает хуже проводить электрический ток и диссипация в ней уменьшается. При этом снижается интенсивность перетекания токов в область 2. В самой же области 2 токи не возникают, так как магнитное поле в ней равно нулю. В предельном случае  $\sigma_1 = 0$  токи равны нулю всюду в канале.

На фиг. 2 приведена зависимость диссипации  $Q^* = 4Q/\sigma_1 \mathcal{E}^2$ , рассчитанной по формуле (1.9) при  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Функция  $Q^*$  монотонно убывает с ростом аргумента  $\chi\delta/\pi$  от  $Q^* = 16.832/\pi^3$  при  $\chi = 0$  до  $Q^* = 0$  при  $\chi = \infty$ .

§ 2. Рассмотрим концевые потери в канале магнитогидродинамического генератора с конечными электродами. Пусть газ с постоянными проводимостью  $\sigma$  и продольной скоростью  $V$  движется в плоском канале  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\delta < y < +\delta$ , средняя часть стенок которого представляет собой симметричные электроды  $B'B$  и  $D'D$  длины  $2\lambda$ , соединенные нагрузкой  $R$ , а остальная часть стенок — изоляторы. В результате взаимодействия среды с внешним магнитным полем

$$\mathbf{B} = (0, 0 - B(x)), B(x) \geq 0, B(x) = B(-x), B(\pm\infty) = 0$$

между электродами создается разность потенциала  $2\varphi_e$ , а на внешней нагрузке течет ток  $J$  и выделяется мощность  $N = J^2 R$  (фиг. 3).

При малых магнитных числах Рейнольдса распределение токов и потенциала удовлетворяет следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} j_x &= -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & j_y &= -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\sigma}{c} VB, & \Delta \varphi &= 0 \\ \varphi(x, \pm\delta) &= \pm \varphi_e & (-\lambda \leq x \leq \lambda), & & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{c} VB(x) & (\lambda < |x| < \infty) \\ j_x(\pm\infty, y) &= 0, & j_y(\pm\infty, y) &= 0, & R \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, \delta) dx &= 2\varphi_e. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система (2.1) для произвольной зависимости магнитного поля была решена в работе [4]. В ней приведены также формулы и графики, позволяющие рассчитать ток  $J$ , мощность  $N$  и разность потенциала  $2\varphi_e$  в зависимости от параметров газа, геометрии канала и внешней нагрузки  $R$ .

Приведем теперь выражение для джоулевой диссипации  $Q$  в канале генератора, представляющей собой разность между работой электропроводного газа в единицу времени, совершаемой им против электромагнитной силы, и мощностью, снимаемой на внешней нагрузке генератора. Величина  $Q$  определяется формулой

$$Q = -2\varphi_e J + \frac{4\sigma}{c} V \int_0^{\lambda} B \left( \frac{\delta}{c} VB - \varphi_e \right) dx + \frac{4\sigma}{c} V \int_{\lambda}^{\infty} B \left( \frac{\delta}{c} VB - \varphi(x, \delta) \right) dx.$$

Для расчета диссипации в формулу (2.2) необходимо подставить полученные из системы (2.1) выражения для  $\varphi_e$ ,  $N$  и  $\varphi(x, \delta)$ .

Эффективность (к. п. д.) генератора определяется отношением мощности, снимаемой на внешней нагрузке, к сумме снимаемой мощности и джоулевой диссипации

$$\eta = \frac{N}{N + Q} \quad (2.3)$$

Ниже для простейших случаев задания магнитного поля приводятся величины эффективности  $\eta$  и джоулевой диссипации  $Q$  в канале генератора.

§ 3. Рассмотрим случай постоянного магнитного поля  $B_0$ , бесконечно далеко выходящего за область электродов. Будем считать, что на бесконечности ( $x = \pm\infty$ ) происходит разделение электрического заряда, т. е. не будем учитывать бесконечно удаленные от электродной зоны области входа и выхода из магнитного поля. Рассматриваемая задача была решена в работе [3]. Выражения для мощности, диссипации и к. п. д. генератора, обозначенные соответственно через  $N_\infty$ ,  $Q_\infty$  и  $\eta_\infty$ , имеют вид

$$N_\infty = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 R \alpha^{*2}}{(1 + R\sigma \alpha^{*2})}, \quad Q_\infty = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \alpha^*}{(1 + R\sigma \alpha^{*2})}, \quad \eta_\infty = \frac{R\sigma \alpha^*}{1 + R\sigma \alpha^*} \quad \left( \mathcal{E} = \frac{2\delta}{c} VB_0 \right) \quad (3.1)$$

Функция  $\alpha^*$ , равная отношению полных эллиптических интегралов первого рода

$$\alpha^* = K(k') / K(k), \quad k^2 + k'^2 = 1, \quad k^{-1} = ch(\pi\lambda / 2\delta) \quad (3.2)$$

монотонно возрастает от нуля до бесконечности при изменении от нуля до бесконечности своего аргумента  $\lambda/\delta$ . При малых  $\lambda/\delta$  она представляется в виде

$$\alpha^* = \frac{\pi}{2} \ln^{-1} \left( \frac{8\delta}{\pi\lambda} \right) - \frac{\pi}{24} \left( \frac{\pi\lambda}{2\delta} \right)^2 \ln^{-2} \left( \frac{8\delta}{\pi\lambda} \right) + O \left[ \left( \frac{\pi\lambda}{2\delta} \right)^4 \ln^{-2} \left( \frac{8\delta}{\pi\lambda} \right) \right] \quad (3.3)$$

При больших  $\lambda/\delta$

$$\alpha^* = \frac{2 \ln 2}{\pi} + \frac{\lambda}{\delta} - \frac{1}{4\pi} \exp \left( -\frac{2\pi\lambda}{\delta} \right) + O \left[ \exp \left( -\frac{3\pi\lambda}{\delta} \right) \right] \quad (3.4)$$

Как следует из (3.4), этой формулой можно пользоваться, начиная с  $\lambda/\delta = 0.3$ . График зависимости  $\alpha^*$  приведен в работе [4].

Выражения (3.1) показывают, что формулы

$$N = N' = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 R \sigma (\lambda/\delta)^2}{[1 + R \sigma (\lambda/\delta)]^2}, \quad Q = Q' = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 (\lambda/\delta)}{[1 + R \sigma (\lambda/\delta)]^2}, \quad \eta = \eta' = \frac{R \sigma (\lambda/\delta)}{1 + R \sigma (\lambda/\delta)} \quad (3.5)$$

по которым рассчитываются характеристики генератора без учета искривлений линий тока, когда внутреннее сопротивление определяется величиной  $\delta/\sigma\lambda$ , остаются в силе, если  $\delta/\sigma\lambda$  заменить эффективным внутренним сопротивлением  $1/\sigma\alpha^*$ .

Легко убедиться, что справедливы неравенства  $N' \leq N_\infty$ ,  $\eta' \leq \eta_\infty$ , показывающие, что расчет характеристик генератора по формулам (3.5) в случае, когда поле далеко выходит за область электродов и не учитываются концевые эффекты, приводит к заниженным значениям  $N$  и  $\eta$ .

График зависимости  $\eta_\infty$  от  $R\sigma$  при различных  $\lambda/\delta$  приведен на фиг. 4. При  $R\sigma = \infty$  в канале происходит разделение электрического заряда и  $\eta_\infty = 1$ .

В формулах (3.1) сопротивление  $R$  и величины  $N$ ,  $J$ ,  $Q$  соответствуют каналу с равным единице размером вдоль направления магнитного поля. Если же высота канала равна  $a$ , то во всех формулах величина  $R$  должна замениться величиной  $aRa$ , где  $Ra$  — полное сопротивление нагрузки; величины мощности тока и диссипации определяются выражениями  $aN$ ,  $aJ$ ,  $aQ$ .

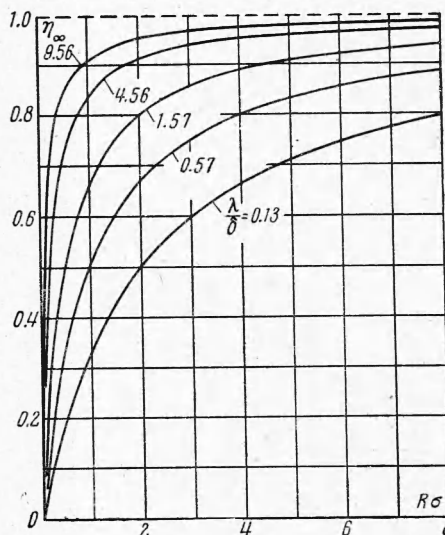
**§ 4.** Пусть магнитное поле произвольным образом распределено по длине электродов и равно нулю на изоляторах. Решение для такого распределения магнитного поля было получено в работе [3]. Выражения для мощности, диссипации и к. п. д. генератора, обозначенных соответственно через  $N_\lambda$ ,  $Q_\lambda$  и  $\eta_\lambda$ , имеют вид

$$N_\lambda = \frac{\sigma V^2 R \sigma}{c^2 (1 + R \sigma \alpha^*)} \beta_1^2 \quad \left( \beta_1 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} B dx \right)$$

$$Q_\lambda = \frac{2\sigma \delta V^2}{c^2} \left[ \beta_2 - \frac{R \sigma (2 + R \sigma \alpha^*)}{2\delta (1 + R \sigma \alpha^*)^2} \beta_1^2 \right] \quad \left( \beta_2 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} B^2 dx \right)$$

$$\eta_\lambda = \frac{R \sigma \beta_1^2}{(1 + R \sigma \alpha^*) [2\delta (1 + R \sigma \alpha^*) \beta_2 - R \sigma \beta_1^2]} \quad (4.1)$$

При помощи неравенства Коши — Буняковского легко показать, что  $2\lambda\beta_2 \geq \beta_1^2$ , причем знак равенства достигается только при  $B = \text{const}$ . Таким образом, максимальная величина  $\eta_\lambda$  реализуется при постоянном магнитном поле и при этом не зависит от его интенсивности. Величина же снимаемой мощности с ростом величины поля возрастает.



Фиг. 4



Характеристики генератора  $N_{\lambda_0}$ ,  $Q_{\lambda_0}$ ,  $\eta_{\lambda_0}$ , соответствующие случаю постоянного магнитного поля  $B_0$ , даются выражениями

$$\begin{aligned} N_{\lambda_0} &= \frac{\sigma \mathcal{E}^2 R \sigma}{(1 + R\sigma\alpha^*)^2} \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2 & \left(\mathcal{E} = \frac{2\delta}{c} V B_0\right) \\ Q_{\lambda_0} &= \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \lambda [1 + R\sigma(2 + R\sigma\alpha^*)(\alpha^* - (\lambda/\delta))]}{\delta(1 + R\sigma\alpha^*)^2} \\ \eta_{\lambda_0} &= \frac{R\sigma\lambda}{\delta(1 + R\sigma\alpha^*)[1 + R\sigma(\alpha^* - (\lambda/\delta))]} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Зависимость величины  $N_{\lambda_0}$  от  $\lambda/\delta$  при различных значениях  $2\varphi_e/\mathcal{E}$  исследовалась в работе [6]. Следует, однако, заметить, что задание в качестве определяющего параметра отношения  $2\varphi_e/\mathcal{E}$ , а не  $R$ , оказывается не всегда удобным. В режиме генерирования электроэнергии разность потенциала между электродами, в отличие от двигательного режима, является величиной не задаваемой, а определяемой в результате решения задачи. Поэтому, например, для задачи с постоянным полем, сосредоточенным только на электродах, всегда выполняется неравенство  $2\delta\alpha^*\varphi_e < \mathcal{E}\lambda$ . Если же  $\lambda\mathcal{E} < 2\delta\alpha^*\varphi_e < \delta\alpha^*\mathcal{E}$ , то мощность и соответствующее сопротивление делаются отрицательными (фиг. 1 работы [6]), что лишено физического смысла.

Рассмотрим предельные случаи большой и малой длины электродов. Так при  $(\lambda/\delta) \rightarrow 0$  мощность, диссипация и к. п. д. генератора монотонно убывают до нуля. Аналогичным образом ведут себя величины  $N'$ ,  $Q'$ ,  $\eta'$ .

При  $\lambda/\delta = \infty$  имеем

$$\begin{aligned} N' = N_{\lambda_0} &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}, & \varphi_{e\lambda_0} &= \frac{1}{2} \mathcal{E}, & Q' &= 0, & Q_{\lambda_0} &= \frac{2 \ln 2 \sigma \mathcal{E}^2}{\pi} \\ \eta' &= 1, & \eta_{\lambda_0} &= \frac{\pi}{\pi + R\sigma 2 \ln 2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Диссипацию  $Q_{\lambda_0}$  вызывает концевое перетекание тока в зону, свободную от магнитного поля. Ее можно найти из решения следующей задачи. В канале, стенки которого при  $-\infty < x < 0$  представляют собой изоляторы, а при  $0 < x < +\infty$  — бесконечные электроды, покоится электропроводная жидкость. К электродам подводится разность потенциалов  $\mathcal{E}$ . Вблизи линии  $x = 0$  течение токов будет аналогично их течению у конца длинного электрода в генераторе. Нетрудно найти разность диссипаций, определенных с учетом и без учета концевого эффекта. Эта разность равна величине  $0.5 Q_{\lambda_0}$ .

Рассмотрим влияние внешнего сопротивления на характеристики генератора. При  $R\sigma = 0$  имеем  $N_{\lambda_0} = N' = 0$ ,  $\eta_{\lambda_0} = \eta' = 0$ ,  $Q_{\lambda_0} = Q' = \lambda\sigma\mathcal{E}^2/\delta$ . С ростом  $R\sigma$  от нуля до бесконечности диссипация в канале монотонно убывает от  $\lambda\sigma\mathcal{E}^2/\delta$  до  $\lambda\sigma\mathcal{E}^2(\delta\alpha^* - \lambda)/\alpha^*\delta^2$ . Мощность сначала возрастает, достигая максимума

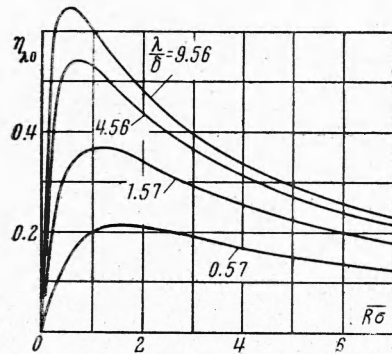
$\sigma\mathcal{E}^2\lambda^2/4\alpha^*\delta^2$  при  $R\sigma\alpha^* = 1$ , а затем убывает до нуля;  $\eta_{\lambda_0}$  также сначала возрастает, достигает максимума  $\lambda/(2\alpha^*\delta - \lambda + 2\sqrt{\alpha^*\delta(\alpha^*\delta - \lambda)})$  при  $R\sigma = \delta/\sqrt{\alpha^*\delta(\alpha^*\delta - \lambda)}$  и затем убывает до нуля.

Уменьшение  $\eta_{\lambda_0}$  при больших  $R\sigma$  объясняется концевым перетеканием тока из электродной зоны. График функции  $\eta_{\lambda_0}$  от  $R\sigma$  при различных  $\lambda/\delta$  приведен на фиг. 5.

Отметим следующие неравенства:

$$\eta_{\lambda} \leq \eta_{\lambda_0} \leq \eta' \leq \eta_{\infty}$$

Знак равенства в первом неравенстве имеет место только при  $B = \text{const}$ , во втором — при  $\lambda/\delta = 0$  или  $R\sigma = 0$ , в третьем — при выполнении одного из четырех равенств  $\lambda/\delta = 0$ ,  $R\sigma = 0$ ,  $\lambda\delta = \infty$ ,  $R\sigma = \infty$ .



Фиг. 5

§ 5. Рассмотрим следующую зависимость  $B(x)$ :

$$B(x) = \begin{cases} B_0 = \text{const} & \text{при } 0 \leq |x| \leq x_1, \quad x_1 \geq \lambda \\ 0 & \text{при } |x| > x_1 \end{cases}$$

Мощность, ток и разность потенциалов между электродами для случая такого распределения поля, которые соответственно будем обозначать  $N_k, J_k, 2\varphi_{ek}$ , были определены в работах [4, 6]. Они даются формулами

$$\varphi_{ek} = \frac{\mathcal{E}K\sigma}{\pi(1+R\sigma\alpha^*)} \left( \frac{\lambda\pi}{2\delta} + \psi\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \right), \quad N_k = \frac{4\varphi_{ek}^2}{R}, \quad J_k = \frac{2\varphi_{ek}}{R}$$

$$\psi(1) = 0, \quad \psi(\infty) = \frac{\pi(\alpha^*\delta - \lambda)}{2\delta} \quad (5.1)$$

Выражения для функции  $\psi(x_1/\lambda)$  и ее графики приведены в статье [4]. С ростом протяженности магнитного поля мощность, ток и разность потенциалов монотонно возрастают от величин  $N_{\lambda_0}, J_{\lambda_0}, 2\varphi_{e\lambda_0}$  при  $x_1/\lambda = 1$ , до  $N_\infty, J_\infty, 2\varphi_{e\infty}$  при  $x_1/\lambda = \infty$ . Максимальная величина мощности достигается при  $R\sigma\alpha^* = 1$ , т. е. при равенстве внешнего и эффективного внутреннего сопротивлений. Остановимся теперь на расчете джоулевой диссипации  $Q_k$ .

Для случая длинных электродов в работе [6] была вычислена величина  $(Q_k + N_k)/2\delta V$  и построены зависимости  $\eta_k$  от  $2\varphi_e/\mathcal{E}$  при ряде значений параметра  $\lambda/\delta$ . Остановимся более подробно на вычислении диссипации  $Q_k$  при большом выносе магнитного поля за электроды. Общее выражение для  $Q_k$  имеет вид

$$Q_k = (\mathcal{E} - 2\varphi_{ek})J_k + \frac{1}{\pi^5} 4\sigma\mathcal{E}^2 I_1 + \frac{1}{\pi^2} 4\sigma\mathcal{E}^2 I_2 q$$

$$I_1 = \int_{\tau_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \int_{\tau}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{\mu^2 - 1} + \sqrt{\tau_1^2 - 1}}{\sqrt{\mu^2 - 1} - \sqrt{\tau_1^2 - 1}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2}}$$

$$I_2 = \int_{\tau_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - 1)(\mu^2 - k^2)}}, \quad \tau_1 = kch \frac{\pi x_1}{2\delta} \quad (5.2)$$

$$q = \frac{2}{\pi K(1+R\sigma\alpha^*)} \left( \int_0^k \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{\tau_1^2-1}} \frac{d\tau}{\sqrt{k^2-\tau^2}} + \right.$$

$$\left. + R\sigma \int_k^1 \text{arc tg} \sqrt{\frac{1-\tau^2}{\tau_1^2-1}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-k^2}} \right) - \frac{\pi}{2K(1+R\sigma\alpha^*)}$$

Используя (5.2), можно показать, что для  $\tau_1 > 1$  при любых отношениях  $\lambda/\delta$  справедливы формулы

$$\frac{Q_k}{\sigma\mathcal{E}^2} = \frac{\alpha^*}{(1+R\sigma\alpha^*)^2} + \frac{8\sigma}{\pi^3} - \frac{4}{\pi K\tau_1(1+R\sigma\alpha^*)^2} + \frac{m}{\tau_1^2} - \frac{2+8k^2}{9\pi K\tau_1^3(1+R\sigma\alpha^*)^2} +$$

$$+ \frac{m_1}{\tau_1^4} - \frac{9+16k^2+64k^4}{150\pi K\tau_1^5(1+R\sigma\alpha^*)^2} + O\left(\frac{1}{\tau_1^6}\right) \quad (5.3)$$

$$m = \frac{2k^2-4}{\pi^3} + \frac{8E}{\pi^3 K} - \frac{4R\sigma(2+R\sigma\alpha^*)}{\pi^2 K^2(1+R\sigma\alpha^*)^2}$$

$$m_1 = \frac{9k^4-10-8k^2}{9\pi^3} + \frac{8EK(1+4k^2)+8K^2k'^2}{9\pi^3 K^2} - \frac{4R\sigma(1+4k^2)(2+R\sigma\alpha^*)}{9\pi^2 K^2(1+R\sigma\alpha^*)^2}$$

В том же приближении

$$N_k = \frac{\sigma^2 \alpha^{*2} R \gamma}{(1 + R \sigma \alpha^*)^2} \left[ 1 - \frac{4}{\pi K' \tau_1} + \frac{4}{\pi^2 K'^2 \tau_1^2} - \frac{2 + 8k^2}{9\pi K' \tau_1^3} + \frac{4 + 16k^2}{9\pi^2 K'^2 \tau_1^4} - \frac{9 + 16k^2 + 64k^4}{150\pi K' \tau_1^5} + O\left(\frac{1}{\tau_1^6}\right) \right] \quad (5.4)$$

В формулах (5.2), (5.3) величина  $\Sigma$  определяется выражением (1.10),  $k$  и  $k'$  — выражением (3.2),  $K' = K(k')$ , а  $E$  представляет собой полный эллиптический интеграл второго рода.

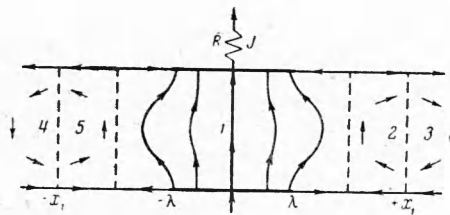
Формулами (5.3), (5.4) практически можно пользоваться и при небольших отношениях  $x_1/\lambda$ . В самом деле, если  $\lambda/\delta = 0.99$ , то значению  $x_1/\lambda = 1.32$  соответствует  $\tau_1 = 1.6$ , если  $\lambda/\delta = 3.02$ , то при  $x_1/\lambda = 1.14$  уже имеем  $\tau_1 = 1.94$ .

Рассмотрим предельный случай  $x_1/\lambda = \infty$  ( $\tau_1 = \infty$ ). Соответствующие ему характеристики генератора будем снабжать индексом  $k \infty$ . Из (5.3) получаем

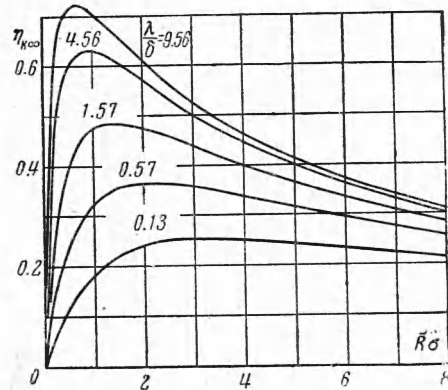
$$N_{k\infty} = N_\infty, \quad Q_{k\infty} = Q_\infty + 2Q_c$$

$$\eta_{k\infty} = \frac{\pi^3 R \sigma \alpha^{*2}}{(1 + R \sigma \alpha^*) [\pi^3 \alpha^{*2} + 8\Sigma(1 + R \sigma \alpha^*)]} \quad (5.5)$$

Напомним, что диссипация  $Q_\infty$  находится из решения задачи для магнитного поля, бесконечно далеко выходящего за область электродов, но с условием разделения заряда на бесконечности (§ 3), а диссипация  $Q_c$  — из решения задачи для канала со стенками-изоляторами, — магнитное поле в котором равно нулю в одной половине канала и постоянно в другой (§ 1).



Фиг. 6



Фиг. 7

Соотношения (5.4) показывают, что при больших  $x_1/\lambda$  схема распределения токов в канале близка к следующей. В области 1 (фиг. 6) распределение токов дается решением задачи § 3. Мощность на внешней нагрузке, которая обусловлена токами, протекающими только по этой области, и диссипация в области 1 определяются формулами (3.1). К каждой из областей 2 + 3 и 4 + 5 применимо решение § 1. Эти области создают концевые токи, не принимающие участия в создании полезной мощности, и вызывают потери. Диссипация в каждой из них равна величине  $Q_c$ .

Необходимые для реализации описанной схемы отношения  $x_1/\lambda$  практически не очень велики. Уже вынос магнитного поля в каждую сторону от электродов на величину  $\lambda$  при  $\lambda/\delta > 1$  с большой степенью точности дает возможность пользоваться формулами (5.4). Действительно, например, при  $\lambda/\delta = 2.58$  и  $x_1/\lambda = 1.75$  имеем  $\tau_1 = 20$ , а при  $\lambda/\delta = 2.58$  и  $x_1/\lambda = 2.17$  получаем  $\tau_1 = 100$ . Быстрый переход к предельной схеме распределения токов объясняется быстрым уменьшением (по экспоненциальной зависимости) величины тока за электродной зоной в задаче § 3 и в зоне магнитного поля в задаче § 1.

С ростом отношения  $x_1/\lambda$  величина  $\eta_k$  монотонно возрастает, достигая значения  $\eta_{k\infty}$  при  $x_1/\lambda = \infty$ . Таким образом, удлинение зоны магнитного поля приводит, с одной стороны, к увеличению снимаемой мощности, а с другой стороны, к росту эффективности  $\eta$ . Зависимость величины  $\eta_{k\infty}$  от  $R\sigma$  приведена на фиг. 7.



§ 6. Рассмотренная выше схема распределения тока в канале генератора при большом выносе магнитного поля позволяет приближенно определить характеристики генератора в случае переменной электропроводности. Пусть, например, в областях 1—5 средние электропроводности соответственно равны  $\sigma_v$  ( $v = 1, \dots, 5$ ). Тогда, на основании § 5 и формул (1.11) и (3.1), получаем ( $\Sigma = 1.052$ ).

$$N = \frac{\sigma_1 \mathcal{E}^2 R \sigma_1 \alpha^{*2}}{(1 + R \sigma_1 \alpha^*)^2}, \quad Q = \frac{\sigma_1 \mathcal{E}^2 \alpha^*}{(1 + R \sigma_1 \alpha^*)^2} + \frac{8 \Sigma \mathcal{E}^2}{\pi^3} \left( \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3} + \frac{\sigma_4 \sigma_5}{\sigma_4 + \sigma_5} \right), \quad \eta = \frac{N}{N + Q}$$

В случае, если электропроводность вне зоны магнитного поля равна нулю ( $\sigma_3 = \sigma_4 = 0$ ), генератор имеет оптимальные характеристики  $N = N_\infty$  и  $\eta = \eta_\infty$ . Аналогичным образом можно учесть изменение электропроводности по экспоненциальной зависимости.

§ 7. Оценим влияние изменения скорости на величины снимаемой мощности и джоулевой диссипации в канале генератора. Пусть электропроводность среды постоянна, магнитное поле сосредоточено только на длине электродов, а скорость задается произвольной функцией  $V(x)$ . Обобщая решение работы [3] на случай  $V \neq \text{const}$ , без труда получим

$$N = \frac{\sigma^2 R}{c^2 (1 + R \sigma \alpha^*)^2} \beta_3 \quad \left( \beta_3 = \left( \int_{-\lambda}^{+\lambda} V B dx \right)^2 \right)$$

$$\eta = \frac{R \sigma \beta_3}{(1 + R \sigma \alpha^*) [2\delta (1 + R \sigma \alpha^*) \beta_4 - R \sigma \beta_3]} \quad \left( \beta_4 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} V^2 B^2 dx \right) \quad (7.1)$$

При помощи неравенства Коши — Буняковского легко показать, что максимальная величина  $\eta$  достигается при  $V(x) B(x) = \text{const}$ ,  $-\lambda \leq x \leq \lambda$ . Таким образом, если  $B = \text{const}$  и сравниваются два течения с  $V_1 \equiv \text{const}$  и  $V_2 \geq V_1$ , то при скорости  $V_2$  снимается большая мощность, но с меньшей эффективностью.

Как следует из формулы (7.1), на характеристики генератора оказывает влияние изменение скорости только на длине электродов.

§ 8. Определим джоулеву диссипацию в случае косинусоидального профиля скорости. Предположим, что скорость жидкости определяется зависимостью  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ ,  $v = v_0 \cos(\pi y / 2\delta)$ . (Указанное распределение скорости не очень сильно отличается от пуазейлевского.) Пусть стенки канала представляют собой диэлектрики, магнитное поле выражается в виде  $\mathbf{B} = (0, 0, -B(x))$ ,  $B(x) \geq 0$ ,  $B(\pm \infty) = 0$ , а электропроводность среды постоянна. При малых магнитных числах Рейнольдса распределение токов в канале определяется из решения системы (8.1)

$$j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\sigma v_0}{c} B \cos \frac{\pi y}{2\delta}, \quad \Delta \varphi = -\frac{\pi v_0}{2\delta c} B \sin \frac{\pi y}{2\delta}$$

$$j_x(\pm \infty, y) = 0, \quad j_y(\pm \infty, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (\infty < x < +\infty, y = \pm \delta)$$

Нетрудно убедиться, что решение системы (8.1) имеет следующий вид:

$$j_x = \frac{\pi \sigma v_0}{2c} B_0 \sin \frac{\pi y}{2\delta} \beta'(\xi), \quad j_y = \frac{\sigma v_0}{c} B_0 \cos \frac{\pi y}{2\delta} \beta''(\xi)$$

$$\varphi = -\frac{\pi v_0 \delta}{2c} B_0 \sin \frac{\pi y}{2\delta} \beta(\xi) \quad (8.2)$$

$$\beta(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[ \exp\left(\frac{1}{2} \pi \xi\right) \int_{\infty}^{\xi} f(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \pi \xi\right) d\xi - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{1}{2} \pi \xi\right) \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi) \exp\left(\frac{1}{2} \pi \xi\right) d\xi \right], \quad B(x) = B_0 f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\delta}$$

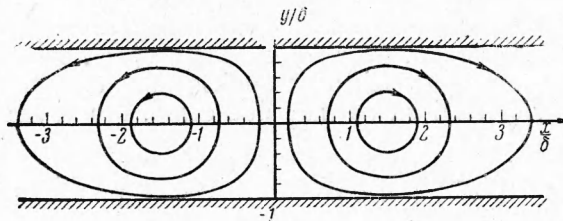
Семейство линий тока определяется выражением

$$y = \frac{2\delta}{\pi} \arccos \left( \frac{1}{\beta'} C \right) \quad (8.3)$$

Здесь  $C$  — параметр семейства, а джоулева диссипация  $Q$  рассчитывается по формуле

$$Q = \frac{\sigma v_0^2 \delta^2}{c^2} B_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f \beta' d\xi \quad (8.4)$$

Рассмотрим простейшие распределения магнитного поля по длине канала. Пусть поле постоянно на участке  $-a \leq x \leq +a$ , уменьшается до нуля по линейной зависимости на участках  $-b \leq x \leq -a$ ,  $a \leq x \leq b$  и равно нулю при  $|x| \geq b$ . Определение токов при помощи формулы (8.2)



Фиг. 8

производится элементарно. На фиг. 8 представлены некоторые линии тока, соответствующие указанному распределению магнитного поля при  $a/\delta = 1$ ,  $b/\delta = 2$ .

Рассмотрим теперь следующую зависимость:

$$B(x) = \begin{cases} B_0 \exp(p(x+a)/\delta) & (-\infty < x \leq -a) \\ B_0 & (-a \leq x \leq a) \\ B_0 \exp(-p(x-a)/\delta) & (a \leq x < +\infty) \end{cases} \quad (8.5)$$

Джоулева диссипация, рассчитанная при помощи выражений (8.2), (8.4) и (8.5), определяется простой формулой

$$Q = \frac{2\sigma\delta^2 v_0^2}{\pi c^2} B_0^2 \left[ \frac{p}{p+0.5\pi} - \frac{p^2 \exp(-\pi a/\delta)}{(p+0.5\pi)^2} \right] \quad (8.6)$$

Исследуем предельные случаи задания поля по зависимости (8.5). Если поле постоянно по всей длине канала ( $p = 0$ ), то из формулы (8.6) следует, что  $Q = 0$ . В канале происходит разделение электрического заряда и токи обращаются в нуль.

При бесконечно удлиненном участке постоянного поля ( $a = \infty$ ) получаем

$$Q = \frac{2\sigma v_0^2 \delta^2 p B_0^2}{\pi c^2 (p+0.5\pi)} \quad (8.7)$$

Половина этой величины, очевидно, представляет собой диссипацию в канале при задании магнитного поля в виде

$$B(x) = \begin{cases} B_0 & (-\infty < x < 0) \\ B_0 \exp(-px/\delta) & (0 < x < \infty) \end{cases} \quad (8.8)$$

Как следует из формулы (8.7), с ростом скорости уменьшения магнитного поля (с увеличением  $p$ ) диссипируемая в канале энергия монотонно возрастает от нуля при всюду постоянном поле ( $p = 0$ ) до величины  $2\sigma v_0^2 \delta^2 B_0^2 / \pi c^2$ , соответствующей обрыву магнитного поля ( $p = \infty$ ).

Если участок постоянного поля равен нулю ( $a = 0$ ), то при  $p = 0,5\pi$  зависимость  $Q$  имеет максимум  $\sigma v_0^2 \delta^2 B_0^2 / 2\pi c^2$ . Как при  $p = 0$ , так и при  $p = \infty$ , диссипируемая энергия равна нулю вследствие разделения электрического заряда в первом случае и вследствие равенства нулю длины зоны магнитного поля — во втором.

§ 9. Исследуем характеристики магнитогидродинамического генератора с двумя электродами длины  $2\lambda$  при косинусоидальном профиле скорости. Будем предполагать, что зона постоянного магнитного поля значительно выходит за электродную зону. Тогда для расчета характеристик генератора можно использовать рассмотренную ранее (§ 5, 6) схему, согласно которой канал (фиг. 6) разделяется на области  $1$ ,  $2 + 3$  и  $4 + 5$ . Мощность и диссипация в области  $1$  определяются при помощи работы [3], в которой показано, что расчет интегральных характеристик в задаче § 3 при неоднородном профиле скорости производится по формулам, соответствующим однородному профилю, если величину скорости в последних рассматривать как среднюю по сечению. Таким образом для области  $1$  справедливы выражения

$$N = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \alpha^* R c}{(1 + R \sigma \alpha^*)^2}, \quad Q_1 = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \alpha^*}{(1 + R \sigma \alpha^*)^2} \quad \left( \mathcal{E} = \frac{4 \delta v_0}{\pi c} B_0 \right) \quad (9.1)$$

Диссипация в областях  $2 + 3$  и  $4 + 5$  при экспоненциально затухающем магнитном поле определяется формулами (8.7)

$$Q_{2+3} = \frac{\pi \sigma p_3 \mathcal{E}^2}{16 (p_3 + 0.5\pi)}, \quad Q_{4+5} = \frac{\pi \sigma p_4 \mathcal{E}^2}{16 (p_4 + 0.5\pi)} \quad (9.2)$$

Если магнитное поле симметрично, то  $Q_{2+3} = Q_{4+5}$ . Эффективность генератора в этом случае выражается в виде

$$\eta = \frac{8 R \sigma \alpha^* (p + 0.5\pi)}{(1 + R \sigma \alpha^*) [8 \alpha^* (p + 0.5\pi) + \pi (1 + R \sigma \alpha^*)]}$$

С уменьшением величины  $p$  эффективность генератора монотонно возрастает, достигая величины  $\eta_\infty$  при  $p = 0$ .

Автор благодарит своего руководителя Г. Г. Черного за внимание к работе.

Поступила 29 VI 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Boucher R. A., Ames D. B. End effect losses in *dc* magnetohydrodynamic generators. *J. Appl. Phys.*, 1961, 32, 5, 755—759.
2. Sutton G. W., Carlson A. W. End effects in inviscid flow in a magnetohydrodynamic channel. *J. Fluid Mech.*, 1961, 11, 1, 121—132.
3. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. *ПММ*, 1961, т. 25, вып. 5, стр. 845—850.
4. Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, 1962, № 1, стр. 52—58.
5. Sutton G. W. Design considerations of a magnetohydrodynamic electrical power generator. *Vistas Astronautics*, 1960, 3, 53—64 (N. Y. Soc. Automot. Engrs).
6. Sutton G. W., Hurwitz H. Jr., Poritsky H. Electrical and pressure losses in a magnetohydrodynamic channel due to end current loops. *Commun. and Electron.*, 1962, № 58, 687—695.
7. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. *ПММ*, 1962 т. 26, вып. 3.