

УДК 550.834

Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения

А.Ф. Матрюков

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: maf@omzg.ssc.ru

Матрюков А.Ф. Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 385–399.

В работе рассматривается решение двумерного волнового уравнения с использованием преобразования Лагерра. Получены оптимальные параметры разностной схемы для этого уравнения. Указаны численные значения этих оптимальных параметров. Разностные схемы 2-го порядка с оптимальными параметрами дают точность решения уравнений, близкую к точности решения по схеме 4-го порядка. Показано, что при использовании разложения Лагерра число оптимальных параметров в сравнении с разложением Фурье можно сократить. Это сокращение приводит к упрощению разностной схемы и сокращению объема вычислений, т. е. к эффективности алгоритма.

DOI: 10.15372/SJNM20160404

Ключевые слова: волновое уравнение, электромагнитные волны, конечно-разностный метод, оптимальный, точность, метод Лагерра, система линейных уравнений, итерации.

Mastryukov A.F. Optimal finite difference schemes for the wave equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 385–399.

This paper considers the solution of the two-dimensional wave equation with the use of the Laguerre transform. The optimal parameters of finite difference schemes for this equation have been obtained. Numerical values of these optimal parameters are specified. The finite difference schemes of second order with optimal parameters give the accuracy of the solution to the equations close to the accuracy of the solution by the scheme of fourth order. It is shown that using the Laguerre decomposition, the number of optimal parameters in comparison with the Fourier decomposition can be reduced. This reduction leads to simplification of finite difference schemes and to reduction of the number of computations, i.e. the efficiency of the algorithm.

Keywords: wave equation, electromagnetic wave, finite-difference, optimal, accuracy, Laguerre method, linear system of equations.

Данная статья была выполнена совместно с академиком Б.Г. Михайленко. Он принимал непосредственное участие на всех стадиях работы вплоть до написания текста статьи. Но обстоятельства сложились так, что в редакцию журнала эта статья поступила только, когда Б.Г. Михайленко уже не стало. По этой причине формально он отсутствует в числе авторов статьи, но фактически он один из ее авторов.

Введение

При численном решении волнового уравнения используются как конечно-разностные, так и спектральные методы. Каждый из них имеет свои преимущества. Конечно, разностный метод прост в программной реализации и экономичен [1, 2]. Спектральный

метод позволяет более эффективно решать задачи с некоторыми модельными видами зависимости параметров уравнений от времени [1–3], например в случае с релаксацией диэлектрической проницаемости, выраженной в интегральной форме, которая при спектральном преобразовании сводится к простым алгебраическим выражениям [1–5]. При этом число уравнений, описывающих релаксационные процессы, может сократиться.

Зачастую спектральный метод более удобен при решении обратных задач оптимизационным методом. Здесь более просто вычисляется градиент решения уравнений по искомым параметрам обратной задачи. Но градиент решения необходимо вычислить как можно точнее. Точности разностных схем 2-го порядка по шагу сетки может оказаться недостаточно, тогда надо использовать разностные схемы более высокого порядка, чем второй. Есть и другие задачи, требующие высокой точности решения. Разностные схемы 4-го порядка могут подойти для таких задач, но матрица системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводятся разностные уравнения, имеет большую плотность заполнения, и лента этой матрицы оказывается широкой, что ведет к плохой обусловленности [6] этой матрицы и соответственно потери численной эффективности всего алгоритма, а также к большому времени счета. Необходимы разностные схемы, имеющие высокую точность, малую плотность заполнения матрицы и более компактную, т. е. имеющую узкую ленту матрицы, систему линейных алгебраических уравнений или хотя бы одно, или два из трех свойств. Кроме этого, для разностных схем 4-го порядка существенно сложнее, чем для разностных схем 2-го порядка, удовлетворять условиям на границе области решения. Поэтому были разработаны разностные схемы 2-го порядка аппроксимации, имеющие повышенную точность. Это достигалось введением дополнительных параметров в разностную схему.

В работе [7] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармоники Фурье вводятся 3 дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в работе [8] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по 4-м параметрам.

В работах [9, 10] был предложен метод для решения волнового уравнения, основанный на разложении Лагерра по временной переменной. Он использовался и для решения уравнений Максвелла [11, 12]. Этот метод устойчив и достаточно эффективен.

Эффективность метода обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра. Левая часть этих уравнений не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Это можно использовать при построении численного алгоритма, что является существенным достоинством метода. Кроме того, система уравнений для гармоник всегда содержит только действительные переменные. В ряде задач этот метод по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье.

В настоящей работе рассматривается решение двумерного волнового уравнения с использованием преобразования Лагерра. Получены и приведены оптимальные параметры разностных схем для этих уравнений. Показано, что при использовании разложения Лагерра число оптимальных параметров в сравнении с разложением Фурье можно сократить. Это сокращение приводит к упрощению разностной схемы и сокращению объема вычислений. Проведены расчеты, показывающие, что разностная схема 2-го порядка аппроксимации с оптимальными параметрами дает точность решения волнового уравнения, близкую к точности решения по разностной схеме 4-го порядка аппроксимации.

1. Постановка задачи

Волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + f(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s), \quad (1)$$

где v — скорость волны. Такое уравнение описывает как распространение упругих волн, так и распространение электромагнитных волн. В первом случае H — это давление и v — скорость упругих волн, во втором случае H — это напряженность магнитного поля и v — скорость электромагнитных волн. Здесь (x_s, z_s) — точка расположения источника волн, $f(t)$ — форма источника во времени.

Будем рассматривать волновое уравнение более общего вида

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{S_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{S_z} \frac{\partial H}{\partial z} + f(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s) \quad (2)$$

в прямоугольной пространственной области и при нулевых начальных условиях:

$$H(x, z, t = 0) = 0, \quad \frac{\partial H(x, z, t = 0)}{\partial t} = 0.$$

Будем полагать, что величины v , S_x , S_z положительны и являются функциями координат x , z .

Применим к уравнению (2) преобразование Лагерра [9]:

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (3)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n + \alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht), \quad (4)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [13] степени n , α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

Опустив, для простоты, выражение для источника, получим уравнение для n -й гармоники Лагерра H_n :

$$\frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} H_n + \sum_{k=0}^{n-1} H_k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) H_k \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{S_x} \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{S_z} \frac{\partial H_n}{\partial z}. \quad (5)$$

Применив преобразование Лагерра (3), (4) к уравнению (1), получим выражение, совпадающее с этим при $S_x = 1$, $S_z = 1$. К такому же уравнению можно свести систему двумерных уравнений Максвелла с релаксацией электромагнитных параметров.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \vec{J}_s, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где \vec{H} — напряженность магнитного поля, \vec{E} — напряженность электрического поля, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ — электрическая индукция, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ — ток проводимости, \vec{J}_s — ток внешнего источника, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ — магнитная индукция. Здесь ε — статическое значение диэлектрической проницаемости, σ — статическое значение проводимости, μ — статическое значение магнитной проницаемости.

Уравнения Максвелла (6) в двумерном случае принимают вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x + J_x, \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + J_z. \quad (9)$$

Здесь J_x, J_z — x -я и z -я компоненты внешнего источника тока.

При нулевой проводимости $\sigma = 0$ эту систему можно свести к волновому уравнению вида (2) для H_y (y -й компоненты напряженности магнитного поля).

При низких частотах электромагнитного поля, когда ток проводимости много больше тока смещения, эту систему можно свести к уравнению диффузии.

Систему уравнений (7)–(9) будем использовать в тестовых расчетах для проверки точности оптимальных разностных схем для волнового уравнения.

Рассмотрим разностную аппроксимацию уравнения (5).

2. Аппроксимация уравнений

Определим магнитное поле $H_{i,j}$ в целых i, j узлах разностной сетки. Для тестов сравнения с системой уравнений (7)–(9) будем вычислять электрическое поле. Электрическое поле E_x определим в промежуточных точках разностной сетки $i + 1/2, j$, а электрическое поле E_z определим в промежуточных точках разностной сетки $i, j + 1/2$. Схема расположения узлов изображена на рисунке 1(а). Это сетка типа “staggered”, она хорошо центрирована [14, 15].

Запишем уравнение (5) в разностном виде, используя средние значения поля:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{H}_{i,j+1} - \bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j-1}}{S_{x,i,j+1/2} S_{x,i,j-1/2}} + \frac{\bar{H}_{i+1,j} - \bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i,j} - \bar{H}_{i-1,j}}{S_{z,i+1/2,j} S_{z,i-1/2,j}} \\ & \quad \frac{\quad}{\Delta x^2} + \frac{\quad}{\Delta z^2} \\ & = \frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} \langle H_n \rangle + \sum_{m=0}^{n-1} \langle H_m \rangle + \sum_{m=0}^{n-1} (n-1-m) \langle H_m \rangle \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь у гармоники магнитного поля $H_{ni,j}$ опущен нижний индекс y и индекс n , а гармоники магнитного поля в правой части уравнения системы заменены средним по 9-ти точкам [7]:

$$\begin{aligned} \langle H_k \rangle &= c H_{i,j} + d (H_{i,j+1} + H_{i,j-1} + H_{i+1,j} + H_{i-1,j}) \\ & \quad + e (H_{i+1,j+1} + H_{i+1,j-1} + H_{i-1,j+1} + H_{i-1,j-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

где c, d, e — весовые множители, удовлетворяющие соотношениям:

$$c + 4d + 4e = 1, \quad e = \frac{1 - c - 4d}{4}.$$

В правой части соотношения (11) у магнитного поля опущен номер гармоники k , где $k = [0, n]$.

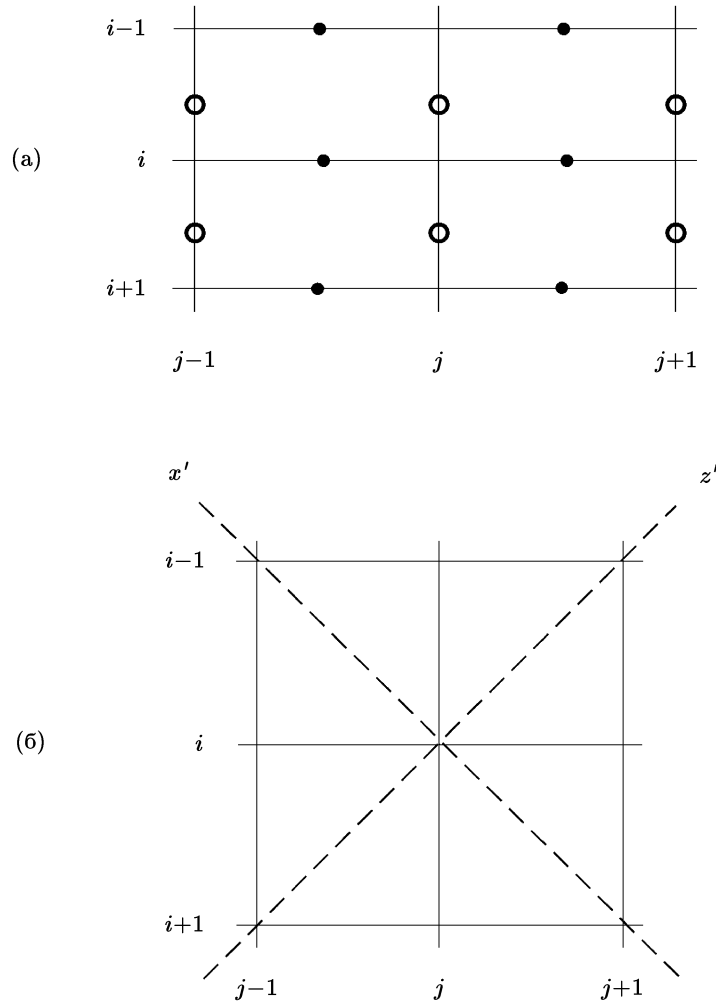


Рис. 1. (а) — разностная сетка “staggered”, (б) — разностная сетка, с повернутой на 45° системой координат

В разностных производных по z использованы средние значения [8] вида

$$\bar{H}_{k,j} = \frac{1-\beta}{2}H_{k,j+1} + \beta H_{k,j} + \frac{1-\beta}{2}H_{k,j-1}, \quad k = i+1, i, i-1, \quad (12)$$

в разностных производных по x использованы средние значения вида

$$\bar{H}_{i,k} = \frac{1-\alpha}{2}H_{i+1,k} + \alpha H_{i,k} + \frac{1-\alpha}{2}H_{i-1,k}, \quad k = j+1, j, j-1. \quad (13)$$

В правых частях выражений (12), (13) для простоты опущен номер гармоники n .

Значения гармоник электрического поля E_x, E_z будем вычислять, применяя соответствующие разностные аналоги уравнений (8) и (9), где в пространственных производных также будем использовать средние значения поля $\bar{H}_{i,j}$.

Такая аппроксимация допускает неравные шаги разностной схемы по пространственным координатам, однако наиболее интересный — это случай равных шагов. В этом

случае $\alpha = \beta$ и остается три параметра, для которых надо определить оптимальные значения для точности решения уравнений. Это разностная схема второго порядка точности по шагу сетки. Подберем введенные параметры α, β, c, d, e таким образом, чтобы такая аппроксимация была оптимальной для точности решения уравнений.

Отметим, что здесь есть две группы параметров. Одна группа — это параметры α, β , вторая группа — это c, d, e . Каждая из этих групп используется для аппроксимации по одним и тем же 9-ти точкам разностной схемы. Поэтому можно строить оптимальные разностные схемы, используя только часть параметров из каждой группы, например параметры α, β и параметр c . Уменьшение числа параметров, в каких-то случаях, может давать более глубокую оптимизацию.

3. Выбор оптимальных параметров

Для однородной среды уравнение (5) можно представить в виде уравнения Гельмгольца. Для нулевой гармоник магнитного поля $H = H_{0y}$, без учета источников, уравнение принимает простой вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = k_0^2 H, \quad (14)$$

где

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\varepsilon \frac{h}{2} \right).$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения магнитного поля, приведенные в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j})}{\Delta z^2} + \frac{(\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1})}{\Delta x^2} \\ & = k_0^2 \left(cH_{i,j} + d(H_{i,j+1} + H_{i,j-1} + H_{i+1,j} + H_{i-1,j}) + \right. \\ & \quad \left. e(H_{i+1,j+1} + H_{i+1,j-1} + H_{i-1,j+1} + H_{i-1,j-1}) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В случае равных шагов [7] эта схема переходит в схему, где разностные производные представляются в виде суммы разностных производных, записанных в обычных координатах x, z и координатах x', z' , повернутых на 45° , как это показано на рис. 1(б). Шаги разностной сетки в повернутой системе координат будут в $\sqrt{2}$ раза больше, чем у обычной сетки.

Уравнение (14) имеет точное решение

$$H = H_0 \operatorname{ch}(k_x x) \operatorname{ch}(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в разностное уравнение (15). После простых преобразований получим соотношение вида $V^2(\theta, k) = 1$, где

$$\begin{aligned} V^2(\theta, k) = & \left((1 - \alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) + \alpha \right) \left(\operatorname{ch}(k \sin \theta) - 1 \right) + \\ & \frac{r^2 \left((1 - \beta) \operatorname{ch}(k \sin \theta) + \beta \right) \left(\operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) - 1 \right)}{k^2 \left(\frac{c}{2} + d \left(\operatorname{ch}(k \sin \theta) + \operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) + 2e \operatorname{ch}(k \sin \theta) \operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$r = \Delta x / \Delta z, \quad k = k_0 \Delta x.$$

Будем искать параметры α, β, c, d, e , требуя максимального точного выполнения этого соотношения, т. е. соотношения $V^2(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ, k . Для этого будем минимизировать по параметрам α, β, c, d, e величину

$$I(r) = \int \int (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk. \quad (17)$$

Пределы интегрирования по углу $\theta = [0, \pi/2]$. Пределы интегрирования по второй переменной — от $k = 0$ до $k = 1.5$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать значения k , значительно больше единицы, не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Отметим, что значения так определяемых оптимальных параметров зависят только от одного параметра $r = \Delta x/\Delta z$, т. е. они являются универсальными для заданного соотношения шагов разностной схемы. Поэтому мы укажем значения оптимальных параметров.

В таблице 1 приведены оптимальные значения параметров α, β, c, d, e для разных значений величины $r = \Delta x/\Delta z$. Указаны значения оптимальных параметров для двух разных верхних пределов интегрирования по k в формуле (17).

Таблица 1.

α	β	c	d	e	r	K
0.84861	0.84861	0.66672	0.08618	-0.00287	1	1.0
0.86614	0.86614	0.67991	0.08296	-0.00294	1	1.5
0.50071	1.00161	0.65290	0.09288	-0.00611	1.5	1.0
0.50946	1.02130	0.66570	0.08961	-0.00604	1.5	1.5
0.32002	0.98008	0.62434	0.10727	-0.01336	2	1.0
0.32501	1.00006	0.63888	0.10325	-0.01298	2	1.5
0.23540	0.94627	0.58432	0.12731	-0.02339	2.5	1.0
0.23851	0.96570	0.60073	0.12240	-0.02258	2.5	1.5
0.19125	0.92122	0.53428	0.15234	-0.03591	3	1.0
0.19334	0.94010	0.55276	0.14639	-0.03458	3	1.5

Эти значения получены минимизацией величины $I(r)$ по искомым параметрам α, β, c, d методом сопряженных градиентов. Использование метода Ньютона приводит к изменению в 5-м знаке. Значение 5-го знака зависит и от величины начального приближения в этих методах минимизации. Это, как показали конкретные расчеты, несущественно. Достаточно учитывать четыре знака после запятой. Результаты практически совпадают.

В качестве начального приближения для искомым параметров брались значения $\alpha = 1, \beta = 1, c = 1, d = 0$. Эти значения соответствуют обычной разностной схеме 2-го порядка аппроксимации уравнения. Глубина оптимизации оценивалась по величине $I(r)$ относительно значения при этих начальных параметрах. Здесь она достигала значений 10^{-6} – 10^{-7} .

Минимальное значение величины $I(r)$ для заданного r зависит от величины верхнего предела интегрирования K по переменной k . Обычно оно достигается в промежутке между $K = 0.2$ и $K = 1$ в зависимости от r . Параметры α, β в этом промежутке меняются слабо, но изменения минимальной величины $I(r)$ могут достигать 10–20 раз.

При заданном верхнем пределе K с ростом r падают значения c , растут абсолютные значения d и e , значения e при этом всегда отрицательны. С ростом r минимальное значение $I(r)$, достигаемое в процедуре поиска оптимальных значений параметров α, β, c ,

d , монотонно падает, примерно в десять раз, при изменении r от 1 до 4. Малые значения $I(r)$ должны показывать лучшее приближение к точному решению, однако уже при $r = 3$ решение уравнения (2) с использованием оптимальных параметров оказывается неустойчивым.

Как показали конкретные расчеты уравнения (2), большие абсолютные значения параметра e соответствуют менее точному решению. Так при $r = 2.5$, $K = 1.5$, где $e = -0.02258$, разностная схема волнового уравнения оказывалась устойчивой, но при $r = 2.5$, $K = 1.0$, где $e = -0.02339$, разностная схема была неустойчива. Поэтому была рассмотрена разностная схема, где полагалось $e = 0$. Оптимальные значения искались при

$$e = 0, \quad d = \frac{1 - c}{4}. \quad (18)$$

В табл. 2 приведены значения, соответствующие этому случаю. Здесь при всех значениях r разностная схема была устойчива. С ростом r значительно меняются только α и β , значения c и d меняются слабо, только в третьем знаке после запятой. В отличие от предыдущего случая точка минимума величины $I(r)$ здесь слабо меняется при изменении верхнего предела интегрирования K и находится около значения $K = 0.25$. И само минимальное значение $I(r)$ при указанных в табл. 2 значениях r меняется в пределах 2-х раз и это значение всегда оказывается меньше, чем в случае, приведенном в табл. 1. То есть здесь достигается более глубокая степень оптимизации параметров.

Таблица 2.

α	β	c	d	r	K
0.84861	0.84655	0.67821	0.08044	1	1.0
0.49927	0.99836	0.67735	0.08066	1.5	1.0
0.31889	0.97558	0.67779	0.08055	2	1.0
0.23456	0.94105	0.67791	0.08052	2.5	1.0
0.19062	0.91559	0.67793	0.08051	3	1.0
0.16514	0.89803	0.67792	0.08051	3.5	1.0
0.14911	0.88578	0.67790	0.08052	4	1.0

Такой переход от 4-х оптимальных параметров к 3-м является важным отличием метода, основанного на разложении Лагерра, от метода, использующего разложение Фурье. Это преимущество метода Лагерра, т. к. при выборе $e = 0$ уменьшается на 15–20% плотность заполнения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из разностных уравнений. Соответственно на 15–20% сокращается число операций при умножении матрицы на вектор — основной операции при итерационных методах решения алгебраических уравнений.

Эти данные приведены для случая $r \geq 1$. Для случая $r = \Delta x / \Delta z \leq 1$ все получается аналогично предыдущему с заменой $k = k_0 \Delta z$, $r = \Delta z / \Delta x$. Получающиеся здесь значения полностью совпадают со значениями, приведенными в табл. 1 и табл. 2 при обмене значениями α и β .

На рис. 2 приведены графики функции $V(\theta, k)$ для 5-ти точечной неоптимальной схемы $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 0$ (штриховые линии) и для оптимальных параметров (сплошные линии) схемы при различных значениях угла θ в зависимости от величины k . Верхний рис. 2(а) получен при $r = 1.0$, нижний рис. 2(б) получен при $r = 2.5$. Оптимальные параметры соответствуют данным табл. 1.

Хорошо видно, что величина $V(\theta, k)$, показывающая погрешность решения, существенно меньше при оптимальных параметрах. Величина $V(\theta, k)$ при оптимальных па-

раметрах начинает сильно расти лишь при $k \geq 1$. До этого она мала. В данном масштабе рисунков графики при разных углах θ сливаются.

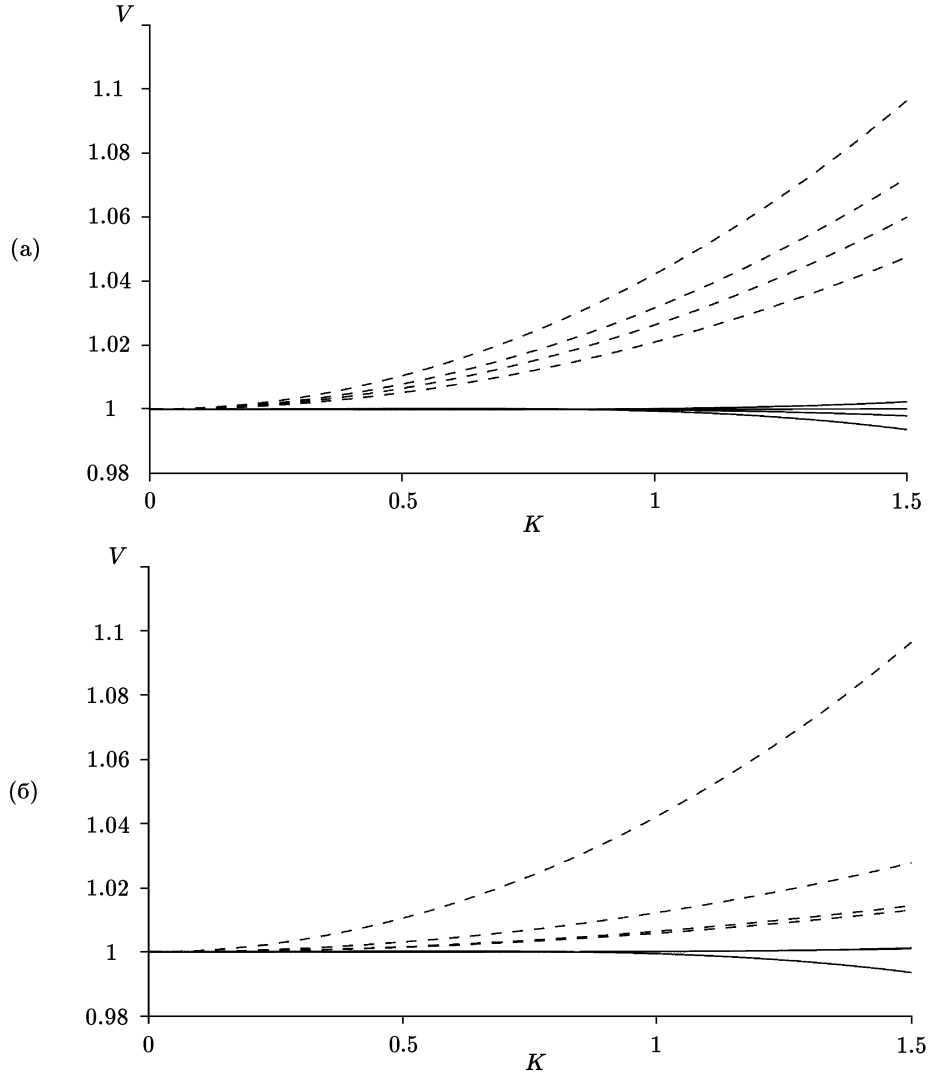


Рис. 2. Графики функции $V(\theta, k)$ при разных углах θ . Штриховая линия — 5-ти точечная схема, сплошная линия — оптимальная схема: (а) — при $r = 1$, (б) — при $r = 2.5$

4. Результаты численных расчетов.

Решение волнового уравнения (2), полученное с использованием оптимальных параметров, будем сравнивать с решением, полученным конечно-разностным методом 4-го порядка точности как по времени, так и по пространству. В этом случае система уравнений (7)–(9) заменой переменных сводилась к системе уравнений волнового типа:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{w}}{dt} &= f(t, \vec{v}), \quad \vec{w} = (H_y), \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= g(t, \vec{w}), \quad \vec{v} = \left(E_x \exp\left(\frac{\sigma t}{\varepsilon}\right), E_z \exp\left(\frac{\sigma t}{\varepsilon}\right) \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь пространственные производные находятся в правых частях, и уравнения записаны в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Запись уравнений в таком виде [16] позволяет строить разностные схемы высокого порядка точности по времени, как обычно это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие конечно-разностные методы относятся к числу наиболее точных и наиболее эффективных и универсальных.

Источник тока брался в виде

$$\begin{aligned} J_x &= f(t)\delta(z - z_s), \quad J_z = 0, \\ f(t) &= J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \end{aligned} \quad (20)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника. Решение рассматривалось в прямоугольной области размером, примерно равным 10^2 длин волн по обоим пространственным координатам. У границы области на расстоянии 1–2-х длин волн задавалось поглощение.

Коэффициент поглощения здесь брался экспоненциально растущим при приближении к границе области: от практически нулевых значений до значений, обеспечивающих падение амплитуды волны в 10–100 раз. Большой размер области решения и поглощение у границы практически исключают образование отраженной от границ волны.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением вида:

$$D(t) = \frac{\int_0^{\infty} |H_y(z, t) - H_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^{\infty} |H_{0y}(z, t)| dz}, \quad (21)$$

здесь H_y — численное решение, H_{0y} — решение уравнений (19) с использованием разностной схемы 4-го порядка точности либо точное аналитическое решение. Точность численного решения сравнивалась с аналитическим решением волнового уравнения (1) для однородного пространства. При сравнении аналитическое решение также вычислялось численно. Наиболее просто вычисляется решение в виде плоской волны. Оно содержит элементарную функцию, которая вычисляется с большой точностью

$$H(z, t) = F^{-1} \left\{ \frac{\exp(-ik|z - z_s|)}{2ik} F(f(t)) \right\}.$$

Решение в виде аксиальной волны [17] вычисляется сложнее, поскольку содержит функцию Ханкеля второго рода H_0^2 :

$$H(x, z, t) = i\pi F^{-1} \left\{ H_0^2 \left(k \sqrt{(z - z_s)^2 + (x - x_s)^2} \right) F(f(t)) \right\}. \quad (22)$$

Здесь $f(t)$ — форма источника во времени уравнения (1), k — волновой вектор Фурье гармоники, F и F^{-1} означают прямое и обратное преобразование Фурье соответственно.

Функция Ханкеля вычисляется в виде суммы элементарных функций, которая может вычисляться менее точно, чем просто одна элементарная функция, которая содержится в решении в виде плоской волны. Поэтому сравнение с решением в виде плоской волны более достоверно.

На рис. 3(a) показано распространение плоской волны от точечного источника в направлении z (H_y — компоненты поля) в однородной среде. Сплошная линия соответствует решению оптимальной разностной схемой, штрихованная линия соответствует решению обычной 5-ти точечной разностной схемой 2-го порядка. Видна существенная разница в решении двумя этими методами. Величина погрешности между ними, оцененная по формуле (21), составляет $D = 0.61$.

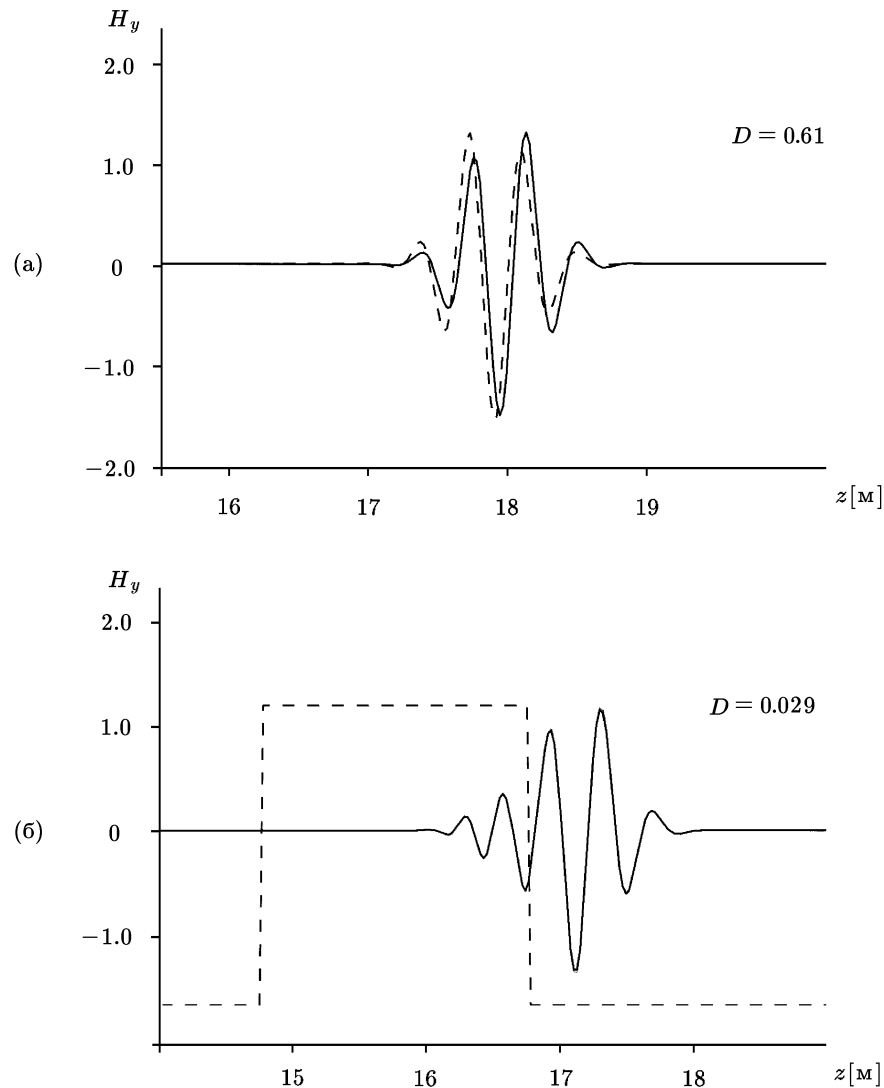


Рис. 3. Распространение импульса в однородной среде: расчет 5-ти точечной схемой — (а); распространение импульса в неоднородной среде: расчет оптимальной схемой — (б)

На этом же рисунке приведено точное аналитическое решение и решение разностной схемой 4-го порядка аппроксимации для уравнений (19). Они графически не различимы с решением оптимальной схемой. Относительная разница между решением оптимальной схемой и точным аналитическим решением со схемой 4-го порядка менее 1 %.

На рис. 4 показана величина погрешности численного решения $D(t/T)$ относительно точного решения, где $T = 1/f_0$ для варианта, отображенного на рис. 3(a). Погрешность решения обычной 5-ти точечной разностной схемой (кривая 1) быстро растет и в разы

превосходит погрешность решения оптимальной схемой уже после пробега расстояния в 4–5 длин волн. Погрешность решения оптимальной схемой (кривая 2) меняется очень слабо. Кривая 3 показывает погрешность решения оптимальной схемой относительно аналитического решения (22). Погрешность здесь выше, чем в случае плоской волны. Но она так очень слабо растет в сравнении с обычной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации.

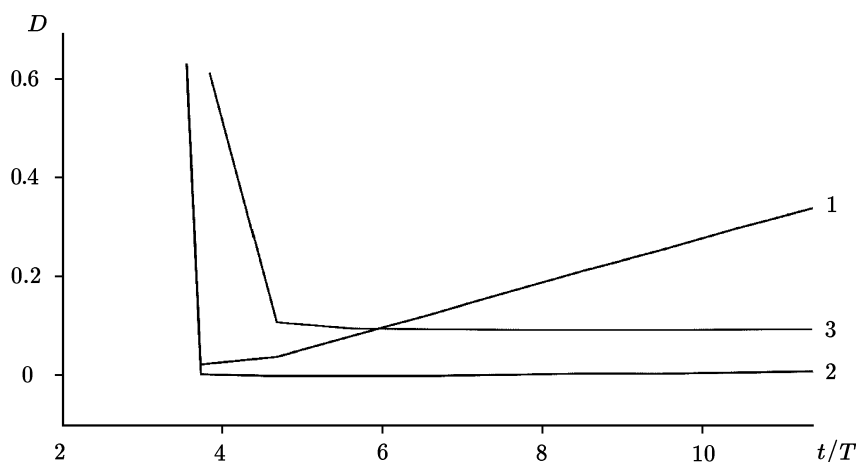


Рис. 4. Погрешность: кривая 1 — решение 5-ти точечной схемой; кривые 2 и 3 — решения оптимальной схемой

Это случай однородной среды, и оптимальные параметры также получены для однородной среды, поэтому близость результатов объяснима.

На рис. 3(б) приведено распространение волны в неоднородной среде. Показано (H_y — компонента поля) прохождение электромагнитного импульса через слой в однородном пространстве. Расположение слоя изображено штриховой линией. В слое диэлектрическая проницаемость в 2 раза больше, чем в окружающем однородном пространстве, проводимость также в 2 раза больше, чем в окружающем однородном пространстве.

Здесь, в случае неоднородной среды, изображено решение разностной схемой 4-го порядка точности и оптимальной схемой. Два решения также графически неотличимы. Величина погрешности между ними, оцененная по формуле (21), составляет $D = 0.029$, что в 20–25 раз меньше, чем разница с обычной 5-ти точечной схемой.

Проведенные расчеты показывают, что оптимальные схемы близки по точности к разностным схемам 4-го порядка аппроксимации.

Подобные тесты проведены при разных соотношениях шагов сетки $r = \Delta x / \Delta z$, разных параметрах сред и частоты источника. Показанные на рис. 3 графики получены при $r = 2.5$ после пробега импульсом, равным 10–12 длин волн. На длину волны приходится 8 шагов разностной сетки Δx , частота источника f_0 равна 200 МГц, физические параметры однородной среды соответствуют электромагнитным параметрам сырого песка.

Указана величина погрешности D . В преобразовании Лагерра использовались 310 гармоник Лагерра, параметры $\alpha = 1$, $h = 100$.

Оптимальная разностная схема использует 9 точек сетки, обычная схема использует 5 точек сетки. Плотность заполнения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из разностных уравнений, в первом случае больше $9/5 = 1.8$ раза, чем во втором случае. Соответственно должно расти время решения разностных

уравнений с оптимальными параметрами. Однако реальное время счета растет лишь в 1.4–1.6 раза. Это связано с тем, что число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений при использовании оптимальной разностной схемы меньше, чем число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений 5-ти точечной разностной схемы. Что дает сокращение числа операций при определении одной гармоники Лагерра на 15–20 %.

Можно решать систему уравнений (7)–(9), не сводя ее к одному волновому уравнению. В этом случае возможны различные варианты разностной аппроксимации этих уравнений с использованием оптимальных параметров. Эффективность различных вариантов численных алгоритмов различна.

Расчеты по таким алгоритмам дают точность решения, сравнимую с точностью решения алгоритмом, рассмотренным выше. Но время счета задачи этими алгоритмами, как правило, меньше на 5–10 %, чем при сведении этой системы уравнений к волновому уравнению, рассмотренному выше. Поэтому эти алгоритмы требуют отдельного рассмотрения.

Отметим, что использование трех оптимальных параметров из табл. 2 дают меньшие значения погрешности D , чем в случае использования 4-х оптимальных параметров из табл. 1.

Кроме указанного выше сокращения числа оптимальных параметров в методе Лагерра, важно отметить другие преимущества использования преобразования Лагерра в сравнении с преобразованием Фурье.

Можно получить выражение $I(r)$, аналогичное выражению (17) при использовании преобразования Фурье [8]. Значения этой величины, полученные при оптимальных параметрах, характеризуют точность аппроксимации уравнения (15). Для всех приведенных в таблицах значений величины $r = h_x/h_z$ величина $I(r)$ для преобразования Лагерра оказывалась на 2–3 порядка меньше, чем для преобразования Фурье. Это значительная разница. Так при $r = h_x/h_z = 1$ в методе Фурье $I(r) \simeq 10^{-4}$, а в методе Лагерра $I(r) \simeq 10^{-7}$, т.е. в методе Лагерра достигается существенно более глубокая оптимизация. Это указывает на возможность достичь более высокой точности решения волнового уравнения с использованием метода Лагерра в сравнении с методом Фурье.

Это верно для промежутка интегрирования от 0 до 0.25 по переменной k в формуле (17). Для метода Фурье верхний предел соответствует четверти длины волны на шаг разностной сетки. При увеличении верхнего предела метод Фурье либо дает очень слабую оптимизацию $I(r) \simeq 10^{-2}$ в сравнении с неоптимальной 5-ти точечной схемой, что соответствует $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 0$, либо точка минимума $I(r)$ не определяется. Метод Лагерра показывает значительную оптимизацию в пределах $k = 0, \dots, 1.5$.

Сама переменная $k = k_0 h_x$ определяет пространственный спектр решения. Она естественно связана с пространственными размерами области решения. Учет пространственных размеров возможен за счет задания конкретного вида спектра значений k_0 и k соответственно, например заданием нижнего предела спектра значений $k_0 = 2\pi/L$, где L — максимальный размер области решения, или, может быть, заданием дискретного спектра $k_0 = 2\pi n/L$, где n — целое число.

Хотя оптимальные параметры получены для волнового уравнения, они применимы и для уравнения диффузии, и для уравнений смешанного гиперболически-параболического типа. Они применимы в случаях, когда уравнения для гармоник Лагерра сводятся к уравнению Гельмгольца.

5. Заключение

Использование полученных оптимальных параметров разностных схем позволяет существенно повысить точность решения волнового уравнения в сравнении с обычными схемами 2-го порядка. Оптимальная схема дает точность решения, сравнимую с точностью решения по схеме 4-го порядка аппроксимации.

При одинаковом числе оптимальных параметров метод Лагерра дает более глубокую оптимизацию, чем метод Фурье. В сравнении с методом Фурье при использовании метода Лагерра число оптимальных параметров можно сократить. Это дает упрощение алгоритма, сокращение числа вычислений. Такое сокращение также позволяет достичь более глубокой оптимизации параметров разностной схемы.

Литература

1. **Bergmann T., Robertson J.O.A., and Holliger K.** Finite-difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // *Geophysics*. — 1998. — Vol. 63, № 3. — P. 856–867.
2. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., and Holliger K.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave propagation in frequency-dependent media // *Geophysics*. — 1999. — Vol. 64, № 5. — P. 1369–1377.
3. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Trans. Antennas Propag.* — 1992. — Vol. 40, № 11. — P. 1297–1301.
4. **Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics*. — 1994. — Vol. 59, № 8. — P. 1192–1200.
5. **Электроразведка. Справочник геофизика / А.Г. Тархов.** — М.: Недра, 1980.
6. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
7. **Jo C.H., Shin C., and Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator // *Geophysics*. — 1996. — Vol. 61, № 2. — P. 529–537.
8. **Chen J.B.** An average-derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophysics*. — 2012. — Vol. 77, № 6. — P. T201–T210.
9. **Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.** Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // *Тр. ИВМ и МГ. Мат. моделирование в геофизике.* — Новосибирск, 1998. — № 5. — С. 107–112.
10. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // *Applied Mathematics Letters*. — 1999. — Vol. 12, № 4. — P. 105–110.
11. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофизика.* — 2003. — Т. 44, № 10. — С. 1060–1069.
12. **Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофизика.* — 2006. — Т. 47, № 3. — С. 397–407.
13. **Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц и И. Стиган.** — М.: Наука, 1979.
14. **Kane Ye.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // *IEEE Trans. Antennas Propag.* — 1966. — Vol. 14, № 3. — P. 302–307.
15. **Saenger E., Gold N., and Shapiro S.** Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid // *Wave motion.* — 2000. — Vol. 31, № 1. — P. 77–92.

16. **Ghrist M., Fornberg B., and Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38, № 3. — P. 718–741.
17. **Alford R.M., Kelly K.R., and Boore D.M.** Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation // Geophysics. — 1974. — Vol. 39, № 6. — P. 834–842.

*Поступила в редакцию 22 декабря 2015 г.,
в окончательном варианте 5 мая 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Bergmann T., Robertson J.O.A., and Holliger K.** Finite-difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics. — 1998. — Vol. 63, № 3. — P. 856–867.
2. **Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., and Holliger K.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave propagation in frequency-dependent media // Geophysics. — 1999. — Vol. 64, № 5. — P. 1369–1377.
3. **Luebbers R., Hansberger F.P.** FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Antennas Propag. — 1992. — Vol. 40, № 11. — P. 1297–1301.
4. **Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics. — 1994. — Vol. 59, № 8. — P. 1192–1200.
5. *Elektrorazvedka. Spravochnik geofizika / A.G. Tarkhov.* — M.: Nedra, 1980.
6. **Golub Dzh., Van Loun CH.** *Matrichnye vychisleniya.* — M.: Mir, 1999.
7. **Jo C.H., Shin C., and Suh H.S.** An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-D scalar wave extrapolator // Geophysics. — 1996. — Vol. 61, № 2. — P. 529–537.
8. **Chen J.B.** An average-derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, № 6. — P. T201–T210.
9. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G.** *Primenenie integral'nogo preobrazovaniya Lagerra pri reshenii dinamicheskikh zadach seysmiki // Tr. IVM i MG. Mat. modelirovanie v geofizike.* — Novosibirsk, 1998. — № 5. — S. 107–112.
10. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — Vol. 12, № 4. — P. 105–110.
11. **Masteryukov A.F., Mikhailenko B.G.** *Chislennoe modelirovanie rasprostraneniya elektromagnitnykh voln v neodnorodnykh sredakh s zatukhaniem na osnove spektral'nogo preobrazovaniya Lagerra // Geologiya i geofizika.* — 2003. — T. 44, № 10. — S. 1060–1069.
12. **Masteryukov A.F., Mikhailenko B.G.** *Modelirovanie rasprostraneniya elektromagnitnykh voln v relaksacionnykh sredakh na osnove spektral'nogo preobrazovaniya Lagerra // Geologiya i geofizika.* — 2006. — T. 47, № 3. — S. 397–407.
13. *Spravochnik po special'nykh funkciyam / M. Abramovic i I. Stigan.* — M.: Nauka, 1979.
14. **Kane Ye.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas Propag. — 1966. — Vol. 14, № 3. — P. 302–307.
15. **Saenger E., Gold N., and Shapiro S.** Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid // Wave motion. — 2000. — Vol. 31, № 1. — P. 77–92.
16. **Ghrist M., Fornberg B., and Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38, № 3. — P. 718–741.
17. **Alford R.M., Kelly K.R., and Boore D.M.** Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation // Geophysics. — 1974. — Vol. 39, № 6. — P. 834–842.

