ПМТФ, № 4, 1971

УДК 532.54

ОБ ИЗМЕНЕНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПОЛИВАХ

Н. Н. Кочина

(Москва)

В работах [1–8] рассматривались периодические решения дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с нелинейно-зависящей от искомой функции правой частью или функцией входящей в граничное условие. При этом время t не входило явно в выражение для этой нелинейной функции.

В работе [8] задача о периодическом изменении в полубесконечной области уровня грунтовых вод при поливах с учетом испарения сведена к линейному интегральному уравнению, решение которого найдено в предельных случаях.

Ниже получено решение этой задачи как в полубесконечной, так и в конечной области.

1. Будем предполагать, что грунтовые воды занимают область $0 < x < l$ между каналами с уровнями воды H_1 и H_2 соответственно. В точке $x = x^\circ$ $(0 < x^\circ < l)$ измеряется уровень грунтовых вод h. Когда этот уровень достигает величины h_*, полив, производимый (с учетом испарения) с интенсивностью mc (m — пористость), прекращается и начинается вновь, когда h уменьшится до h_{**}. Интенсивность испарения равна md.

Эта задача сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности с правой частью, релейно зависящей от уровня грунтовых вод в точке x°, с граничными условиями.

$$h(0,\ t) = H_1, \qquad h(l,\ t) = H_2 \tag{1.1}$$

Полагая

$$h(x,\ t) = H_1 + (H_2 - H_1)\, x l^{-1} + u(x,\ t) \tag{1.2}$$

сведем задачу к нахождению решения $u(x,\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F[u(x^\circ, t)] \tag{1.3}$$

где обозначено

$$F[u(x^\circ, t)] = \begin{cases} c & \text{при } u(x^\circ, t) < u_* \\ & (u_{**} < u_*, c > 0, d > 0) \\ -d & \text{при } u(x^\circ, t) > u_{**} \end{cases} \tag{1.4}$$

с условиями

$$u(0,\ t) = 0, \qquad u(l,\ t) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь введены обозначения

$$u_* = h_* - H_1 - (H_2 - H_1)\, x^\circ l^{-1}, \quad u_{**} = h_{**} - H_1 - (H_2 - H_1)\, x^\circ l^{-1} \tag{1.6}$$

Рассмотрим сначала эту задачу в конечном промежутке.

2. Пусть $u(x^\circ,\ T_1) = u_*$ при $t = T_1$, а при $t = T$ $u(x^\circ,\ T) = u_{**}$. Тогда $u(x,\ T) = u(x,\ 0)$, где T — период колебания. При $0 \leqslant t \leqslant T_1$ $u(x, t) = u_1(x,\ t)$, при $T_1 \leqslant t \leqslant T$ $u(x, t) = u_2(x,\ t)$, причем функции

$u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ удовлетворяют условиями

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c \tag{2.1}$$

$$u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - d \tag{2.3}$$

$$u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0 \tag{2.4}$$

соответственно.

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде ряда

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.1), находим выражение для функций $f_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots$)

$$f_k(t) = C_k \exp(-\lambda_k^2 t) - \frac{2cl^2}{a^2\pi^3 k^3} [(-1)^k - 1] (1 - \exp(-\lambda_k^2 t))$$
$$\left(\lambda_k = \frac{\pi a k}{l}\right) \tag{2.6}$$

где C_k — неизвестные постоянные.

Теперь запишем выражения для функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \exp(-\lambda_n^2 t) - \frac{2cl^2}{a^2\pi^3 n^3} [(-1)^n - 1] (1 - \exp(-\lambda_n^2 t))\right] \times$$
$$\times \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T_1) \tag{2.7}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{D_n \exp[-\lambda_n^2 (t - T_1)] + \frac{2dl^2}{a^2\pi^3 n^3} [(-1)^n - 1] \times$$
$$\times (1 - \exp[-\lambda_n^2 (t - T_1)])\Big\} \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (T_1 \leqslant t \leqslant T)$$

Введем для краткости обозначения

$$\alpha_n = \frac{2l^2 [(-1)^n - 1]}{a^2\pi^3 n^3}, \qquad \beta_n = \exp(-\lambda_n^2 T_1) \tag{2.8}$$
$$\gamma_n = \exp(-\lambda_n^2 (T - T_1)), \qquad \delta_n = \exp(-\lambda_n^2 T)$$

Ясно, что должны выполняться равенства

$$u_1(x, 0) = u_2(x, T), \qquad u_1(x, T_1) = u_2(x, T_1) \tag{2.9}$$

В силу соотношений (2.7), (2.8) из равенств (2.9) вытекают выражения для постоянных C_n и D_n

$$C_n = \frac{\alpha_n \{-c(\gamma_n - \delta_n) + d(1 - \gamma_n)\}}{1 - \delta_n}, \quad D_n = \frac{\alpha_n \{-c(1 - \beta_n) + d(\beta_n - \delta_n)\}}{1 - \delta_n} \tag{2.10}$$

Из (2.8) и (2.10) ясно, что ряды (2.7) равномерно сходятся.

Величины T_1, T найдутся как наименьшие корни уравнений $u(x^\circ, T_1) = u_*$ и $u(x^\circ, T) = u_{**}$.

В силу (2.7) и (2.10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \{-c(1-\beta_n)+d(\beta_n-\delta_n)\}}{1-\delta_n} \sin\frac{\pi n x^\circ}{l} = u_* \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \{-c(\gamma_n-\delta_n)+d(1-\gamma_n)\}}{1-\delta_n} \sin\frac{\pi n x^\circ}{l} = u_{**}$$

Рассмотрим случай $c = d$, $T = 2T_1$. Формулы (2.10), (2.11) примут вид

$$C_n = -D_n = c\alpha_n \frac{1-\beta_n}{1+\beta_n} \tag{2.12}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c\alpha_n \frac{1-\beta_n}{1+\beta_n} \sin\frac{\pi n x^\circ}{l} = u_* = -u_{**}$$

Пусть $x^\circ = l/2$. Тогда в силу (2.8) из (2.12) найдем

$$C_{2k-1} = -\frac{4l^2}{a^2\pi^3}\frac{c}{(2k-1)^3}\frac{1-\beta_{2k-1}}{1+\beta_{2k-1}}, \qquad C_{2k}=0$$

$$u_* = \frac{4l^2c}{a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\frac{1-\beta_{2k-1}}{1+\beta_{2k-1}} \qquad (\beta_{2k-1} = \exp(-\lambda_{2k-1}{}^2T_1)) \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию

$$y(T_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\frac{1-\beta_{2k-1}(T_1)}{1+\beta_{2k-1}(T_1)}$$

Ясно, что $y(0) = 0$, $y'(T_1) > 0$. При стремлении T_1 к бесконечности y стремится к величине [10]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Отсюда получаем следующий результат: единственный корень $T_1 > 0$ уравнения (2.13) существует, если выполнено неравенство

$$U_* = \frac{a^2u_*}{l^2c} < \frac{1}{8}$$

Таким образом, при этом условии существует единственное решение рассматриваемой задачи. Оно описывается формулами (2.7), где C_n и D_n даны равенствами (2.12).

Если $c = d$, $T = 2T_1$, то формула (2.12) принимает вид

$$U_* = \frac{a^2u_*}{l^2c} = \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\frac{1-\beta_{2k-1}}{1+\beta_{2k-1}}\sin\frac{(2k-1)\pi x^\circ}{l} \tag{2.14}$$

Из (2.14) легко видеть, что $U_*(0) = 0$. С ростом $\tau_1 = a^2T_1/l^2$, как показывают расчеты, U_* растет, причем при стремлении τ_1 к бесконечности U_* стремится к

$$U_\infty = \frac{1}{2}\frac{x^\circ}{l}\left(1-\frac{x^\circ}{l}\right)$$

Следовательно, и в этом случае при $U_* < U_\infty$ существует единственное решение τ_1.

В общем случае из формул (2.11), где введены обозначения

$$U_* = \frac{a^2 u_*}{l^2 c}, \quad U_{**} = \frac{a^2 u_{**}}{l^2 c}, \quad \tau_1 = \frac{a^2 T_1}{l^2}, \quad \tau = \frac{a^2 T}{l^2}, \quad \Delta = \frac{d}{c} \tag{2.15}$$

получаем выражения для функций $U_*(\tau_1, \tau)$ и $U_{**}(\tau_1, \tau)$

$$U_* = \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - \beta_{2k-1} - \Delta\beta_{2k-1}(1 - \gamma_{2k-1})]}{(2k-1)^3 (1 - \beta_{2k-1}\gamma_{2k-1})} \sin \frac{(2k-1)\pi x^\circ}{l}$$

$$U_{**} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\gamma_{2k-1}(1 - \beta_{2k-1}) - \Delta(1 - \gamma_{2k-1})]}{(2k-1)^3 (1 - \beta_{2k-1}\gamma_{2k-1})} \sin \frac{(2k-1)\pi x^\circ}{l} \tag{2.16}$$

$$(\beta_{2k-1} = \exp[-\pi^2 (2k-1)^2 \tau_1], \quad \gamma_{2k-1} = \exp[-\pi^2 (2k-1)^2 (\tau - \tau_1)])$$

Из (2.16) ясно, что при стремлении τ_1 к бесконечности U_* стремится к U_∞, U_{**} — к $-\Delta U_\infty$.

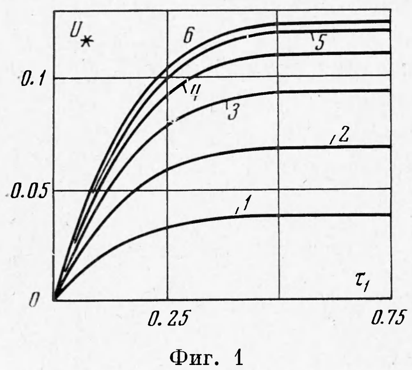
При больших значениях k k-й член рядов (2.16) не превышает k-го члена ряда

$$S = \frac{4(1+\Delta)}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \tag{2.17}$$

Из формулы (2.17) следует использованная при расчетах оценка остатка $R_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ рядов U_* и U_{**}

$$|R_n^{(i)}| < \varepsilon, \quad n > N, \quad E\left(\frac{N+1}{2}\right) \geqslant 100 \sqrt{\frac{4}{3} \frac{(c+d)}{\pi^2}},$$ где $E(x)$ — целая часть числа x.

На фиг. 1 построены графики функций U_*, определенной формулой (2.14), в зависимости от τ_1 для различных значений параметра x°/l.



Фиг. 1

На фиг. 2 для случая $\Delta = 0.5$, $\tau = 3\tau_1$ построены зависимости U_* и U_{**} от τ_1.

При этом кривым *1—6* соответствуют значения $x^\circ/l = 0.08333$, 0.91667; 0.16667, 0.83333; 0.25, 0.75; 0.33333, 0.66667; 0.41667, 0.58333; 0.5.

Из вида кривых $U_*(\tau_1, b\tau_1)$, $U_{**}(\tau_1, b\tau_1)$, аналогичного построенным на фиг. 1 и фиг. 2, ясно, что каждой паре значений U_* и U_{**}, таких что $-\Delta U_\infty < U_* < U_\infty$, $-\Delta U_\infty < U_{**} < U_\infty$, соответствует единственная пара значений τ_1, τ.

На фиг. 3 в плоскости $\tau_1 \tau$ представлен вид кривых постоянных значений U_* (сплошные кривые) и U_{**} (пунктирные кривые). Направление возрастания U_* и U_{**} указано стрелками.

3. Рассмотрим теперь эту же задачу в полубесконечной области. Решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(\tau) \tag{3.1}$$

с граничным условием $u(0, t) = 0$ и без начальных условий примет вид [9]

$$u(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \operatorname{sh} \frac{x\xi}{2a^2(t-\tau)}\, d\xi \right) d\tau \tag{3.2}$$

Пользуясь формулой [10]

$$\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \operatorname{sh} \frac{x\xi}{2a^2(t-\tau)}\, d\xi = a\sqrt{\pi(t-\tau)}\, \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)$$

$$\left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} \exp(-s^2)\, ds\right) \tag{3.3}$$

запишем решение (3.2) уравнения (3.1) следующим образом:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau \tag{3.4}$$

Будем теперь считать, что функция $f(\tau)$ принимает значения

$$f(\tau) = \begin{cases} c & \text{при} \quad kT \leqslant t \leqslant kT + T_1 \\ & \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ -d & \text{при} \quad kT + T_1 \leqslant t \leqslant (k+1)\, T \end{cases} \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем решение $u(x, t)$ в виде рядов, считая, что при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ $u(x, t) = u_1(x, t)$, а при $T_1 \leqslant t \leqslant T$ $u(x, t) = u_2(x, t)$

$$u_1(x, t) = c \int_{0}^{t} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + S(x, t) \tag{3.6}$$

$$u_2(x, t) = -d \int_{T_1}^{t} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + c \int_{0}^{T_1} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + S(x, t)$$

$$S(x, t) = \sum_{k=0}^{-\infty} \left[-d \int_{(k-1)T+T_1}^{kT} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + c \int_{(k-1)T}^{(k-1)T+T_1} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau \right]$$

Из асимптотического представления интеграла вероятности $\Phi(z)$ при малых значениях z

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z + \ldots$$

и из формул (3.6) следует равномерная сходимость рядов $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, если $cT_1 = d(T - T_1)$.

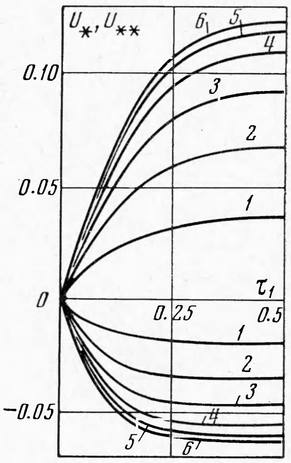
Из асимптотического представления интеграла вероятности при малых значениях z можно показать, что ряды $\partial u_1(x, t)/\partial t$ и $\partial u_2(x, t)/\partial t$ равномерно сходятся, причем для любых значений x° выполняются неравенства

$$\frac{\partial u_1(x^\circ, t)}{\partial t} > 0, \qquad \frac{\partial u_2(x^\circ, t)}{\partial t} < 0$$

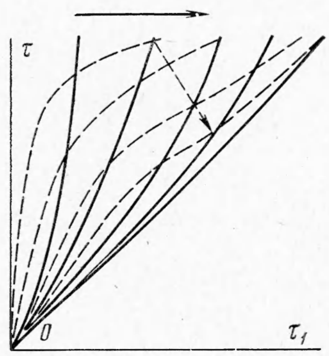
и, таким образом, формулы (3.6) дают решение искомой нелинейной задачи. Константа T_1 находится из одного из уравнений

$$u_1(x^\circ, T_1) = u_*, \qquad u_2(x^\circ, T) = u_{**} \tag{3.7}$$

где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ даны формулами (3.6). Из формул (3.6) и (3.7) можно видеть, что при $T_1 \to 0$ $u_* \to 0$, $u_{**} \to 0$, при $T_1 \to \infty$ $u_* \to \infty$, $u_{**} \to -\infty$.



Фиг. 2



Фиг. 3

При больших значениях n члены рядов имеют порядок

$$a_n \approx An^{-3/2}, \quad b_n \approx An^{-3/2}, \quad A = -\frac{28cT_1z^{\circ 3}}{3\sqrt{\pi}} \left(z^\circ = \frac{x^\circ}{2a}\right).$$

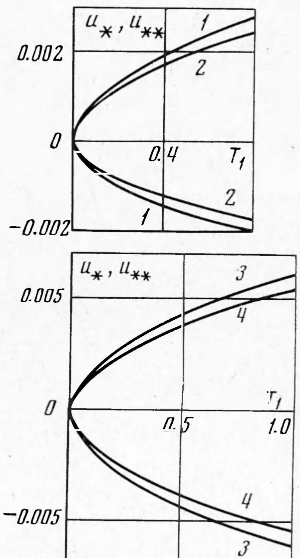
На фиг. 4 представлена зависимость u_*/c и u_{**}/c от T_1 для случаев $d/c = 0.5$ (кривой 1 соответствует значение $z^\circ = 0.0030$, кривой 2 — значение $z^\circ = 0.0027$) и $d/c = 1$ (кривой 3 соответствует $z^\circ = 0.0030$, 4 — значение $z^\circ = 0.0027$).

Из таких графиков видно, что каждому значению $u_* > 0$ соответствует единственное T_1; при этом $u_{**} < 0$ не произвольно, а определяется по второй формуле (3.7).

4. Предполагая, что расстояние l между каналами конечно, найдем теперь решение задачи, рассмотренной в п. 2, с начальным условием, т. е. получим решение задачи (1.3)—(1.5) с условием

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x) \tag{4.1}$$

где функцию $\varphi_1(x)$ будем считать удовлетворяющей в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ условиям Дирихле, и покажем, что при некоторых ограничениях, накладываемых на функцию $\varphi_1(x)$ и константы, входящие в условия задачи, при безграничном возрастании времени t решение этой задачи стремится к периодическому решению, найденному в п. 2.



Фиг. 4

Легко убедиться, что решение рассматриваемой задачи, если оно существует, можно записать в виде рядов

$$u_1^{(i+1)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^{(i+1)}\exp\left\{-\lambda_n^2\left(t-\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}\right)\right\}-\right. \tag{4.2}$$

$$\left.-c\alpha_n\left\{1-\exp\left[-\lambda_n^2\left(t-\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}\right)\right]\right\}\right]\sin\frac{\pi nx}{l}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}\leqslant t\leqslant\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}+T_1^{(i+1)},\quad i=0,1,2,3,\ldots,T^{(0)}=0\right)$$

$$u_2^{(i+1)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n^{(i+1)}\exp\left\{-\lambda_n^2\left(t-\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}-T_1^{(i+1)}\right)\right\}+\right. \tag{4.3}$$

$$\left.+d\alpha_n\left\{1-\exp\left[-\lambda_n^2\left(t-\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}-T_1^{(i+1)}\right)\right]\right\}\right]\sin\frac{\pi nx}{l}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}+T_1^{(i+1)}\leqslant t\leqslant\sum_{j=0}^{i}T^{(j)}+T^{(i+1)},\quad i=0,1,2,3,\ldots\right)$$

Здесь $A_n^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi_1(\xi)$, величины $T_1^{(i)}$ и $T^{(i)}-T_1^{(i)}$ — корни уравнений

$$u_1^{(i+1)}\left(x^\circ,\ \sum_{j=0}^{i}T^{(j)}+T_1^{(i+1)}\right)=u_*,\quad u_2^{(i+1)}\left(x^\circ,\ \sum_{j=0}^{i}T^{(j)}+T^{(i+1)}\right)=u_{**} \tag{4.4}$$

(u_* и u_{**} даны формулами (2.15) — (2.16)), которые в силу (4.2) и (4.3) запишутся следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(i)}\sin\frac{\pi nx^\circ}{l}=u_*,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(i+1)}\sin\frac{\pi nx^\circ}{l}=u_{**}\qquad(i=1,2,3,\ldots) \tag{4.5}$$

а функции $B_n^{(i)}$ и $A_n^{(i+1)}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ связаны соотношениями

$$B_n^{(i)}=-c\alpha_n(1-\beta_n^{(i)})+\beta_n^{(i)}A_n^{(i)},\quad A_n^{(i+1)}=d\alpha_n(1-\gamma_n^{(i)})+\gamma_n^{(i)}B_n^{(i)} \tag{4.6}$$

$$(\beta_n^{(i)}=\exp[-\lambda_n^2T_1^{(i)}],\quad \gamma_n^{(i)}=\exp[-\lambda_n^2(T^{(i)}-T_1^{(i)})])$$

Из (4.2) и (4.3) ясно, что при $t\to\infty$ $u_1^{(i+1)}(x^\circ,t)\to cU_\infty$

$$u_2^{(i+1)}(x^\circ,t)\to-dU_\infty\qquad\left(U_\infty=\frac{x^\circ}{2a^2l}\left(1-\frac{x^\circ}{l}\right)\right)$$

Будем считать, как и в п. 2, что выполнены неравенства $-dU_\infty<u_*<cU_\infty$, $-dU_\infty<u_{**}<cU_\infty$, т. е. $-U_\infty<(u_*-u_{**})/(c+d)=(h_*-h_{**})/(c+d)<U_\infty$.

Чтобы значения u_* и u_{**} были достижимы в конечные моменты времени, достаточно выполнения неравенств

$$\varphi_1(x^\circ)<u_*,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(i)}\sin\frac{\pi nx^\circ}{l}=u_*>u_{**}\qquad(i=1,2,3,\ldots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(i)}\sin\frac{\pi nx^\circ}{l}=u_{**}<u_*\qquad(i=2,3,\ldots)$$

Считая $u_*-u_{**}>(c+d)\,pU_\infty$ (p — некоторая константа), получим $0<\beta_n^{(j)}<1$, $0<\gamma_n^{(j)}<1$ $(j=1,2,\ldots)$. Учитывая, что $\alpha_{2k}=0$ $(k=1,2,3,\ldots)$,

$$\beta_n^{(i)}=(\beta_1^{(i)})^{n^2},\ \gamma_n^{(i)}=(\gamma_1^{(i)})^{n^2}$$

из формулы (4.5), (4.6) ясно, что при достаточно больших значениях i практически можно находить константы $T_1^{(i)}$ и $T^{(i)} - T_1^{(i)}$ из уравнений

$$\mathring{B}_1^{(i)} \sin\frac{\pi x^\circ}{l} + \mathring{B}_3^{(i)} \sin\frac{3\pi x^\circ}{l} = u_* - cU_\infty, \quad \mathring{A}_1^{(i)} \sin\frac{\pi x^\circ}{l} + \mathring{A}_3^{(i)} \sin\frac{3\pi x^\circ}{l} =$$

$$= u_{**} + dU_\infty \qquad (B_n^{(i)} = -c\alpha_n + \mathring{B}_n^{(i)}, \quad A_n^{(i)} = d\alpha_n + \mathring{A}_n^{(i)}) \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) найдем уравнения для нахождения величин $\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i)}$

$$\beta_1^{(i)} = \beta_1^{(0)} + A\beta_1^{(i)} [(\gamma_1^{(i-1)})^9 + (\beta_1^{(i)})^8], \quad \gamma_1^{(i)} = \gamma_1^{(0)} + B\gamma_1^{(i)} [(\beta_1^{(i)})^9 + (\gamma_1^{(i)})^8] \tag{4.8}$$

Здесь $\beta_1^{(0)}$, $\gamma_1^{(0)}$, A, B — некоторые константы, причем знак A и B совпадает со знаком $\sin 3\pi x^\circ/l$. Из условий $0 < \beta_1^{(0)} < 1$, $0 < \gamma_1^{(0)} < 1$ следуют неравенства:

$$a_1 > -\mu_1, \quad a_1 > \mu_2, \quad \mu_2 - \mu_1 < a_1 \qquad \left(\mu_1 = u_* - cU_\infty, \mu_2 = u_{**} + dU_\infty, \; a_i = -(c+d)\,\alpha_i \sin\frac{i\pi x^\circ}{l}\right)$$

Если либо $A < 0$, $B < 0$, либо $0 < A < 1$, $0 < B < 1$, $\beta_1^{(0)} + 2A < 1$, $\gamma_1^{(0)} + 2B < 1$, откуда следуют неравенства

$$\mu_2 < a_1 + a_3, \quad \mu_1 > -a_1 - a_3, \quad \mu_2 - \mu_1 < a_1 + 2a_3$$

то из уравнений (4.7) можно найти $0 < \beta_1^{(i)} < 1$ и $0 < \gamma_1^{(i)} < 1$, причем величины $\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i)}$ образуют монотонные последовательности, ограниченные сверху и снизу, и, следовательно, по теореме Вейерштрасса имеют пределы β_1 и γ_1. Подставляя значения β_1 и γ_1 в (4.7) и (4.8), видим, что эти формулы практически совпадают тогда с формулами (2.11), (2.8) для периодического решения задачи.

Таким образом, при выполнении приведенных выше неравенств решение задачи (1.3)—(1.5) с начальным условием (4.1) стремится при неограниченном возрастании времени t к периодическому решению (2.7), (2.8), (2.10).

Поступила 20 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы. Ж. техн. физ., 1934, т. 6, вып. 1.
2. Витт А. А. К теории скрипичной струны. Ж. техн. физ., 1936, т. 6, вып. 9. Дополнение и поправка к моей работе «Колебания скрипичной струны». Ж. техн. физ., 1937, т. 7, вып. 5.
3. Андронов А. А., Аронович Г. В. К теории гидравлического тарана. Инж. сб., 1954, т. 20.
4. Неймарк Ю. И., Кубланов И. М. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, вып. 1.
5. Горьков Ю. П. О периодических решениях параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 7.
6. Кочина Н. Н. Об одном решении нелинейного уравнения диффузии. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
7. Кочина Н. Н. О решении одной задачи диффузии с нелинейным граничным условием. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 2.
8. Кочина Н. Н. Некоторые решения неоднородного уравнения диффузии. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.