

**О ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ТЕОРИИ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

*А. М. Жуковец (Ленинград)*

Рассматриваются результаты, получаемые по теории прогрессивных волн малой амплитуды и при использовании некоторых основных решений по волнению конечной высоты.

Материалы теоретических расчетов сопоставляются с имеющимися опытными данными.

Установлено, что наиболее близкое совпадение теоретического и опытного профиля двумерной волны достигается построениями по графикам М. П. Кожевникова [1] и по уравнениям движения второго приближения по высоте волны в форме, предложенной Миш [2]. Для скорости частиц, избыточного давления, потока энергии и энергии одной волны найдены и указаны в тексте пределы целесообразного использования расчетных формул теории волн малой амплитуды и теории второго приближения по высоте волны.

При решении практических задач, связанных с волновым движением на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости и его воздействием на препятствия, обычно пользуются теорией потенциальных волн бесконечно малой амплитуды. Для этого вида волнового движения, в случае прогрессивных волн на воде конечной глубины, проекции скорости на оси координат и переменная часть местного давления определяются по формулам [3, 4]

$$v_x = \frac{\sigma h}{2} \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\sigma t - kx) \quad (1)$$

$$v_z = \frac{\sigma h}{2} \frac{\operatorname{sh} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx) \quad (2)$$

$$p = \frac{\rho g h}{2} \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{ch} kH} \cos(\sigma t - kx) \quad (3)$$

Здесь  $h$  — высота волны,  $\lambda$  — длина волны,  $\tau$  — период волны,  $H$  — глубина воды,  $\rho$  — плотность воды,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $z$  — вертикальная координата, принимаемая со знаком минус вниз от статического уровня,  $x$  — горизонтальная координата, расположенная на уровне статического горизонта.

Линейная теория волн малой амплитуды проста и очень удобна для использования в практических целях. Многие ценные результаты получены на основе этой теории. Но ввиду допущений, принятых при разработке, необходимо более определенно установить пределы целесообразного ее использования и одновременно указать, какими решениями следует пользоваться в тех случаях, когда теория не обеспечивает требуемой точности.

Известно, что одним из основных показателей соответствия теории волн рассматриваемым явлением является хорошее совпадение расчетных и фактических профилей взволнованной поверхности воды. Для осуществления указанного сопоставления в гидроволновом лотке, имеющем размеры  $40 \times 1.0 \times 1.2$  м и остекленные боковые стенки, была выполнена серия опытов по фиксации профилей волн при помощи фотосъемки и кино съемки. Кроме того, были проделаны построения профилей волн трохлоидального вида, малой амплитуды, по данным М. П. Кожевникова, а также по следующим зависимостям:

1. Стоксу [5]

$$\eta_0 = \frac{h}{2} \cos kx - \frac{kh^2}{16} \frac{\operatorname{ch} kH}{\operatorname{sh}^3 kH} (\operatorname{ch} 2kH + 2) \cos 2kx. \quad (4)$$

2. А. И. Некрасову [6]

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi} \theta - \frac{h}{2} \operatorname{ctn} \frac{2\pi H}{\lambda} \sin \theta, \quad z = \frac{h}{2} \cos \theta \quad (5)$$

3. Мишу [2]

$$x = x_0 + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} k(H+z_0)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx_0) - \frac{kh^2}{16} \frac{\operatorname{sh} 2(\sigma t - kx_0)}{\operatorname{sh}^2 kH} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch} 2k(H+z_0)}{\operatorname{sh}^2 kH} \right]$$

$$z = z_0 + \frac{h}{2} \frac{\operatorname{sh} k(H+z_0)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\sigma t - kx_0) + \frac{kh^2}{16} \frac{\operatorname{sh} 2k(H+z_0)}{\operatorname{sh}^2 kH} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\cos 2(\sigma t - kx_0)}{\operatorname{sh}^2 kH} \right]$$

Здесь  $\eta_0$  — возвышение взволнованной поверхности над статическим уровнем,  $x$  и  $z$  — уравнения профиля волны.

М. П. Кожевников [4] построение профилей потенциальных волн и определение характеристик волнового движения производил путем подбора при помощи метода электрогидродинамических аналогий (прибора ЭГДА).

Из рассмотрения уравнений (5) и (6) видно, что теория А. И. Некрасова линейная, а по Мишу учитываются члены до второго приближения по высоте волны. В этом заключается основное их различие.

А. И. Некрасов считал свою теорию справедливой только для очень пологих волн  $h/\lambda \leq 1/38$ .

На фиг. 1 в качестве примера приведены опытные и расчетные профили волн при  $h = 4.25$  см,  $\lambda = 50$  см,  $H = 9.5$  см, где соответствующие кривые: опытный — 1, Кожевникову — 2, Мишу — 3, линейной теории — 4, Некрасову — 5, Стоксу — 6, трохойдальной теории — 7.

Здесь и в других случаях получено, что наилучшее приближение к опытным данным обеспечивается построениями по графикам М. П. Кожевникова и вычислениями по Мишу. К сожалению, М. П. Кожевников не приводит расчетных формул для скорости частиц жидкости и избыточного давления, соответствующих полученным им волновым профилям. Ввиду

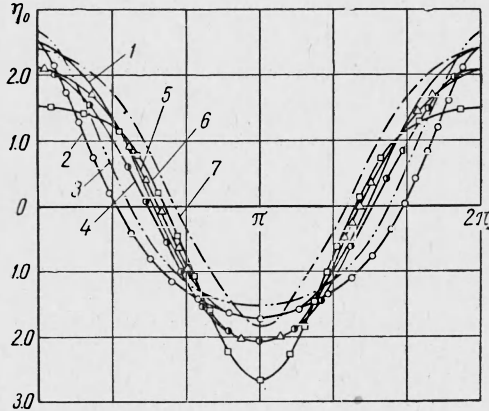


Рис. 1

этого для поставленных целей воспользуемся уравнениями движения в форме, предложенной Мишем. Эти уравнения использовались уже Д. Д. Лапшо [7], В. В. Хаперским, Г. Г. Метелицыной [8] при определении величины волнового давления на некоторые типы морских гидротехнических сооружений.

Указанные зависимости имеют следующий вид [2]:

$$v_x = \frac{sh}{2} \frac{ch k(H+z)}{sh kH} \cos(\sigma t - kx) + \frac{3ksh^2}{16} \frac{ch 2k(H+z)}{sh^4 kH} \cos 2(\sigma t - kx) \quad (7)$$

$$v_z = -\frac{sh}{2} \frac{sh k(H+z)}{sh kH} \sin(\sigma t - kx) - \frac{3ksh^2}{16} \frac{sh 2k(H+z)}{sh^4 kH} \sin 2(\sigma t - kx) \quad (8)$$

$$p = \frac{\rho gh}{2} \frac{ch k(H+z)}{ch kH} \cos(\sigma t - kx) + \frac{3\rho gkh^2}{16} \frac{th kH}{sh^4 kH} \frac{ch 2k(H+z)}{sh^4 kH} \cos 2(\sigma t - kx) - \frac{\rho gkh^2}{16} \frac{th kH}{sh^2 kH} \frac{ch 2k(H+z)}{sh^2 kH} - \frac{\rho gkh^2}{16} \frac{th kH}{sh^2 kH} \cos 2(\sigma t - kx) + \frac{\rho gkh^2}{16} \frac{th kH}{sh^2 kH} \quad (9)$$

Эти уравнения справедливы, когда при  $h/\lambda \geq 0.146$  ограничений по крутизне волны нет.

В приведенном виде формула (9) была получена Бизелем [9], используя ранее имевшееся решение Миша, которое было записано в несколько иной форме.

Из рассмотрения вторых членов в правой части уравнений (7), (8) и сопоставления этих зависимостей с выражениями (1), (2) видно, что осредненные за период волны численные значения для скорости частиц жидкости, полученные по формулам первого и второго приближений, между собой равны. И наоборот, для отдельных моментов по фазе волнения вычисленные значения скорости частиц могут иметь существенное различие в зависимости от того — пользоваться ли для этой цели формулами (1), (2) или (7), (8).

Это показано на фиг. 2, где для всего периода волны помещены результаты вычисления (скоростей в см/сек и давления  $\rho v$  в г/см<sup>2</sup>) по формулам (1)–(3) и (7)–(9), при  $z=0$ ,  $h=12.1$  см,  $\lambda=245$  см,  $H=36$  см. Здесь на отдельных графиках изображены: а — вертикальные проекции скорости частиц; б — го-

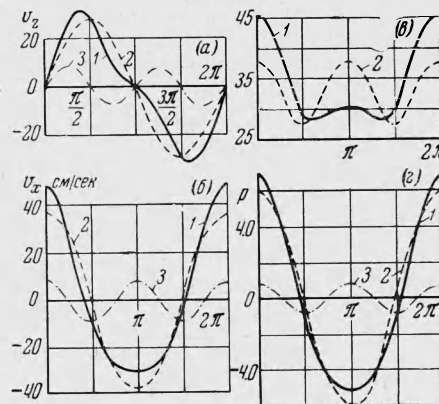
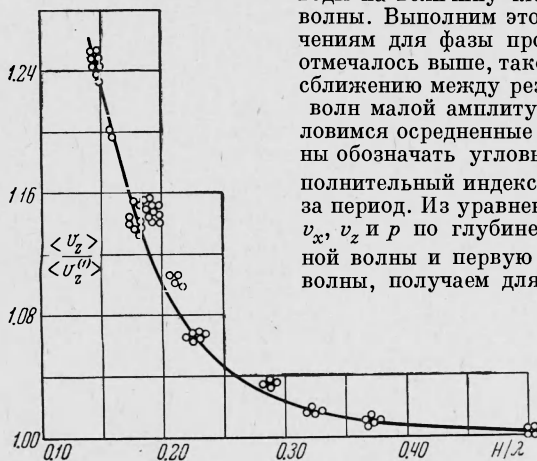


Рис. 2

ризонгальные проекции скорости частиц;  $b$  — орбитальные скорости;  $g$  — избыточное волновое давление. И соответственно построения для второго приближения — 1; линейной теории — 2; поправки на второе приближение — 3. На всех графиках и особенно в видно, что в отдельные фазы периода волны влияние членов второго приближения проявляется весьма существенно. Интересно рассмотреть влияние относительной глубины воды на величину членов второго приближения по высоте волны. Выполним это применительно к осредненным значениям для фазы прохождения гребня волны, хотя, как отмечалось выше, такое осреднение приводит к некоторому сближению между результатами, получаемыми по теориям волн малой амплитуды и конечной высоты. При этом условимся осредненные величины по глубине и за период волны обозначать угловыми скобками, например,  $\langle v_x \rangle$ , дополнительный индекс  $\tau$  будет указывать осреднение только за период. Из уравнений (7) — (9), произведя осреднение  $v_x$ ,  $v_z$  и  $p$  по глубине, за первую четверть периода основной волны и первую четверть периода накладывающейся волны, получаем для гребня волны



Фиг. 3

$$\langle v_x \rangle = \frac{h\lambda}{\pi\tau H} + \frac{3h^2 \operatorname{ch} kH}{4\tau H \operatorname{sh}^3 kH}$$

$$\langle v_z \rangle = -\frac{h\lambda}{\pi\tau H} \frac{(\operatorname{ch} kH - 1)}{\operatorname{sh} kH} - \frac{3h^2 (\operatorname{ch} 2kH - 1)}{8\tau H \operatorname{sh}^4 kH} \quad (11)$$

$$\langle p \rangle = \frac{\rho g h \operatorname{th} kH}{\pi kH} + \frac{3\rho g h^2}{8\pi H \operatorname{sh}^2 kH} - \frac{\rho g h^2}{16H} - \frac{\rho g k h^2}{4\pi \operatorname{sh} 2kH} + \frac{\rho g k h^2}{8 \operatorname{sh} 2kH} \quad (12)$$

В (10) — (12) первые члены правой части равны осредненным зависимостям для гребня волны, получаемым по теории волн малой амплитуды, а последующие члены содержат поправку, учитывающую вычисления до второго приближения по высоте волны. Значение добавочных членов для  $\langle v_z \rangle$  по (11) показано на фиг. 3, где  $\langle v_z^{(1)} \rangle$  — первый член правой части уравнения (11). На фигуре нанесены расчетные точки, разброс которых характеризует влияние крутизны волны. Хорошо видно, что оно невелико. Следовательно, учитывать это влияние путем построения дополнительных кривых, по-видимому, нецелесообразно. Аналогичные кривые можно построить для  $\langle v_x \rangle$  и  $\langle p \rangle$ .

Установлено, что при большой относительной глубине воды добавочные члены в формулах (10) — (12) имеют малые значения. Практически ими можно пренебрегать, если  $H/\lambda > 0.20$ , так как в этом случае расхождение между вычислениями по формулам первого и второго приближений составляет менее 10%.

График	$H$ , см	$h$ , см	$\lambda$ , см	$H/\lambda$
(а)	14.5	6.0	107	0.135
(б)	13.6	4.9	75	0.18
(в)	60.0	5.2	140	0.43



Фиг. 4

Расчетные и полученные опытные данные о распределении по глубине скорости движения частиц воды в прогрессивной волне приведены на фиг. 4 для условий, указанных в таблице.

На фиг. 4 по оси ординат отложена глубина воды от статического уровня, отмеченного  $\nabla 0.0$ , а по оси абсцисс — соответствующая ей орбитальная скорость. При этом кривые нанесены для следующих условий: опытные, осредненные для всего периода волны, 1; по теории волн малой амплитуды или конечной амплитуды и осредненные по своим значениям для всей фазы волны (что, как уже отмечалось выше, приводит к одинаковым результатам) 2. Кривые 1 и 2 занимают близкие положения, что подтверждает удовлетворительное совпадение по всей глубине воды осредненных за период волны опытных и расчетных данных.

Несколько иначе обстоит вопрос, если рассматривать распределение по глубине осредненных по времени орбитальных скоростей в отдельности для гребня и впадины волны. В этом случае по теории волн конечной амплитуды, ввиду влияния членов второго приближения, скорость изменяет свою величину при движении по орбите. Например, по решению Миса второго приближения для гребня волны (фиг. 4, кривая 3) имеем

$$\langle v_{x\tau} \rangle = \frac{\sigma h}{\pi} \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} + \frac{3k\sigma h^2}{8\pi} \frac{\operatorname{ch} 2k(H+z)}{\operatorname{sh}^4 kH} \quad (13)$$

$$\langle v_{z\tau} \rangle = -\frac{\sigma h}{\pi} \frac{\operatorname{sh} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} - \frac{3k\sigma h^2}{8\pi} \frac{\operatorname{sh} 2k(H+z)}{\operatorname{sh}^4 kH} \quad (14)$$

и соответственно для впадины волны (кривая — 4)

$$\langle v_{x\tau} \rangle = \frac{\sigma h}{\pi} \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} - \frac{3k\sigma h^2}{8\pi} \frac{\operatorname{ch} 2k(H+z)}{\operatorname{sh}^4 kH}$$

$$\langle v_{z\tau} \rangle = -\frac{\sigma h}{\pi} \frac{\operatorname{sh} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} + \frac{3k\sigma h^2}{8\pi} \frac{\operatorname{sh} 2k(H+z)}{\operatorname{sh}^4 kH} \quad (15)$$

Разница в значении орбитальных скоростей под гребнем и впадиной волны становится особенно ощутимой, когда  $H/\lambda \leq 0.2$ , что хорошо заметно при сопоставлении кривых 3 и 4 (фиг. 4).

Полезно сопоставить формулы первого и второго приближений и в энергетическом отношении. Например, при решении многих задач по волновому движению жидкости бывает необходимым определять перенос энергии прогрессивной волной. Для указанных целей обычно используется формула, полученная из теории волн бесконечно малой амплитуды. Она имеет вид [10,11]

$$W_c = \frac{\rho g h^2 c}{16} \left( 1 + \frac{4\pi H}{\lambda \operatorname{sh}(4\pi H/\lambda)} \right) \quad (16)$$

Здесь  $c$  — скорость распространения волны. С учетом второго приближения записимость для переноса энергии прогрессивной волной можно получить следующим путем. Как известно по основной теореме гидродинамики

$$W_c = \int_0^\tau dt \int_{-H}^0 p v_x dz \quad (17)$$

Отсюда, используя уравнения (7) и (9), после преобразования получаем

$$W_c = \frac{\rho g h^2 c}{16} \left( 1 + \frac{4\pi H}{\lambda \operatorname{sh}(4\pi H/\lambda)} \right) + \frac{\rho \sigma^3 h^3}{48\pi k \operatorname{sh}^4(2\pi H/\lambda)} \times$$

$$\times \left[ 2 \operatorname{ch}^2 \frac{2\pi H}{\lambda} \left( 3.0 - \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi H}{\lambda} \right) - \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi H}{\lambda} \right] \quad (18)$$

В (18) второй член правой части является следствием учета второго приближения по высоте волны.

Только при  $H/\lambda = 0.2$  результаты вычислений по формулам (16) и (18) очень близки между собой, так как в этом случае дополнительный член в (18) пренебрежимо мал. Когда  $H/\lambda > 0.2$ , данные по (16) превышают значения по (18).

Например, для  $H/\lambda \geq 0.4$  расхождение составляет 12%.

В случае  $H/\lambda < 0.2$  наблюдается обратное явление, и поток энергии по (18) становится заметно большим, чем по (16). При  $H/\lambda = 0.145$  это увеличение уже достигает 10%, что ощутимо.

Одновременно с переносом волновой энергии интересно сопоставить и общую энергию, заключенную в одной волне.

Как известно, для прогрессивной волны кинетическая энергия равна [10,11]

$$\tau = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx \quad (19)$$

Для рассматриваемого вида волнового движения (второе приближение по высоте волны) потенциал скорости

$$\varphi = -\frac{\sigma h}{2k} \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx) - \frac{3\sigma h^2}{32} \frac{\operatorname{ch} 2k(H+z)}{\operatorname{sh}^4 kH} \sin 2(\sigma t - kx) \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) для всей глубины воды, получаем

$$\tau = \frac{\rho g h^2 \lambda}{16} + \frac{\rho g \pi^2 h^4}{28.5 \lambda} \frac{\operatorname{ch} 2kH}{\operatorname{sh}^6 kH} \quad (21)$$

Потенциальная энергия одной волны

$$V = \frac{\rho g}{2} \int_0^\lambda z^2 dx \quad (22)$$

Здесь для рассматриваемого случая

$$z = \frac{h}{2} \cos(\sigma t - kx_0) + \frac{kh^2}{16} \frac{\operatorname{sh} 2kH}{\operatorname{sh}^2 kH} \left[ 1 + \frac{3\cos 2(\sigma t - kx_0)}{2\operatorname{sh}^2 kH} \right] \quad (23)$$

В (23) величина  $x_0$  — горизонтальная координата частиц воды в состоянии покоя, а не горизонтальная координата профиля волны, но при интегрировании в принятых пределах это не влияет на получаемый результат.

Подставляя (23) в (22), имеем

$$V = \frac{\rho g h^2 \lambda}{16} + \frac{\rho g \pi^2 h^4}{32 \lambda} \operatorname{cth}^2 kH + \frac{\rho g \pi^2 h^4}{14.25 \lambda} \frac{\operatorname{cth}^2 kH}{\operatorname{sh}^4 kH} \quad (24)$$

Отсюда для рассматриваемого случая суммарная энергия одной волны равна

$$E = \frac{\rho g h^2 \lambda}{8} + \frac{\rho g \pi^2 h^4}{\lambda} \left( \frac{\operatorname{cth}^2 kH}{32} + \frac{\operatorname{sh}^2 kH + 3\operatorname{ch}^2 kH}{28.5 \operatorname{sh}^6 kH} \right) \quad (25)$$

Как известно, первый член правой части (25) равен энергии одной волны по теории волн малой амплитуды. Следовательно, для волн конечной высоты рассматриваемого вида энергия, содержащаяся между двумя вертикальными створами, расположенными друг от друга на расстоянии  $\lambda$ , несколько больше, чем для волн бесконечно малой амплитуды.

Результаты вычислений по (25) дают основание считать, что для указанного вида волн конечной амплитуды поправки, учитывающие увеличение энергии по сравнению с волнами малой высоты, заметно сказываются только в тех случаях, когда на малой относительной глубине распространяются крутые волны. В этих условиях разница в энергии одной волны может достигнуть 18%. Если же волна пологая, то даже при малой относительной глубине воды второй член в правой части формулы (25) имеет незначительную величину.

Поступила 24 VII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К о ж е в н и к о в М. П. Построение волн и определение характеристик волнового движения посредством приближенного метода при горизонтальном дне. Научно-технический информационный бюллетень № 11, гидротехника, Изд. Ленингр. политехн. ин-та им. Калинина, 1959.
2. M i c h M. Mouvements ondulatoires de lamer en profondeur constante on decroissante Ann. ponts et chaussees. 1944, 114.
3. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е Н. В. Теоретическая гидромеханика. ч. 1, 1955.
4. С р е т е н с к и й Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, 1936.
5. S t o k e s G. G. On the theory of ascillatory waves. Math. and Phys. Papers, 1847, vol. 1.
6. Н е к р а с о в А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Изд-во АН СССР, 1951.
7. Л а п и о Д. Д. Силовое воздействие гравитационных волн при обтекании гидротехнических сооружений. Изд-во АН СССР, 1962.
8. М е т е л и ц ы н а Г. Г. Исследование давления стоячей воды на вертикальную стенку. Тр. Центр. н.-и. ин-та эксплуатации водн. транс-та, 1960, вып. 19.
9. B i e s e l F. Equation generales au second ordre de la houle irreguliere. La Haille Blanche, 1952, № 3.
10. С т о к е р Дж. Дж. (редакция Лаврентьева М. А., Моисеева Н. Н.). Волны на воде. Изд-во иностр. литер., 1959.
11. Л а м б Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.