УДК 532.516

ЗАДАЧА О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Рассматривается ряд задач о движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии точечного источника в области течения. Соответствующие начально-краевые задачи для уравнений Навье — Стокса не имеют решения в стандартном классе функций, так как поле скоростей течения содержит бесконечный интеграл Дирихле. Проведенная регуляризация задачи позволяет доказать ее разрешимость при некоторых ограничениях на входные данные.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, точечный источник.

DOI: 10.15372/PMTF20190202

Введение. В данной работе рассматриваются решения $\boldsymbol{v}$, p уравнений Навье — Стокса

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, содержащей начало координат. Здесь $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; p — отношение давления к постоянной плотности жидкости; $\nu = \mathrm{const} > 0$ — кинематическая вязкость. При записи системы (1) предполагалось, что на жидкость не действуют внешние массовые силы. Если эти силы потенциальны, то систему уравнений Навье — Стокса можно привести к виду (1) простым преобразованием функции давления.

Система (1) имеет класс решений с потенциальным полем скоростей

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi, \qquad \phi_t + |\nabla \phi|^2/2 + p = C(t), \tag{2}$$

где ϕ — произвольная гармоническая функция в пространстве $\mathbb{R}^n$; $C(t)$ — произвольная функция. Выбирая в качестве ϕ фундаментальное решение уравнения Лапласа, получаем решение системы (1) в $\mathbb{R}^n$, обладающее точечными особенностями. Если $n = 2$, то $\phi = (2\pi)^{-1} \log(|\boldsymbol{x}|)^{-1}$, а если $n = 3$, то $\phi = (4\pi|\boldsymbol{x}|)^{-1}$. Поле скоростей, соответствующее точечному источнику или стоку, на плоскости интенсивности $q(t)$ в полярных координатах r, φ имеет компоненты $v_r = q(t)(2\pi r)^{-1}$, $v_\varphi = 0$. Поле скоростей источника или стока в пространстве задается формулами

$$v_R = Q(t)R^{-2}/(4\pi), \qquad v_\theta = 0, \qquad v_\varphi = 0,$$

где R, θ, φ — сферические координаты; $Q(t)$ — интенсивность источника или стока. Случаи $q > 0$, $Q > 0$ соответствуют наличию источника в начале координат, случаи $q < 0$,

$Q < 0$ — наличию стока. Использование различных обозначений интенсивности источника обусловлено тем, что эта величина имеет различные размерности на плоскости и в пространстве ($m^2 s^{-1}$ и $m^3 s^{-1}$ соответственно). Функции $q(t)$ и $Q(t)$ полагаются заданными.

Ниже рассматриваются решения системы (1), определенные в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Σ. На границе области задано поле скоростей

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(x,\, t), \qquad x \in \Sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

В начале координат задается особенность решения

$$v_r = \frac{q(t)}{2\pi r} + O(1), \qquad v_\varphi = O(1), \qquad r \to 0 \tag{4}$$

в плоском случае и

$$v_R = \frac{Q(t)}{4\pi R^2} + O(1), \qquad v_\theta = O(1), \qquad v_\varphi = O(1), \qquad R \to 0 \tag{5}$$

в пространственном случае. В силу уравнения неразрывности должны быть выполнены условия

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\Sigma = q(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{6}$$

в плоском случае и

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\Sigma = Q(t), \qquad t \geqslant 0 \tag{7}$$

в пространственном случае. Здесь $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к кривой или поверхности Σ. Дополнительно задается начальное условие

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{8}$$

Кроме того, ставятся условия согласования

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \boldsymbol{a}(x, 0) = \boldsymbol{v}_0(x), \quad x \in \Sigma. \tag{9}$$

1. Плоская стационарная задача. Выше сформулированы две начально-краевые задачи для системы (1), первая из которых (задача (3), (4), (8)) соответствует плоским движениям, а вторая (задача (3), (5), (8)) — пространственным движениям. Насколько известно автору данной работы, эти задачи до сих пор не исследовались. Однако стационарный аналог первой задачи изучался в работах [1, 2]. В этом случае интенсивность источника q постоянна, решение $\boldsymbol{v}$, p системы (1) и функция $\boldsymbol{a}$ в условии (3) не зависят от t, а начальное условие (8) не задается. При рассмотрении указанной задачи в работах [1, 2] использовались различные подходы, но результаты оказались одинаковыми. Пусть $\Sigma \in C^\infty$ — жорданова кривая, содержащая начало координат, и выполнено условие $\boldsymbol{a} \in C^{3+\beta}(\Sigma)$, $0 < \beta < 1$.

Предложение 1. Если выполнено неравенство $|q| < 2\pi\nu$, то задача (3), (4) имеет, по крайней мере, одно решение.

Условия гладкости для кривой Σ и функции $\boldsymbol{a}$ можно ослабить. Смысл, в котором понимается решение задачи, указан далее. Ниже приводятся основные положения доказательства предложения 1, изложенного в работе [2].

Введем искомые функции

$$w_r = v_r - \frac{q}{2\pi r}, \qquad w_\varphi = v_\varphi, \qquad \bar{p} = p + \frac{q^2}{8\pi^2 r^2}. \tag{10}$$

Вследствие (1), (10) вектор $\boldsymbol{w}$ и функция $\bar{p}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&w_r\,\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\,w_\varphi\,\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}-\frac{1}{r}\,w_\varphi^2+\frac{q}{2\pi r}\,\frac{\partial w_r}{\partial r}-\frac{q}{2\pi r^2}\,w_r=\\
&\qquad=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}+\nu\Big(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{r^2}\,w_r-\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}\Big),\\
&w_r\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\,w_\varphi\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\,w_r\,w_\varphi+\frac{q}{2\pi r}\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial r}+\frac{q}{2\pi r^2}\,w_\varphi=\\
&\qquad=-\frac{1}{r}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi}+\nu\,\Big(\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{r^2}\,w_\varphi+\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Big),\\
&\qquad\qquad\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\,w_r+\frac{1}{r}\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}=0.
\end{aligned}\tag{11}$$

Условие (3) в новых обозначениях записывается в виде

$$\boldsymbol{w}=\tilde{\boldsymbol{a}}(x),\qquad x\in\Sigma,\tag{12}$$

где компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{a}}$ имеют вид $\tilde{a}_r=a_r-q/(2\pi r)$, $\tilde{a}_\varphi=a_\varphi$. В силу (6), (10) этот вектор удовлетворяет условию нулевого потока

$$\int\limits_\Sigma \tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Sigma=0.\tag{13}$$

Условие (13) позволяет переформулировать задачу (11), (12) для функции тока $\psi(r,\varphi)$, связанной с компонентами вектора $\boldsymbol{w}$ соотношениями

$$w_r=\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\qquad w_\varphi=-\frac{\partial\psi}{\partial r}.\tag{14}$$

(Ранее, до выделения сингулярной составляющей поля скоростей, переход к функции тока не имел смысла, так как функция тока точечного источника в плоской задаче является многозначной функцией.) Функция тока удовлетворяет уравнению

$$\nu\Delta^2\psi-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta\psi,\psi)}{\partial\,(r,\varphi)}-\frac{q}{2\pi r}\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial r}=0.\tag{15}$$

Краевые условия (12) с использованием функции тока записываются в виде

$$\psi=a(x),\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n}=b(x),\qquad x\in\Sigma.\tag{16}$$

Функции a, b выражаются через компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{a}}$. Если компоненты $\tilde{\boldsymbol{a}}$ принадлежат классу $C^{3+\beta}(\Sigma)$, то верны включения $a\in C^{4+\beta}(\Sigma)$, $b\in C^{3+\beta}(\Sigma)$.

Перейдем в задаче (15), (16) к новой искомой функции $\chi=\psi-f$, так чтобы выполнялись условия

$$f=a(x),\qquad \frac{\partial f}{\partial n}=b(x),\qquad x\in\Sigma.\tag{17}$$

Функция f выбрана ниже. Функция χ является решением краевой задачи

$$\nu\Delta^2\chi-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta\chi,\chi)}{\partial\,(r,\varphi)}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta\chi,f)}{\partial\,(r,\varphi)}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta f,\chi)}{\partial\,(r,\varphi)}-\frac{q}{2\pi r}\,\frac{\partial\Delta\chi}{\partial r}=g,\quad x\in\Omega\setminus\{0\};\tag{18}$$

$$\chi=0,\qquad \frac{\partial\chi}{\partial n}=0,\qquad x\in\Sigma.\tag{19}$$

Здесь
$$g = -\nu\Delta^2 f + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(\Delta f, f)}{\partial\,(r,\varphi)} + \frac{q}{2\pi r}\,\frac{\partial \Delta f}{\partial r}. \tag{20}$$

Выберем число γ ($0 < \gamma < \operatorname{dist}(\Sigma, \{0\})$) и обозначим через Ω_γ двусвязную область, ограниченную кривой Σ и окружностью $r = \gamma$. Обозначим через $\mathring{H}^2(\Omega_\gamma)$ гильбертово пространство, полученное замыканием множества функций класса $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ в норме
$$\|\eta\|^2_{H^2} = \int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\eta^2_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\eta^2_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\,\eta^2_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\eta^2_r\Big) r\,dr\,d\varphi.$$
Пространство $\mathring{H}^2(\Omega_\gamma)$ является собственным подпространством класса Соболева $H^2(\Omega_\gamma)$ функций, которые имеют суммируемые с квадратом в области Ω_γ обобщенные производные до второго порядка включительно. Задавая условие стремления γ к нулю, получаем гильбертово пространство, которое обозначим $\mathring{H}^2_0(\Omega)$. Норма в этом пространстве определяется приведенным выше равенством, в котором область интегрирования заменяется на Ω. Функции $\eta \in \mathring{H}^2_0(\Omega)$ непрерывны в области $\bar{\Omega}$ и обращаются в нуль при $r = 0$. Имеет место оценка $|\eta| \leqslant C_0 r^\beta \|\eta\|_{H^2}$, $(r,\,\varphi) \in \bar{\Omega}$, $0 < \beta < 1$, где константа $C_0 = \text{const} > 0$ зависит от области Ω и показателя β. Нижний индекс в обозначении пространства $\mathring{H}^2_0(\Omega)$ указывает на то, что это пространство является собственным подпространством гильбертова пространства $\mathring{H}^2(\Omega)$.

Функцию $\chi \in \mathring{H}^2_0(\Omega)$ будем называть обобщенным решением задачи (18), (19), если для любого $\eta \in \mathring{H}^2_0(\Omega)$ выполнено интегральное тождество
$$\nu \int\limits_\Omega \Big(\chi_{rr}\eta_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\chi_{r\varphi}\eta_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\,\chi_{\varphi\varphi}\eta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\chi_r\eta_r\Big) r\,dr\,d\varphi + {}$$
$$+ \int\limits_\Omega \Big(\frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial(\chi,\eta)}{\partial(r,\varphi)} + \frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial(f,\eta)}{\partial(r,\varphi)} + \frac{\Delta f}{r}\,\frac{\partial(\chi,\eta)}{\partial(r,\varphi)} + \frac{q\Delta\chi}{2\pi r}\,\eta_r\Big) r\,dr\,d\varphi = \int\limits_\Omega g\eta r\,dr\,d\varphi. \tag{21}$$
Доказательство разрешимости задачи (18), (19) основано на получении априорной оценки ее решения. Для этого положим в тождестве (21) $\eta = \chi$. Тогда оно примет вид
$$\int\limits_\Omega \Big[\nu\Big(\chi^2_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\chi^2_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\,\chi^2_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\chi^2_r\Big) + \frac{q}{2\pi}\Big(\frac{\chi_r^2}{r^2} - \frac{\chi_\varphi^2}{r^4}\Big) + \frac{\Delta\chi}{r}\,\frac{\partial(f,\chi)}{\partial(r,\varphi)}\Big] r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_\Omega g\chi r\,dr\,d\varphi. \tag{22}$$
Далее, в соответствии с подходом, основанным на срезке Хопфа [3] и изложенным в работе [2], строится функция $f \in C^{4+\beta}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая условиям (17), причем для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство
$$\Big|\int\limits_\Omega \Delta\chi\,\frac{\partial\,(f,\chi)}{\partial(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi\Big| \leqslant \varepsilon\|\chi\|^2_{H^2}$$
для произвольного $\chi \in \mathring{H}^2_0(\Omega)$. Используя это неравенство и представление (20) функции g, получаем неравенство
$$\int\limits_\Omega \Big[\nu\Big(\chi^2_{rr} + \frac{2}{r^2}\,\chi^2_{r\varphi} + \frac{1}{r^4}\,\chi^2_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\chi^2_r\Big) - \frac{|q|}{2\pi}\Big(\frac{\chi_r^2}{r^2} + \frac{\chi_\varphi^2}{r^4}\Big)\Big] r\,dr\,d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|\chi\|^2_{H^2} + (\nu\|f\|_{H^2} + C_1\|f\|^2_{H^2})\|\chi\|_{H^2} \tag{23}$$

(C_k $(k = 1, 2, \dots)$ — положительные постоянные). В предположении $\varepsilon = (2\pi\nu - |q|)/(4\pi)$ из неравенства (23) следует оценка

$$\|\chi\|_{H^2} \leqslant 4\pi(2\pi\nu - |q|)^{-1}(\nu\|f\|_{H^2} + C_2\|f\|^2_{H^2}) = C_3. \tag{24}$$

Наличие только априорной оценки решения задачи (18), (19) не позволяет применить стандартные методы [3] для доказательства теоремы существования, поскольку уравнение (18) имеет особенность в начале координат. Для завершения доказательства необходимо регуляризировать задачу. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти решение уравнения (18) в области Ω_γ, удовлетворяющее условиям (19) и

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad x \in C_\gamma, \tag{25}$$

где C_γ — окружность радиусом γ с центром в начале координат; число γ определено выше. Введем в задаче (18), (19), (25) новую искомую функцию $\chi^{(\gamma)} = \psi - f^{(\gamma)}$. Функция $f^{(\gamma)}$ удовлетворяет условиям

$$f^{(\gamma)} = a(x), \quad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial n} = b(x), \quad x \in \Sigma, \qquad f^{(\gamma)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(\gamma)}}{\partial r} = 0, \quad x \in C_\gamma.$$

Решение задачи (18), (19), (25) также допускает априорную оценку (24), в которой функции χ и f заменены на $\chi^{(\gamma)}$ и $f^{(\gamma)}$ соответственно. Далее можно использовать известные результаты, подтверждающие разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений Навье — Стокса [3]. Переходя к пределу $\gamma \to 0$, получаем решение задачи (18), (19) $\psi \in H^2(\Omega)$, которому соответствует обобщенное решение задачи (3), (4), где компоненты вектора $\boldsymbol{w}$, связанного со скоростью $\boldsymbol{v}$ соотношениями (10), и модифицированное давление $\bar{p}$ принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega)$.

В данной работе не рассматривается вопрос о единственности решения задачи (3), (4). Результаты анализа более простой задачи об источнике в жидкости, заполняющей всю плоскость, позволяют предположить, что ее решение не единственно.

2. Автомодельные решения задачи об источнике. Уравнения (1) в плоском стационарном случае допускают семейство точных решений

$$v_r = \frac{\nu f(\varphi)}{r}, \qquad v_\varphi = 0, \qquad p = \frac{2v^2[f(\varphi) + c]}{r^2}, \tag{26}$$

где c — постоянная; функция f удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + f^2 + 4f = 4c. \tag{27}$$

Добавим к уравнению (27) условия

$$f(-\alpha) = f(\alpha) = 0; \tag{28}$$

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(\varphi)\, d\varphi = \frac{q}{2\pi\nu} \equiv \mathrm{Re}, \tag{29}$$

где q — заданная постоянная. Решение задачи (27)–(29) описывает течение в секторе $|\varphi| < \alpha$, вызванное источником или стоком мощностью q, расположенным в начале координат. Дополнительное нелокальное условие (29) необходимо для определения параметра c при заданном числе Рейнольдса Re.

Решения (26) впервые получены Дж. Б. Джеффри [4] и Г. Гамелем [5] и с тех пор интенсивно изучаются (см. работу [6] и библиографию к ней, а также работы [7–11]).

Пусть жидкость заполняет всю плоскость. В этом случае условия прилипания (28) не задаются, а на решение налагается условие периодичности по φ с периодом 2π. При этом условие расхода (29) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = \frac{q}{\nu} \equiv \mathrm{Re}\,. \tag{30}$$

Итак, требуется найти 2π-периодическое решение $f(\varphi)$ уравнения (27) и постоянную c, так чтобы выполнялось условие (30). Если $c = \mathrm{Re}^2 + 4\,\mathrm{Re}$, задача (27), (30) имеет простое решение $f = \mathrm{Re}$. В работе [9] установлено, что оно не единственно в классе периодических решений. При исследовании этой задачи как спектральной задачи относительно параметра Re в [9] обнаружено счетное множество ее собственных значений $\mathrm{Re}^*_m = \pi(m^2 - 4)$, $m = 1, 2, \ldots$. Установлено, что нетривиальные решения задачи существуют при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*_m$. Следует отметить, что и значение $\mathrm{Re} = 0$ является точкой бифуркации.

Данный случай подробно изучен в работе [11], в которой доказано существование счетного множества $\{c_k\}$, такого что при $c = c_k$ уравнение (27) имеет решение $f = f_k(\varphi)$, удовлетворяющее условию (30) с $q = 0$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ функция f_k периодическая с минимальным периодом $2\pi/k$. Амплитуда осцилляций f_k имеет порядок k^2.

Решения (26) являются стационарными автомодельными решениями уравнений Навье — Стокса. Если рассматривать нестационарные автомодельные решения, то получим решения системы (1) с полем скоростей

$$v_r = \frac{\nu F(\xi,\varphi)}{r}, \qquad v_\varphi = \frac{\nu G(\xi,\varphi)}{r}, \tag{31}$$

где $\xi = r(\nu t)^{-1/2}$ — автомодельная переменная; функции F и G связаны соотношением $\xi F_\xi + G_\varphi = 0$. На основе представления (31) формулируется автомодельная задача о течении в диффузоре с условиями прилипания на его стенках $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\alpha$. Поскольку задача нестационарная, требуется задать начальное поле скоростей, согласованное с условием автомодельности и уравнением неразрывности. Это условие формулируется в виде

$$rv_r \to \nu f(\varphi), \quad v_\varphi \to 0, \qquad r \to \infty, \quad -\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha,$$

где $f(\varphi)$ — решение задачи Джеффри — Гамеля (27)–(29) с заданным расходом q. Кроме того, задается условие, определяющее поведение решения в угловой точке:

$$rv_r \to \nu g(\varphi), \quad v_\varphi \to 0, \qquad r \to 0, \quad -\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha.$$

Здесь $g(\varphi)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию $g(\alpha) - g(-\alpha) = q/\nu$. Произвол в выборе функции g порождает многообразие решений нестационарной автомодельной задачи о движении в диффузоре. Эти решения подробно исследованы в работе [12] с использованием численных и аналитических методов.

Ниже рассматривается нестационарная автомодельная задача для системы (1) на всей плоскости. Эту задачу целесообразно переформулировать с использованием безразмерной функции тока $\psi(\xi,\varphi)$ и вспомогательной функции вихря $u(\xi,\varphi)$, которые связаны соотношениями

$$\Delta u + \frac{\xi}{2}\,u_\xi + u + \frac{\mathrm{Re}}{\xi}\,\frac{\partial(\psi,u)}{\partial(\xi,\varphi)} = 0, \qquad \Delta\psi = u, \tag{32}$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах ξ, φ на плоскости. При выводе уравнений (32) предполагалось, что расход жидкости в начале координат равен нулю. Это условие гарантирует однозначность функции ψ.

Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что краевое условие для системы (32) задается на бесконечности:

$$u = h(\varphi)\xi^{-2} + O(\xi^{-4}), \qquad \xi \to \infty. \tag{33}$$

Здесь $h(\varphi)$ — 2π-периодическая функция с нулевым средним из пространства Соболева $H^1(0, 2\pi)$. Норму в этом пространстве будем обозначать $\|h\|_{H^1(0,2\pi)}$, где

$$h = \sum_0^\infty (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

A_n, B_n — постоянные. Параметр Re, входящий в систему (32), в данном случае определяется как максимальное значение $|h|$. Далее этот параметр считается малым. Полагая $\mathrm{Re} = 0$, получаем линейную задачу определения функции $u(\xi, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u + \xi u_\xi/2 + u = 0 \tag{34}$$

в $\mathbb{R}^2$ и условию (33). Эта задача решается методом разделения переменных, т. е. решение ищется в виде

$$u = \sum_0^\infty w_n(\xi)(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{35}$$

где a_n, b_n — постоянные; функция w_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w_n}{d\xi^2} + \Big(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}\Big)\frac{dw_n}{d\xi} + \Big(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\Big) w_n = 0. \tag{36}$$

Уравнение (36) эквивалентно уравнению вырожденной гипергеометрической функции [13].

Будем искать решения уравнения (36), регулярные в точке $\xi = 0$. Такие решения имеют асимптотику

$$w_n = \xi^n + O(\xi^{n+2}), \qquad \xi \to 0 \tag{37}$$

(постоянный множитель в правой части опущен). Что касается поведения уравнения (36) на бесконечности, то все его решения ограничены при $\xi \to \infty$. Решения первого семейства допускают представление

$$w_n = c_n \xi^{-2} + O(\xi^{-4}), \qquad \xi \to \infty, \tag{38}$$

решения второго семейства — представление

$$w_n = d_n \,\mathrm{e}^{-\xi^2/4}[1 + O(\xi^{-2})], \qquad \xi \to \infty, \tag{39}$$

где c_n, d_n — постоянные. Это означает, что однородная задача для уравнения (36) всегда имеет решение. Покажем, что для ее решения с асимптотикой (37) в нуле имеет место представление (38).

Выполним в уравнении (36) подстановку

$$w_n = s_n \,\mathrm{e}^{-\xi^2/8}. \tag{40}$$

Функция s_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 s_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{ds_n}{d\xi} + \Big(-\frac{\xi^2}{16} + \frac{1}{2} - \frac{n^2}{\xi^2}\Big) s_n = 0. \tag{41}$$

В силу (37), (40) найдется $\xi_0 > 0$, такое что при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $s_n(\xi_0) = s_* > 0$. Величины ξ_0, s_* могут зависеть от n, но в данном случае это несущественно. Функция s_n при малых $\xi > 0$ положительна и монотонно возрастает. Оказывается, это свойство выполняется для всех значений $\xi > 0$. Действительно, пусть существует такое значение ξ_*, при котором функция s_n имеет положительный максимум. Тогда $ds_n/d\xi = 0$, $d^2s_n/d\xi^2 \leqslant 0$ в точке ξ_*, что противоречит равенству (41), если $n > 1$. Если $n = 1$ и $\xi_* = 2$, то $d^2s_n/d\xi^2 = 0$, $d^3s_n/d\xi^3 = 0$ в точке ξ_*, но $d^4s_n/d\xi^4 = s_n(\xi_*)/2 > 0$ в этой точке, т. е. вновь получаем противоречие. Следовательно, $s_n > s_*$ при всех $\xi > \xi_0$. Тогда в силу (40) выполняется неравенство $w_n \geqslant s_n\,\mathrm{e}^{-\xi^2/8}$, $\xi \geqslant \xi_0$. Это означает, что решение задачи (36), (37) не может иметь асимптотику (39) при $\xi \to \infty$. Иными словами, это решение принадлежит первому семейству, обладающему асимптотикой (38).

Из сказанного выше следует, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ величины A_n и a_n, а также B_n и b_n связаны линейными зависимостями $a_nc_n = A_n$, $b_nc_n = B_n$. Таким образом, получено явное представление решения задачи (33), (34) в виде ряда Фурье. Обозначим через $H^1_\xi(0,\infty)$ гильбертово пространство функций, определенных на полуоси $(0,\infty)$ и имеющих конечную норму

$$\|w_n\|^2_{H^1_\xi(0,\infty)} = \int\limits_0^\infty \xi\Big[\Big(\frac{dw_n}{d\xi}\Big)^2 + w_n^2\Big]\,d\xi.$$

Доказывается, что решение задачи (36), (37) допускает оценку

$$\|w_n\|_{H^1_\xi(0,\infty)} \leqslant C_4, \tag{42}$$

где постоянная C_4 не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$ гильбертово пространство функций $u(\xi,\varphi)$, определенных в $\mathbb{R}^2$ и имеющих конечную норму

$$\|u\|^2_{H^1_\xi(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \xi(|\nabla u|^2 + u^2)\,d\xi\,d\theta.$$

Из оценки (42) и представления (35) следует, что задача (33), (34) разрешима в пространстве $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$. Для ее решения справедлива оценка

$$\|u\|_{H^1_\xi(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_5\|h\|_{H^1(0,2\pi)}. \tag{43}$$

Единственность решения следует из способа построения решения задачи.

Предложение 2. Пусть $h(\varphi) \in H^1(0,2\pi)$ — заданная функция. Если параметр $\mathrm{Re} > 0$ достаточно мал, то задача (32), (33) имеет решение, в котором $u \in H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$.

Приведем схему доказательства предложения 2. Решение задачи (32), (33) ищется в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^\infty (\mathrm{Re})^k u_k, \qquad \psi = \sum_{k=0}^\infty (\mathrm{Re})^k \psi_k. \tag{44}$$

В качестве u_0 выбирается решение задачи (33), (34), функция ψ_0 находится однозначно как решение уравнения Пуассона $\Delta\psi_0 = u_0$ в $\mathbb{R}^2$ с условием ограниченности на всей плоскости. Функции u_k $(k = 1, 2, \ldots)$ определяются из уравнений

$$\Delta u_k + \frac{\xi}{2}\,u_{k,\xi} + u_k = \frac{1}{\xi}\,F_k, \qquad \Delta\psi_k = u_k, \tag{45}$$

где F_k — однородные функции второй степени однородности от производных первого порядка функций $u_0, \ldots, u_{k-1}$ и $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}$ по переменным ξ и φ. Уравнения (45) при фиксированном k решаются последовательно. Функции u_1, ψ_1 определяются из уравнений

$$\Delta u_1 + \frac{\xi}{2}\,u_{1,\xi} + u_1 = \frac{1}{\xi}\,F_1 \equiv \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial(\psi_0, u_0)}{\partial(\xi,\varphi)}, \qquad \Delta\psi_1 = u_1. \tag{46}$$

Однородное уравнение для функции u_1 имеет бесконечно много решений u_1^0 из класса $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$. Каждое из нетривиальных решений имеет асимптотику при $\xi \to \infty$ вида $u_1^0 = \xi^{-2}g(\varphi) + O(\xi^{-4})$, где $g \in H^1(0, 2\pi)$ и среднее значение g равно нулю.

Рассмотрим неоднородное уравнение (46) для функции u_1. Из свойств функций u_0, ψ_0 следуют представления

$$\xi^{-1}F_1 = O(\xi^2), \quad \xi \to 0, \qquad \xi^{-1}F_1 = O(\xi^{-4}), \quad \xi \to \infty, \tag{47}$$

которые гарантируют существование решения этого уравнения, обладающего свойствами

$$u_1 = O(\xi^2), \quad \xi \to 0, \qquad u_1 = O(\xi^{-4}), \quad \xi \to \infty. \tag{48}$$

Если задать условие, чтобы решение первого уравнения (46) убывало на бесконечности согласно представлению (48), то его решения вида u_1^0 из рассмотрения исключаются. Таким образом, решение u_1 с асимптотиками (48) является единственным решением первого уравнения системы (46) из класса $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$. Соответствующая ему функция ψ_1 также принадлежит этому классу и имеет асимптотики

$$\psi_1 = O(\xi^4), \quad \xi \to 0, \qquad \psi_1 = O(\xi^{-2}), \quad \xi \to \infty. \tag{49}$$

Заметим, что решение неоднородной системы (46) получено без каких-либо условий ортогональности для правой части первого уравнения в ней, несмотря на то что однородная система имеет нетривиальное решение. Для того чтобы объяснить это явление, рассмотрим линейное уравнение, сопряженное с уравнением

$$\Delta v - \xi v_\xi/2 = 0. \tag{50}$$

Решение уравнения (50) раскладывается в ряд Фурье по угловой переменной φ. Для амплитудных функций $z_n(\xi)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 z_n}{d\xi^2} + \Big(-\frac{z}{2} + \frac{1}{\xi}\Big)\frac{dz_n}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2}\, z_n = 0.$$

Поведение двух линейно независимых решений этого уравнения при $\xi \to \infty$ описывается формулами $z_n^{(1)} = \mathrm{e}^{\xi^2/4}[1 + O(\xi^{-2})]$, $z_n^{(2)} = 1 + O(\xi^{-2})$, на основе которых невозможно построить решение уравнения (50) из класса $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$.

Далее с использованием метода индукции доказывается, что для любого $n = 2, 3, \ldots$ система (45) имеет единственное решение из класса $H^1_\xi(\mathbb{R}^2)$ с условиями убывания на бесконечности (48), (49). Сходимость ряда (44) при достаточно малых Re устанавливается с помощью известного метода мажорант.

Отметим важное свойство решения задачи (32), (33). Задавая в ее решении условие стремления t к нулю, получаем начальное поле скоростей $v_r = r^{-1}\, dh/d\varphi$, $v_\varphi = 0$, $t = 0$. Наличие особенности поля скоростей приводит к расходимости интеграла Дирихле, характеризующего скорость диссипации кинетической энергии. Однако при любом $t > 0$ решение задачи является регулярным, что означает мгновенную регуляризацию решения задачи.

3. Осесимметричная задача. Пространственная задача о точечном источнике более сложна. В этом случае отсутствуют автомодельные стационарные решения. Более сильная, чем в плоском случае, особенность поля скоростей в начале координат не позволяет получить аналог предложения 1. В данной работе ограничимся рассмотрением линеаризованной осесимметричной стационарной задачи об источнике. Далее R и θ обозначают сферический радиус и долготу. Для упрощения задачи будем считать область течения шаром с $R < l$. В начале координат помещен источник или сток с постоянной мощностью Q. Компоненты скорости v_R, v_θ осесимметричного течения выражаются через функцию тока Ψ по формулам [14]

$$v_R = -\frac{1}{R^2\sin\theta}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = \frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial\Psi}{\partial R}.$$

Функция тока Ψ_Q точечного источника или стока имеет вид

$$\Psi_Q = -Q(1-\cos\theta)/(4\pi).$$

Обозначим через $\Phi = \Psi - \Psi_Q$ функцию тока возмущенного течения. Эта функция удовлетворяет уравнению [14]

$$\nu E^2\Phi - \sin\theta\,\frac{\partial\,[(R\sin\theta)^{-2}E\Phi,\Phi]}{\partial\,(R,\theta)} + \frac{Q\sin^2\theta}{4\pi}\,\frac{\partial\,[(R\sin\theta)^{-2}E\Phi]}{\partial R} = 0, \tag{51}$$

где

$$E = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\theta}{R^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big).$$

Для уравнения (51) ставятся краевые условия

$$\Phi = Qa(\theta), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{Q}{l}\,b(\theta), \qquad R = l, \tag{52}$$

где функции a, b, не зависящие от размерных параметров задачи ν, Q, l, удовлетворяют определенным условиям гладкости на интервале $[0,\pi]$ и стремления к нулю при $\theta \to 0$, $\theta \to \pi$. Последнее условие необходимо, чтобы обеспечить регулярность решения задачи (51), (52) вблизи оси симметрии. Дополнительно предполагается, что функция Φ имеет нулевое среднее значение на интервале $[0,\pi]$. Это гарантирует сохранение расхода Q в задаче о точечном источнике при возмущении краевых условий.

Естественно определить число Рейнольдса в задаче (51), (52) как $\mathrm{Re} = Q/(\nu l)$. Не имея данных о ее разрешимости даже при малых числах Рейнольдса, рассмотрим ее линейный вариант. Введем обозначение $u = E\Phi$ и заменим второе условие (52) условием

$$u = f(\theta), \qquad R = l. \tag{53}$$

Линеаризованное уравнение (51) не содержит функцию Φ. Требуется найти решение уравнения

$$\nu Eu + \frac{Q}{4\pi}\,\frac{\partial\,(R^{-2}u)}{\partial R} = 0, \qquad R < l, \tag{54}$$

удовлетворяющее условию (53). Решение задачи (53), (54) строится в виде разложения по полиномам Гегенбауэра $S_n(\cos\theta)$ [13]:

$$u = \sum_2^\infty u_n(R)S_n(\cos\theta), \qquad n = 2,4,6,\ldots.$$

Амплитудные функции $u_n(R)$ определяются из уравнений

$$\nu u_n'' + (4\pi)^{-1}Q(R^{-2}u_n)' - \nu n(n-1)R^{-2}u_n = 0, \tag{55}$$

где штрих обозначает производную по R. Для уравнения (55) ставится краевая задача

$$u_n \to 0, \quad R \to 0, \qquad u_n = f_n, \quad R = l \tag{56}$$

(f_n — коэффициенты разложения функции f по полиномам Гегенбауэра). Асимптотическое решение уравнения (55) определяется знаком постоянной Q. Если $Q > 0$, что соответствует источнику в начале координат, то уравнение (55) имеет лишь одно решение, удовлетворяющее первому условию (56):

$$u_{n,1} = R^2 + O(R^3), \qquad R \to 0. \tag{57}$$

Если $Q < 0$, что соответствует наличию стока, то это уравнение имеет два линейно независимых решения, удовлетворяющих данному условию. Одно из них имеет асимптотику (57), а асимптотика второго решения имеет вид

$$u_{n,2} = R\,\mathrm{e}^{Q/(4\pi\nu R)}[1 + o(1)], \qquad R \to 0.$$

В случаях $Q > 0$ и $Q < 0$ поведение решения задачи (53), (54) различается. Подобная ситуация имеет место в классической задаче Джеффри — Гамеля. Наличие в случае $Q < 0$ двух решений уравнения (55), удовлетворяющих первому условию (56), означает, что в этом случае однородная задача (53), (54) имеет нетривиальное решение. Можно предположить, что и нелинейная задача о стоке имеет решения, отличные от радиальных.

4. Нерешенные проблемы. Ниже обсуждается ряд проблем, возникающих при решении задачи об источнике. Естественным обобщением задачи, рассмотренной в п. **1**, является плоская нестационарная задача: найти решение системы (1) в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условиям (3), (4), (6)–(9). Пусть выполнены условия для функций $\boldsymbol{a}(x,t)$ и $\boldsymbol{v}_0(x)$, гарантирующие однозначную разрешимость плоской нестационарной задачи для системы (1) без особенностей (см. монографию [3]). Представляется правдоподобной следующая гипотеза: для любого $T > 0$ задача (1), (3), (4), (6)–(9) имеет, и притом единственное, решение в области $\Omega \times (0,T)$.

В отличие от плоской задачи осесимметричная нестационарная задача об источнике не имеет стационарных автомодельных решений. Однако ее нестационарные автомодельные решения существуют. Функция тока Ψ осесимметричного автомодельного решения имеет вид

$$\Psi = |M|^{3/2}\operatorname{sgn} M\sqrt{t}\,\Lambda(\zeta,\theta), \tag{58}$$

где $\zeta = (\nu t)^{-1/2}R$; M — постоянная, имеющая размерность $m^2 s^{-1}$ и характеризующая мощность источника. Величина M/ν играет роль числа Рейнольдса. В работе [15] выполнено численное исследование автомодельной осесимметричной нестационарной задачи, описывающей движение жидкости в коническом диффузоре с источником в начале координат [15]. Подобная задача для случая, когда жидкость заполняет все пространство, до сих пор не рассматривалась. Такая задача представляется сложной, но сначала можно рассмотреть ее линейный вариант, линеаризовав уравнение для функции тока на точном решении (58), в котором $\Lambda = \cos\theta - 1$. Представляет интерес выяснить, будут ли качественно различаться ее решения при $M > 0$ (источник) и $M < 0$ (сток).

Помимо решений, описывающих течения с источником или стоком, определяемые формулами (2), система (1) имеет решения с другими особенностями. В частности, если $\phi = (2\pi)^{-1}\Gamma\varphi$, то соответствующее поле скоростей $v_r = 0$, $v_\varphi = \Gamma/(2\pi r)$ описывает течение, порожденное точечным вихрем с циркуляцией $\Gamma = \text{const}$. В работе [16] получен аналог предложения 1 для этого случая. Результат работы [16] также требует ограничений на циркуляцию вихря

$$|\Gamma| < 2\pi\nu. \tag{59}$$

В монографии [9] отмечено, что в задаче о точечном вихре в жидкости, заполняющей всю плоскость, в отличие от задачи о точечном источнике, бифуркаций не возникает.

Имеется основание полагать, что ограничение (59) в задаче о точечном вихре в ограниченной области Ω можно ослабить. По-видимому, целесообразно рассмотреть эту задачу в переменных завихренность — функция тока. Завихренность ω связана с компонентами скорости соотношением

$$\omega = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}.$$

Функция ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\omega = \nu\Delta\omega. \qquad (60)$$

Уравнение (60) и его стационарный аналог обладают важным свойством: для их регулярных решений справедлив принцип максимума. Вероятно, для задач о точечном вихре и точечном источнике, рассматриваемых в переменных ψ, ω, можно получить нелокальные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Russo A., Tartaglione A.** On the singular solutions of the stationary Navier — Stokes problem // Lithuan. Math. J. 2013. V. 53, iss. 4. P. 423–437.
2. **Pukhnachev V. V.** Singular solutions of Navier — Stokes equations // Advances in mathematical analysis of partial differential equations. Dedicated to the memory of O. A. Ladyzhenskaya: AMS Transl. Ser. 2. 2014. V. 232. P. 193–218.
3. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
4. **Jeffery G. B.** The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Philos. Mag. Ser. 6. 1915. V. 29, N 172. P. 455–465.
5. **Hamel G.** Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1917. Bd 25. S. 34–60.
6. **Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакшев С. А., Нестеров С. В.** Современное состояние проблемы течений вязкой жидкости в сходящихся каналах // Современные проблемы механики. Механика жидкости, газа и плазмы. М.: Наука, 2008. С. 144–169.
7. **Serrin J.** On the mathematical basis for Prandtl's boundary layer theory: an example // Arch. Rational Mech. Anal. 1968. V. 28. P. 217–225.
8. **Пухначев В. В.** Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободными границами // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 302–305.
9. **Гольдштик М. А.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
10. **Rivkind L., Solonnikov V. A.** Jeffery — Hamel asymptotics for steady state Navier — Stokes flow in domains with sector-like outlet to infinity // J. Math. Fluid Mech. 2000. V. 2, iss. 4. P. 324–352.
11. **Шверак В.** О решениях Ландау уравнений Навье — Стокса // Пробл. мат. анализа. 2011. Вып. 61. С. 175–191.
12. **Шапеев А. В.** Нестационарное автомодельное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 41–46.
13. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1965.

14. **Хаппель Дж.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. М.: Мир, 1976.
15. **Шапеев А. В.** Вязкие несжимаемые течения в секторах и конусах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2009.
16. **Пухначев В. В.** Точечный вихрь в вязкой несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 180–187.

Поступила в редакцию 21/IX 2018 г.,
после доработки — 21/IX 2018 г.
Принята к публикации 24/IX 2018 г.