

В. А. Козлов, В. М. Матвеев, Н. В. Петькин, Д. Н. Ромашко

ВРАЩАТЕЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ УПРУГОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА ПОВЕРХНОСТИ

В настоящей работе рассматриваются вращательные колебания, которые в отличие от обычно исследуемых поступательных колебаний характеризуются периодическим изменением ориентации осей координат, связанных с некоторым объемом упругой среды. Работы [1—3] посвящены средствам измерения такого рода колебаний, причем в [3] описан сейсмоприемник крутильных колебаний, работа которого основана на принципах молекулярной электроники.

Хорошо известно, что угол поворота ψ элементарного объема непрерывной среды связан с полем деформации U соотношением [4]

$$(0.1) \quad \psi = (1/2)\text{rot}U.$$

Величина ψ соответствует угловому ускорению, измеряемому реальным приемником, лишь в ограниченном ряде случаев, когда можно пренебречь искажениями поля U , вносимыми корпусом приемника. Область применимости указанного выражения оценивается с помощью решений модельных задач о движении сферического включения под действием падающих плоских волн сжатия и сдвига [5, 6]. Задача о поступательном и вращательном движении замороженного в однородную упругую среду твердого шара с эксцентриситетом центра масс рассматривалась в [6]. Наличие эксцентриситета приводит к тому, что не только поперечная, но и продольная волна вызывает вращение шара. Причем, как следует из результатов [6], соотношение (0.1) с удовлетворительной точностью применимо лишь в случае хорошо сбалансированного шара, что не всегда достижимо на практике. В действительности в [6] содержится ошибка в промежуточных выкладках, и область применимости (0.1), как будет показано ниже, оказывается более широкой.

При использовании измерителей ψ в ближней зоне источника наибольшее значение приобретает градиентный характер связи между ψ и U , и в этом случае возможен заметный рост относительного вклада в измеряемую величину от ближайших источников колебаний, по сравнению с вкладом от дальних. В ближней зоне монополюсного источника, когда поле деформации имеет вид $U \sim |R|^{-1}\exp(ik|R|)$, $R = (x, y, z)$, при дифференцировании по пространственным координатам в процедуре вычисления ротора наибольшее значение имеет производная не осциллирующей экспоненты, а предэкспоненциального множителя $|R|^{-1}$. Поэтому амплитуда угловых колебаний ψ зависит от $|R|$ на порядок сильнее ($\sim |R|^{-2}$), по сравнению с амплитудой самого поля U . Такое подчеркивание вклада близких источников может представить практический интерес, например, для сейсмических систем наблюдения. В настоящей работе рассматривается ближнее поле поверхностного источника колебаний в конкретном, но представляющем общий интерес случае, когда источник задается сосредоточенной внешней силой, нормальной к поверхности и гармонически зависящей от времени (задача Лемба).

Различные варианты этой задачи рассматривались, например, в [7—9] для однородного упругого полупространства. В случае точечного гармонического источника решение задачи в квадратурах, а также асимптотика поля дальней зоны приведены в [8]. Что касается ближней зоны, то, по данным [8], количественно эта область в литературе практически не исследовалась. Попытка численного анализа упругого поля в ближней зоне в рамках нестационарной задачи Лемба была предпринята в [9]. Однако там приведены результаты расчетов временной зависимости деформации лишь для одной точки пространственных координат, что не позволяет судить о структуре поля в целом и о градиентах его проекций, которые требуются для вычисления ротора поля. Кроме того, соотношение времени задержки и характерной длительности рассчитанного сигнала показывает, что представленные результаты относятся, скорее, к переходной зоне, чем к ближней. Некоторые экспериментальные данные опубликованы в [10].

1. Рассматривается упругое однородное полупространство с источником колебаний на его поверхности в начале координат (ось Oz направлена внутрь упругой среды, по нормали к поверхности). Источник задается внешней сосредоточенной силой $F(t)$, приложенной к поверхности и гармонически зависящей от времени: $F(t) = F \exp(-i\omega t)$. Если оценивать поле U в ближней зоне величиной деформации, вызванной стационарной ($\omega = 0$) силой F [7], то оказывается, что на практике часто вкладом касательной к поверхности составляющей силы F можно пренебречь, поскольку относительная величина этого вклада в общем поле пропор-

циональна параметру $\gamma^2 = c_s^2/c_p^2$, где c_s, c_p — скорости поперечных и продольных волн. Поэтому в дальнейших расчетах ограничимся случаем силы, ориентированной нормально к границе полупространства: $\mathbf{F} = (0, 0, F_z)$. Исходная система уравнений и точное решение задачи в квадратурах приведены в [8]. Воспользовавшись результатами [8], для ψ получим выражение

$$(1.1) \quad \psi = e_\varphi \frac{F_z}{2\pi\mu} \frac{\omega^2}{c_s^2} \int_0^\infty \frac{ik k^2}{Z(\omega, k)} J_1(kr) \exp(iq_z z - i\omega t) dk,$$

где $k_z = \sqrt{\omega^2/c_p^2 - k^2}$; $q_z = \sqrt{\omega^2/c_s^2 - k^2}$; $Z(\omega, k) = (2k^2 - \omega^2/c_s^2)^2 + 4k^2 q_z k_z$;

e_φ — базисный вектор цилиндрической системы координат (r, φ, z) ; $\mu = \rho_0 c_s^2$ — коэффициент Ламе; $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода. В ближней зоне само поле и его вращательную составляющую удобно представить в виде разложения по степеням малого параметра $r^* = k_s r = r\omega/c_s$. Хотя такое разложение в принципе можно получить и для конечных z , ввиду громоздкости результирующих выражений рассмотрим предельный случай $z \rightarrow 0$. Например, для компоненты U_z после очевидной замены переменных имеем [8]

$$U_z = - \frac{\omega F_z}{2\pi\mu c_s} \int_c^{\infty+i\delta} \frac{J_0(pr^*) p \sqrt{p^2 - \gamma^2} dp}{(2p^2 - 1)^2 - 4p^2 \sqrt{p^2 - \gamma^2} \sqrt{p^2 - 1}}, \quad \delta > 0.$$

Путь интегрирования по действительной оси здесь сдвинут в сторону положительных $\text{Im}(p)$, чтобы задать правильный обход особых точек подынтегрального выражения (1.1).

Рассмотрим непосредственно сам интеграл. Основной вклад в него при $r^* \ll 1$ дают большие p порядка $1/r^*$, причем величина вклада имеет тот же порядок. Это означает, что разложение начинается с члена $1/r^*$. Соответствующий коэффициент можно найти, интегрируя асимптотику подынтегрального выражения при больших p :

$$\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \int_0^\infty J_0(pr^*) dp = \frac{1}{2r^*(1-\gamma^2)^*}$$

Вычитая под интегралом асимптотику для больших p из точного выражения и устремляя r^* к нулю, получаем следующий член разложения. Действуя по приведенной схеме, имеем ряд для u_z :

$$(1.2) \quad u_z = \frac{F_z}{4\pi\mu r(1-\gamma^2)} \left[1 - iI r^* - \frac{3-4\gamma^2+3\gamma^4}{4(1-\gamma^2)} (r^*)^2 + \dots \right],$$

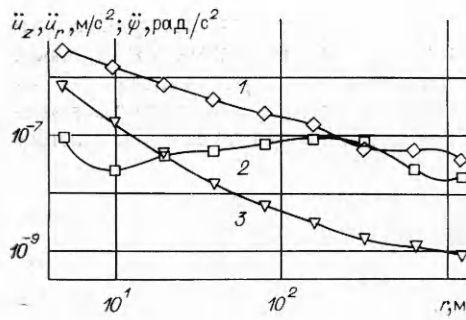
$$I = \int_0^\infty \frac{2(1-\gamma^2)s \sqrt{s^2+\gamma^2} + 4s^2 \sqrt{s^2+1} \sqrt{s^2+\gamma^2} - (2s^2+1)^2}{(2s^2+1)^2 - 4s^2 \sqrt{s^2+1} \sqrt{s^2+\gamma^2}} ds.$$

Здесь подразумевается интегрирование по действительной оси, на которой подынтегральное выражение не имеет особых точек. Оценка интеграла I дает величину порядка единицы, слабо зависящую от γ .

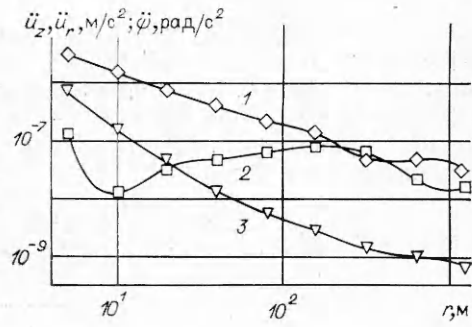
При вычислении нулевого члена разложения величины ψ оказывается, что при $z = 0$ соответствующий интеграл расходится на верхнем пределе интегрирования, поскольку ротор поля на границе раздела не определен. Указанная расходимость отсутствует при любых конечных $z > 0$, причем зависимость от z является слабой. Переходя к пределу $z \rightarrow 0$ после вычисления ряда, находим выражение

$$(1.3) \quad \psi = \frac{e_\varphi F_z}{4\pi\mu r^2(1-\gamma^2)} \left[1 + \frac{3-4\gamma^2+3\gamma^4}{4(1-\gamma^2)} (r^*)^2 + \dots \right].$$

Как и ожидалось, амплитуда $u_z (\sim r^{-1})$ изменяется в ближней зоне на



Р и с. 1

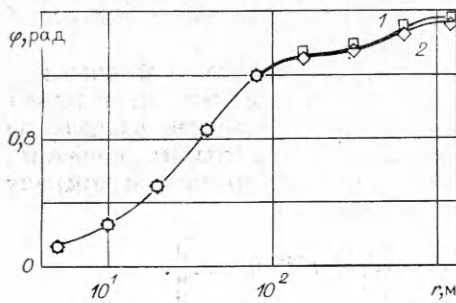


Р и с. 2

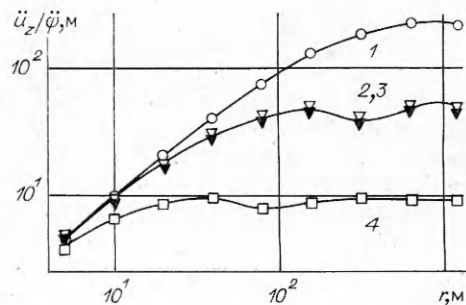
порядок медленнее, чем амплитуда ψ ($\sim r^{-2}$). Нулевые члены разложений представляют собой хорошо известный предельный случай стационарной силы \mathbf{F} ($\omega = 0$) [7], а поправки к амплитудам ψ и u_z оказываются квадратичными по малому параметру r^* , поскольку в u_z первый член разложения есть поправка к фазе.

За пределами области, где r^* еще можно считать малым и применимы разложения (1.2), (1.3), компоненты упругого поля исследовались численными методами. При этом значения параметров модели были выбраны согласующимися с реальной экспериментальной ситуацией: $c_s = 300$ м/с, $z = 0,3$ м. Результаты расчета представлены на рис. 1, 2, где приведены зависимости амплитуд \ddot{u}_z , \ddot{u}_r и $\ddot{\psi}$ (кривые 1—3) от расстояния r для частоты 1 Гц, $c_p = 1600$ м/с (рис. 1), $c_p = 2000$ м/с (рис. 2) и $F_z = 10^4$ Н. Асимптотическое поведение \ddot{u}_z и $\ddot{\psi}$ при $r \rightarrow 0$ согласуется с результатами аналитического расчета, причем в переходной зоне между ближней и дальней существенных особенностей в поведении компонент рассматриваемых полей не наблюдается. На рис. 3 показаны разности фаз φ между $\ddot{\psi}$ и \ddot{u}_z , отвечающие рис. 1, 2. Зависимость представленных результатов от c_p , т. е. от γ , оказывается незначительной.

2. Рассматривается жесткая сфера с массой m и радиусом a , которая впаивана в безграничную упругую среду с параметрами c_p, c_s, ρ_0 [6]. Сфера динамически несимметричная, с геометрическим центром в точке $\mathbf{r} = 0$ и центром масс в $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Вектор \mathbf{r}_0 лежит в плоскости $y = 0$, угол между осью Ox и \mathbf{r}_0 равен α_0 . На сферу вдоль оси Oz падает плоская волна продольного типа: $\mathbf{U}_p = \mathbf{e}_z S_1 \exp(ik_p z - i\omega t)$ ($k_p = \omega/c_p$, \mathbf{e}_z — базисный вектор). Полное смещение \mathbf{U} упругой среды удовлетворяет волновому уравнению $\omega^2 \mathbf{U} + c_p^2 \text{grad div } \mathbf{U} - c_s^2 \text{rot rot } \mathbf{U} = 0$ и граничному условию $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ при $|\mathbf{r}| = a$ (\mathbf{U}_0 — вектор смещения точек поверхности сферы). Следуя методу решения, изложенному в [6], можно получить точное решение для движения сферического включения, как поступательного, так и вращательного. Поскольку в [6] есть ошибка в промежуточных выкладках, приведем правильный результат для интересующей нас амплитуды угловых колебаний в случае, когда тензор инерции сферы имеет диаго-



Р и с. 3



Р и с. 4

нальный вид. Вращение происходит вокруг оси Oy , и соответствующий угол поворота

$$(2.1) \quad \psi_y = -\varepsilon q \cos \alpha_0 \frac{S_1}{a} \left[\left(\frac{I_y}{ma^2} - 2 \frac{k}{\varkappa K^2} \right) (p-1) + \varepsilon^2 p \right]^{-1}.$$

Здесь $\varepsilon = r_0/a$ — относительный эксцентриситет; I_y — момент инерции; $\varkappa = \rho_1/\rho_0$; ρ_1 — плотность сферы; $K = k_s a$, $k_s = \omega/c_s$; $q = 9ih_2^{(1)}(K)/(\gamma^3 K^3 \Delta \varkappa)$; $p = [3h_2^{(1)}(K)h_2^{(1)}(\gamma K) + \Delta]/(\varkappa \Delta)$; $k = Kh_2^{(1)}(K)/h_1^{(1)}(K)$; $\gamma = c_s/c_p$; $\Delta = h_0^{(1)}(\gamma K)h_2^{(1)}(K) + 2h_2^{(1)}(\gamma K)h_0^{(1)}(K)$; $h_n^{(1)}(x)$ — сферическая функция Бесселя третьего рода.

Случай, когда на сферу падает плоская волна поперечного типа $U_s = e_x S_2 \exp(ik_s z - i\omega t)$, рассматривается аналогично. Для единственной ненулевой проекции угла поворота ψ_y получаем

$$(2.2) \quad \psi_y = \frac{S_2}{a} (v\varepsilon \sin \alpha_0 - (p-1)w) \left[\left(\frac{I_y}{ma^2} - \frac{2k}{\varkappa K^2} \right) (p-1) + \varepsilon^2 p \right]^{-1},$$

где $w = 3(\varkappa K^3 h_1^{(1)}(K))^{-1}$; $v = 9ih_2^{(1)}(\gamma K)(K^3 \Delta \varkappa)^{-1}$.

3. Для оценки поправок к соотношению (0.1) в длинноволновой области выпишем разложения выражений (2.1), (2.2) по малому параметру K :

$$\begin{aligned} \psi_y &= \frac{S_1}{a} \left[-\varepsilon \frac{\varkappa}{6} \cos \alpha_0 K^2 \right] + O(K^4), \\ \psi_y &= \frac{S_2}{a} \frac{iK}{2} \left[1 - i\varepsilon \frac{\varkappa}{3} \sin \alpha_0 K + \frac{1}{6} \left(\varkappa \frac{I_y}{ma^2} + \varkappa \varepsilon^2 - 1 \right) K^2 \right] + O(K^4), \end{aligned}$$

из вида которых следует, что поправки второго порядка по K пропорциональны ε , а зависимость их от угла падения волны α_0 разная для различных типов волн. Поэтому для уменьшения поправок, помимо балансировки приемника, можно уменьшать его массу.

Покажем, что измерение амплитуд поступательных и вращательных колебаний позволяет определить направление и расстояние до близкого поверхностного источника, причем для этого достаточно провести измерения в одной единственной точке. На рис. 4 приведено отношение \ddot{u}_z и $\dot{\Omega} = \dot{\psi}$ для различных частот и упругих постоянных при $c_s = 300$ м/с (кривая 1 — $f = 0,2$ Гц, $c_p = 1600$ м/с, 2 — $f = 1$ Гц, $c_p = 1600$ м/с, 3 — $f = 1$ Гц, $c_p = 2000$ м/с, 4 — $f = 5$ Гц, $c_p = 1600$ м/с) в зависимости от r . На начальном линейном участке отношение ускорений в точности равно r и, что самое важное для практических приложений, не зависит от упругих свойств среды, частоты и мощности источника колебаний. Для определения дальности можно использовать также и нелинейный участок с помощью соответствующих калибровочных или расчетных поправок, но в этом случае, естественно, поправки будут зависеть от ряда параметров задачи, главным образом от длины волны $\lambda_s = 2\pi/k_s$. Направление на объект легко определяется из условия ортогональности векторов $\dot{\psi}$ и \mathbf{r} ($\dot{\psi} \cdot \mathbf{r} = 0$). Компоненты радиуса-вектора источника можно вычислить, например, через векторное произведение $[\ddot{\mathbf{u}}_z \times \dot{\psi}]$.

В результате можно заключить, что, помимо очевидного применения сейсмоприемников крутильных колебаний для разделения волн различных типов, возможно их эффективное использование при изучении градиентных характеристик упругих полей, в частности в ближней зоне колебательного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Б. Б. Избранные труды. В 2-х т. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
2. Токмаков В. А., Харин Б. И. Об измерении поворотных колебаний сейсмическими приборами // Сейсмические приборы. — 1979. — Вып. 12.

3. Введение в молекулярную электронику/Под ред. Н. С. Лидоренко.— М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1987.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн.— Киев: Наук. думка, 1978.
6. Ковшов А. Н., Симонов И. В. О некоторых движениях жесткой сферы, впаивной в безграничную упругую среду // Изв. АН СССР. МТТ.— 1967.— № 5.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1987.
8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.
9. Никифоровский В. С., Онисько Н. И. Исследование осесимметричного поля перемещений в упругом полупространстве // ФТПРПИ.— 1966.— № 2.
10. Глазнев В. Н., Демин В. С., Солотчин А. В. О структуре сейсмического поля, возбуждаемого газодинамическим источником // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. 8-й Всесоюз. конф./Под ред. В. М. Фомына.— Новосибирск, 1984.

г. Москва

Поступила 3/IV 1989 г.

УДК 531:539.3

И. И. Кудши

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОГО ИЗНАШИВАНИЯ И ВЫКРАШИВАНИЯ

В [1] изложена статистическая математическая модель процессов усталостного изнашивания и выкрашивания, основанная на изучении единого механизма развития усталостных подповерхностных трещин в квазихрупких телах в условиях контактного нагружения. При этом в контакте предполагалось наличие нормальных и касательных контактных напряжений, а в поверхностных слоях материала — остаточных. Трещины считались прямолинейными не взаимодействующими стохастически рассеянными по объему материала. Рост трещин контролировался коэффициентами интенсивности напряжений в их вершинах и определялся кинетическим уравнением развития усталостных трещин.

В настоящей работе на основе модели [1] производится численное изучение процессов усталостного износа и выкрашивания. Проанализировано влияние основных параметров модели на контактную усталость. Установлены необходимые условия возникновения износа, отслаивания и выкрашивания. Приведен ряд численных данных.

1. Исходные соотношения задачи. Зададимся кинетическим уравнением Паррета развития усталостных трещин

$$(1.1) \quad dl/dN = g_0 k_1^m,$$

где k_1 — максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва в вершине трещины за цикл нагружения; l — полудлина трещины; N — число циклов нагружения; g_0 и m — постоянные уравнения. Статистическую функцию распределения f трещин по полудлине l_0 в начальный момент времени будем считать подчиняющейся логарифмически нормальному закону

$$(1.2) \quad f(0, x, y, l_0) = \begin{cases} 0, & l_0 \leq 0, \\ \frac{n(0, x, y)}{(2\pi)^{1/2} \bar{\sigma} l_0} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(l_0) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \right)^2 \right], & l_0 > 0. \end{cases}$$

Здесь $n(0, x, y)$ — объемная плотность трещин; $\bar{\mu}$ и $\bar{\sigma}$ — математическое и среднее квадратичное отклонение логарифма полудлины трещин в начальный момент времени. Допустим также, что величины n , $\bar{\mu}$ и $\bar{\sigma}$ не зависят от координат (x, y) точки материала (ось x направлена вдоль поверхности тела, ось y — перпендикулярно ей). Тогда вероятность отсутствия разрушения в точке (x, y) есть [1] (см. также (1.2))

$$(1.3) \quad \tilde{p}(N, x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(\tilde{\sigma}_0 k) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \right) \right],$$