

В. А. Городцов

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКОВ ПЕРЕМЕННОЙ АМПЛИТУДЫ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Равномерно движущийся источник порождает волны по типу черенковского излучения. В стратифицированной по плотности жидкости это внутренние гравитационные волны. Другого типа излучение гравитационных волн вызывает неподвижный осциллирующий источник. При движении источника с переменной амплитудой разнообразие возбуждаемых волн возрастает. Появляются волны-предвестники, уносящие энергию в направлении движения со скоростью, превосходящей скорость источника.

Для простейших типов стратификации, свободной поверхности и разрывного скачка плотности линейные волновые поля вокруг осциллирующего движущегося источника анализировались в [1—7]. Ниже оцениваются энергетические потери такими источниками для стратификаций более общего вида. Метод энергетических оценок позволяет также проще выявить основные известные и некоторые дополнительные особенности излучения при разрывной стратификации.

Рассматривая массовый источник с гармонически меняющейся амплитудой, равномерно горизонтально движущийся в стратифицированной несжимаемой жидкости, ограничимся анализом плоской задачи. Начав со случая разрывной стратификации (свободной поверхности, в частности) при бесконечной и конечной глубине, перейдем затем к рассмотрению излучения волн в волноводе конечной глубины с произвольной стратификацией и в неограниченной однородно стратифицированной жидкости. Количество возбуждаемых типов волн быстро увеличивается с усложнением стратификации.

1. Потенциальное обтекание кусочно-однородной жидкостью. Потенциал скоростей φ находится из решения уравнения Пуассона с движущимся осциллирующим массовым источником

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \mathbf{v} = m(t, x, z) = m_0(x - v_0t, z) \exp(-i\omega_0 t),$$

дополненного граничными условиями убывания возмущений скорости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ вдали от источника, равенства нулю вертикальной компоненты скорости на горизонтальном твердом дне и непрерывности давления и вертикального смещения на поверхности скачка плотности.

Для произвольного распределения источников решение представляется интегральной сверткой их с преобразованием Фурье по времени запаздывающей функции Грина $G(t, x; z, z')$

$$\varphi(t, x, z) = \exp(-i\omega_0 t) \int dx' dz' g(x - v_0t - x'; z, z') m_0(x', z'),$$

$$g(x; z, z') = \int dt' G(t', x + v_0t'; z, z') \exp(i\omega_0 t'),$$

которая является решением той же задачи для мгновенного точечного источника при условии запаздывания

$$G(t - t', x - x'; z, z')|_{t < t'} = 0.$$

Последнее обеспечивает причинный характер связи полей возмущений с источником и автоматически выполнение подходящих условий излучения. Благодаря условию запаздывания преобразование Фурье по времени для функции Грина аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость комплексных частот, что позволяет легко найти ее однозначное выражение.

Например, в случае скачка плотности величины $\gamma \equiv (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ при $z = 0$ в остальном однородной безграничной жидкости

$$G_{\omega k}(z, z') = \frac{1}{2|k|} \{ \gamma \operatorname{sgn} z \exp[-|k|(|z| + |z'|)] - \exp[-|k||z - z'|] \} + \\ + \frac{1}{2} \gamma g \operatorname{sgn} z (\gamma + \operatorname{sgn} z') \frac{\exp[-|k|(|z| + |z'|)]}{(\omega + i\epsilon)^2 - \gamma g |k|}, \\ G(t, x; z, z') = \int \frac{d\omega dk}{(2\pi)^2} G_{\omega k}(z, z') \exp(ikx - i\omega t).$$

Потенциал скоростей точечного источника переменной амплитуды $\varphi = g(x - v_0 t; z, z') \exp(-i\omega_0 t)$, равномерно движущегося на глубине z' , выражается через однократный интеграл

$$4\pi g(x; z, z') = \ln \{ |x^2 + (|z| + |z'|)^2 |^{\gamma \operatorname{sgn} z} |x^2 + (z - z')^2|^{-1} \} + \\ + \gamma g \operatorname{sgn} z (\gamma + \operatorname{sgn} z') \int dk \frac{\exp[ikx - |k|(|z| + |z'|)]}{(\omega_0 + kv_0 + i\epsilon)^2 - \gamma g |k|},$$

поведение которого определяется корнями знаменателя при $\epsilon \rightarrow 0$. Число их меняется от двух до четырех в зависимости от величин скорости v_0 и частоты колебаний ω_0 . В частном случае свободной поверхности ($\rho_1 \rightarrow 0$) асимптотический анализ решения дан в [1—5], а обобщение для внутренних волн на скачке плотности — в [5—7].

Обратимся к оценке потерь энергии в единицу времени на излучение волн от движущегося осциллирующего массового источника, осредненных за период колебаний. При выражении давления через временную производную потенциала (линейная теория) получим интегральное представление потерь в виде квадратичной по источнику (выкладки делаются с вещественным источником $\operatorname{Re} m = m_0 \cos \omega_0 t$) формы

$$\langle W \rangle \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \int dx dz pm = - \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{4\pi} \int dz dz' dk \rho(z) \times \\ \times m_0(-k, z) m_0(k, z') \operatorname{Im} G_{\omega k}(z, z') \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|),$$

в которую входит мнимая часть образа Фурье функции Грина (предположено $zz' > 0$). Она сосредоточена на дисперсионной поверхности линейных внутренних волн

$$\operatorname{Im} G_{\omega k}(z, z') = -\frac{\pi}{2} \gamma g \operatorname{sgn}(\omega z) (\gamma + \operatorname{sgn} z') \times \\ \times \exp[-|k|(|z| + |z'|)] \delta(\omega^2 - \gamma g |k|),$$

и в итоге в формулу для потерь войдет произведение двух δ -функций, что обеспечивает выполнимость двух интегрирований по частоте и волновому числу при произвольных распределениях источников.

С помощью известной формулы теории обобщенных функций

$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{-1} \delta(x - x_i), \quad f(x_i) = 0$$

произведение δ -функций преобразуется в сумму по четырем различным волновым вкладам:

$$\delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|) \delta(\omega^2 - \gamma g |k|) = \\ = \sum_{i=1}^4 \delta(k - k_i) \frac{\delta(\omega - \sqrt{\gamma g |k|})}{2|\omega| |v_0 - c_g \operatorname{sgn}(\omega_0 + kv_0)|}, \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

что приводит к соответствующему разложению потерь энергии источником, движущимся по одну из сторон от слоя скачка плотности (для движения сверху $\rho = \rho_1$ и знак минус, а снизу $\rho = \rho_2$ и знак плюс):

$$\langle W \rangle = \langle W_1 + W_2 \rangle H(v_* - v_0) + \langle W_3 + W_4 \rangle,$$

$$\langle W_i \rangle = \frac{\gamma(1 \mp \gamma) \rho g}{16} \frac{|\mu_{0i}|^2}{|v_0 - c_{gi} \operatorname{sgn}(\omega_0 + k_i v_0)|},$$

$$v_* \equiv \frac{\gamma g}{4\omega_0}, \quad \mu_{0i} \equiv \int dx dz m_0(x, z) \exp(-|k_i z| - ik_i x).$$

При малых докритических скоростях движения источника ($v_0 < v_*$) полные потери суммируются из вкладов всех четырех систем волн, соответствующих двум положительным и двум отрицательным корням:

$$k_1 > k_2 > k_3 > k_4, \quad |\omega_0 + k_i v_0| = \sqrt{\gamma g |k_i|},$$

$$k_{1,2} = \frac{\gamma g}{4v_0^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v_0}{v_*}} \right)^2, \quad k_{3,4} = -\frac{\gamma g}{4v_0^2} \left(\sqrt{1 + \frac{v_0}{v_*}} \mp 1 \right)^2.$$

Для одного из двух бегущих в направлении движения типов волн ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$), которые излучаются только при докритических скоростях, групповая скорость $c_{g2} = c_2/2 = v_0/(1 - \sqrt{1 - v_0/v_*})$, составляющая половину фазовой, превышает скорость источника (волна-предвестник).

При сверхкритических скоростях ($v_0 > v_*$) положительные корни исчезают (становятся комплексными) и излучаются только волны с отрицательными фазовыми скоростями в направлении, противоположном направлению движения источника. В условиях устойчивой стратификации ($0 < \gamma < 1$) сверхкритический режим легче достигается для внутренних волн, чем для волн на свободной поверхности ($\gamma = 1$).

Для всех типов волн на поверхности разрыва плотности в безграничной жидкости групповая скорость c_g в 2 раза меньше фазовой и справедливы соотношения

$$|v_0 - c_{gi} \operatorname{sgn}(\omega_0 + k_i v_0)| = \frac{1}{2} \left| v_0 - \frac{\omega_0}{k_i} \right|,$$

$$v_0 - \frac{\omega_0}{k_{1,2}} = \pm \sqrt{\frac{\gamma g}{k_{1,2}} \left(1 - \frac{v_0}{v_*} \right)}, \quad v_0 - \frac{\omega_0}{k_{3,4}} = \sqrt{-\frac{\gamma g}{k_{3,4}} \left(1 + \frac{v_0}{v_*} \right)},$$

$$\langle W_i \rangle = \frac{\gamma(1 \mp \gamma) \rho g}{8} \frac{|\mu_{0i}|^2 |k_i|}{|v_0 k_i - \omega_0|},$$

позволяющие упростить сравнение вкладов различных волн в потери

$$\frac{\langle W_1 \rangle}{\langle W_2 \rangle} = \frac{|\mu_{01}|^2}{|\mu_{02}|^2} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad \frac{\langle W_3 \rangle}{\langle W_4 \rangle} = \frac{|\mu_{03}|^2}{|\mu_{04}|^2} \sqrt{\frac{k_3}{k_4}},$$

$$\frac{\langle W_1 \rangle}{\langle W_4 \rangle} = \frac{|\mu_{01}|^2}{|\mu_{04}|^2} \sqrt{\frac{k_1}{k_4} \frac{v_* + v_0}{v_* - v_0}}.$$

Для простейших мультипольных источников отношения $|\mu_{0i}|^2/|\mu_{0i+1}|^2$ пропорциональны произведению степенной и экспоненциальной функций волнового числа. Например, для точечного источника и диполя

$$m_0(x, z) = m_0 \delta(x) \delta(z - z_0), \quad \mu_0 = m_0 \exp(-|kz_0|),$$

$$m_0(x, z) = -d_0 \delta'(x) \delta(z - z_0), \quad \mu_0 = -ikd_0 \exp(-|kz_0|).$$

Обсудим прежде всего упрощения для случая движения вблизи поверхности скачка ($z_0 \rightarrow 0$). При очень малых скоростях ($v_0 \ll v_*$) не малыми будут два близких по величине волновых вектора $k_1 \sim -k_4 \sim \gamma g/v_0^2 \gg k_2 \sim -k_3$, которыми определяются потери энергии

$$\langle W \rangle \approx \frac{(1 \mp \gamma) \rho}{4} |\mu_{01}|^2 \sqrt{\frac{k_1}{\gamma g}}.$$

В докритическом диапазоне корень k_3 остается гораздо меньшим, чем k_4 ($k_4/k_3 > 5$ даже при $v_0 = v_*$). Положительные корни при приближении к критической скорости сближаются ($k_1 \sim k_2 \sim \gamma g/(4v_0^2)$), а их вклады в потери носят резонансный характер из-за обращения в нуль $v_0 - \omega_0/k_{1,2}$. По этой

причине они важнее большего по величине корня k_4 (при $v_0 \approx v_*$ имеем $|k_4| > 5k_1$) и определяют потери

$$\langle W \rangle = \frac{(1 \mp \gamma) \gamma g \rho |M_{01}|^2}{8v_0} \sqrt{\frac{v_*}{v_* - v_0}}$$

Сингулярность требует уточненного нелинейного рассмотрения.

При переходе к сверхкритическим скоростям остающиеся два отрицательных корня ($|k_4| > |k_3|$) сближаются по мере роста скорости и при $v_0 \gg v_*$ дают

$$\langle W \rangle \approx \frac{(1 \mp \gamma) \gamma g \rho |M_{04}|^2}{8v_0}, \quad k_3 \approx k_4 \approx -\frac{\omega_0}{v_0}$$

Изменение относительных вкладов разных волн с глубиной погружения источника определяется упоминавшейся конкуренцией степенной и экспоненциальной зависимостей. Например, для точечного диполя

$$\frac{\langle W_3 \rangle}{\langle W_4 \rangle} = \left| \frac{k_3}{k_4} \right|^{5/2} \exp \{ 2 |z_0| (|k_4| - |k_3|) \}$$

и вблизи поверхности более длинной волне (с меньшим $|k_3|$) будет соответствовать меньший вклад. Однако из-за более медленного затухания с глубиной более длинной волны она окажется важнее при достаточном заглублении источника. Таким образом, при движении осциллирующего источника на глубине основные потери энергии могут быть связаны с возбуждением более длинных волн.

2. Слой конечной глубины. Учет конечной глубины жидкости приводит к количественному усложнению, но качественные особенности сохраняются. По-прежнему движущийся осциллирующий источник может породить от двух до четырех типов волн (при учете свободной поверхности и слоя скачка число возможностей удваивается).

Ограничимся примером слоя однородной жидкости глубины h со свободной поверхностью. Осредненные потери энергии, как и прежде, определяются мнимой частью образа Фурье функции Грина

$$\text{Im } G_{wk}(z, z') = -\pi g \text{sgn } \omega \frac{\text{ch } |k| (h-z) \text{ch } |k| (h-z')}{\text{ch}^2 |k| h} \delta(\omega^2 - g |k| \text{th } kh).$$

Благодаря двум δ -функциям интеграл потерь

$$\langle W \rangle = \frac{g}{4} \int_0^\infty d\omega \int dk \frac{\omega |M_0|^2}{\text{ch}^2 |k| h} \delta(\omega^2 - g |k| \text{th } |k| h) \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|)$$

$$\left(M_0 = \int_0^h dz m_0(k, z) \text{ch } |k| (h-z) \right)$$

сводится к сумме вкладов волн, определяемых как решения уравнений

$$\omega = \sqrt{g |k| \text{th } |k| h} = |\omega_0 + kv_0|.$$

Здесь также возможны два или четыре решения в зависимости от скорости источника и пара положительных решений исчезает в сверхкритическом режиме. Одно из них соответствует волнам-предвестникам с групповой скоростью, превосходящей скорость источника. Однако уже нет простых явных аналитических формул для каждого отдельного решения, и более удобным становится графическое представление.

Согласно рисунку, решения $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$ определяются точками пересечения 1-4 кривой $\omega = \sqrt{g |k| \text{th } |k| h}$ с прямыми $\omega = \pm (\omega_0 + kv_0)$. Пунктиром проведены эти прямые в сверхкритической ситуации, когда исчезают точки 1 и 2. В па-

рисунок

раметрическом виде (безразмерный параметр q равен произведению волнового числа на глубину) зависимость критической скорости v_* от h и ω_0 представляется следующим образом:

$$\frac{2v_*}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\text{th } q}{q}} \left(1 + \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right), \quad 2\omega_0 \sqrt{\frac{h}{g}} = q \sqrt{\frac{\text{th } q}{q}} \left(1 - \frac{2q}{\text{sh } 2q} \right).$$

Она принимает простой вид при большой глубине и малой частоте:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} v_* = \frac{g}{4\omega_0}, \quad \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} v_* = \sqrt{gh}.$$

Последнее отражает известное обстоятельство, что в плоской задаче при $v_0 > \sqrt{gh}$ излучение волн равномерно движущимся источником постоянной амплитуды отсутствует.

Потери энергии представляются суммой четырех вкладов в докритической ситуации, два из которых исчезают в сверхкритической:

$$\langle W \rangle = \frac{g}{8} \sum_{i=1}^4 \frac{|M_{0i}|^2}{|v_0 - c_{gi} \text{sgn}(\omega_0 + kv_0)| \text{ch}^2 |k_i h|}.$$

Здесь знаменатель можно также преобразовать к виду

$$|v_0 - c_{gi} \text{sgn}(\omega_0 + kv_0)| = \frac{|\omega_0^2 - k_i^2 v_0^2 + gh k_i^2 \text{ch}^{-2} |k_i h||}{2 |k_i| |\omega_0 + kv_0|}.$$

3. Внутренние волны в волноводе с твердыми крышками. В стратифицированной жидкости между горизонтальными плоскостями с распределением частоты плавучести $N(z)$ реакция на малое внешнее воздействие описывается функцией Грина с преобразованием Фурье

$$G_{\omega k}(z, z') = \sum_n \frac{\omega_n^2 \psi_n(|k|, z) \psi_n(|k|, z')}{(\omega + i\epsilon)^2 - \omega_n^2},$$

$$\text{Im } G_{\omega k}(z, z') = -\pi \omega^2 \text{sgn } \omega \sum_n \psi_n(|k|, z) \psi_n(|k|, z') \delta(\omega^2 - \omega_n^2),$$

где суммирование ведется по волновым модам с собственными значениями $\omega_n = \omega_n(|k|)$ и собственными функциями $\psi_n(|k|, z)$, удовлетворяющими уравнению, граничным условиям и условию нормировки:

$$(\partial^2/\partial z^2 - k^2 + k^2 N^2(z)/\omega_n^2) \psi_n(|k|, z) = 0,$$

$$\psi_n(|k|, h_1) = \psi_n(|k|, h_2) = 0, \quad \int_{h_1}^{h_2} dz k^2 N^2(z) \psi_n^2(|k|, z) = 1.$$

Возмущения вертикальной компоненты скорости w и давления p следующим образом выражаются через вызывающий их движущийся осциллирующий массовый источник:

$$p(\omega, k, z) = -\frac{i\omega}{k^2} \left(m(\omega, k, z) - \frac{\partial}{\partial z} w(\omega, k, z) \right),$$

$$w(\omega, k, z) = \omega^2 \int dz' m(\omega, k, z') \frac{\partial}{\partial z'} G_{\omega k}(z, z'),$$

$$m(t, x, z) = m_0(x - vt, z) \cos \omega_0 t,$$

$$m(\omega, k, z) = \pi m_0(k, z) [\delta(\omega - \omega_0 - kv_0) + \delta(\omega + \omega_0 - kv_0)].$$

Осредненные потери энергии в единицу времени по-прежнему зависят только от мнимой части образа Фурье функции Грина, сосредоточенной на дисперсионной поверхности:

$$\langle W \rangle = \sum_n \langle W_n \rangle,$$

$$\langle W_n \rangle = \frac{1}{8} \int dk \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4}{k^2} |M_{0n}|^2 \delta(\omega - \omega_n(k)) \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|),$$

$$M_{0n} \equiv \int dz m_0(k, z) \frac{\partial \psi_n(|k|, z)}{\partial z} = \int dx dz m_0(x, z) \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \exp(-ikx).$$

Полные потери складываются из потерь для отдельных мод. Ненулевой вклад в потери энергии для n -й волновой моды дают волны с волновыми векторами, удовлетворяющими уравнениям

$$\omega = \omega_n(k) > 0, \quad \pm \omega = \omega_0 + kv_0.$$

Для некоторых простейших типов стратификации, к которым принадлежит однородная ($N = \text{const}$), дисперсионные кривые всех мод $\omega_n = \omega_n(k)$ являются выпуклыми с $\partial^2 \omega_n / \partial k^2 < 0$ и, следовательно, могут иметь две точки пересечения с прямой $\omega = \omega_0 + kv_0$. Тогда решение указанной системы уравнений при фиксированном номере n будет аналогичным обсуждаемому для разрывной стратификации. Удобно прежнее графическое представление с небольшим видоизменением, связанным с ограничением частот $\omega_n < N_{\text{max}}$. Для каждой n -й моды возможны четыре типа решения, два из которых ($k_{1n} > k_{2n} > 0$) исчезают при сверхкритической скорости $v_0 > v_{*n}$, а вклад в средние потери из-за излучения волн этой моды можно представить в виде

$$\langle W_n \rangle = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 \frac{\omega_{ni}^4 |M_{0ni}|^2}{k_{ni}^2 |v_0 - c_{gn} \operatorname{sgn}(\omega_0 + k_{ni}v_0)|},$$

т. е. как сумму по четырем (или двум в сверхкритическом режиме) типам волн данной моды с волновыми числами k_{ni} .

Набор критических скоростей v_{*n} определяется решением систем уравнений

$$\omega_n(k) = \omega_0 + kv_{*n}, \quad c_{gn} \equiv \frac{\partial \omega_n(k)}{\partial k} = v_{*n}.$$

Все критические скорости конечны. Упорядоченность дисперсионных кривых с изменением номера моды подразумевает упорядоченность критических скоростей $v_{*n} > v_{*(n+1)}$. В итоге с уменьшением скорости движения осциллирующего источника возможно появление все большего числа волн-предвестников (с $c_{gn}|_{k=k_n} > v_0$).

Однако вышесказанным далеко не исчерпываются все возможности. Во многих случаях стратификация такова, что изменение групповых скоростей c_{gn} с волновым числом не является монотонным. Кроме наибольшего максимума для длинных волн ($k \rightarrow 0$) возможны меньшие максимумы для более коротких. Причем число их может расти с ростом номера моды. В определенном диапазоне параметров v_0, ω_0 с каждым локальным максимумом групповой скорости будет связана дополнительная пара волновых решений с положительными волновыми векторами, одно из которых соответствует дополнительной волне-предвестнику. Так что волновых решений и для фиксированной моды с положительными k может стать больше двух. Отыскание критических скоростей как по уравнениям, так и графически усложняется (даже для каждой моды их может быть согласно сказанному несколько). Простой остается оценка сверху. Общие ограничения фазовых и групповых скоростей волн в волноводе (первое получается по теоремам сравнения [8])

$$\frac{N_{\min}^2 h^2}{\pi^2 n^2 + k^2 h^2} \leq c_n^2 \leq \frac{N_{\max}^2 h^2}{\pi^2 n^2 + k^2 h^2},$$

$$\max \left(0, 1 - \frac{\omega_n^2}{N_{\min}^2} \right) \leq \frac{c_{gn}}{c_n} \leq 1 - \frac{\omega_n^2}{N_{\max}^2}$$

позволяют написать

$$v_{*n} < c_{gn}|_{k=0} \leq \frac{N_{\max} h}{\pi n}.$$

Обсуждаемое изменение выпуклости дисперсионных кривых типично для волноводов с двумя резко выраженными максимумами частоты плавучести [9]. Однако и в случае некоторых распределений плотности с одним максимумом частоты плавучести возможна немонотонная зависимость групповой скорости от волнового числа [10].

4. **Безграничная однородно стратифицированная жидкость.** В этом примере в отсутствие ограничений на стратификацию в вертикальном направлении спектр волн будет уже зависеть не от дискретного номера мод, а от непрерывного параметра — вертикальной компоненты волнового вектора. Выражение для осредненных потерь энергии в плоской задаче представится не суммой по модам, а интегралом по этой компоненте (анализ возмущений в пространственной задаче дан в [11]).

В среде с постоянной частотой плавучести мнимая часть образа Фурье функции Грина и связь образов Фурье давления и массового источника имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Im } G(\omega, \mathbf{k}) &= -\pi \operatorname{sgn} \omega \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2), \\ p(\omega, \mathbf{k}) &= i\omega(N^2 - \omega^2) G(\omega, \mathbf{k}) m(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему выражение для осредненных потерь энергии равномерно движущимся осциллирующим источником представляется следующим образом:

$$\langle W \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{8\pi} \int d\mathbf{k} |\omega| (N^2 - \omega^2) m_0(\mathbf{k})^2 \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2) \delta(\omega - |\omega_0 + \mathbf{k}v_0|).$$

Здесь из трех интегрирований благодаря двум δ -функциям можно выполнить два и оставить, например, в общем ответе интегрирование по вертикальной компоненте. В частном случае горизонтального движения он определяется решениями системы уравнений

$$\omega = N \frac{|k_x|}{k}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad -\omega_0 \pm \omega = k_x v_0.$$

При фиксированной вертикальной компоненте k_z решение этой системы вполне аналогично тому, что было для разрывной стратификации, и наглядно иллюстрируется тем же рисунком, видоизмененным с учетом ограничения $\omega < N$. Как и ранее, увеличение числа волновых решений от двух до четырех определяется переходом скорости движения источника через критическое значение v_* . Последняя теперь является функцией k_z , т. е. угла наклона волн к горизонту. Из системы уравнений для критической скорости

$$\omega = N \frac{k_x}{k} = \omega_0 + k_x v_*, \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = N \frac{k_z^2}{k^3} = v_*$$

следует

$$v_* = \frac{N}{k_z} \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{N} \right)^{2/3} \right]^{3/2}.$$

При любой скорости движения осциллирующего источника с частотой колебаний $\omega_0 < N$ найдутся сколь угодно длинные излучаемые волны, по отношению к которым движение будет докритическим ($v_0 < v_*$). Значит, при $\omega_0 < N$ всегда будет возбуждаться пара волн с положительными компонентами k_x и малой величиной $|k_z|$ и одна из них будет волной-предвестником.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. О волновых движениях тяжелой жидкости // ПММ.— 1954.— Т. 18, № 1.
2. Becker E. Die pulsierende Quelle unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe // Ingenieur-Archiv.— 1956.— Bd 24, N 2.
3. Kaplan P. The waves generated by the forward motion of oscillatory pressure distributions // Proc. 5th Midwest Conf. Fluid Mechanics, Ann Arbor, 1957.— Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1957.
4. Debnath L., Rosenblat S. The ultimate approach to the steady state in the generation waves on a running stream // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1969.— V. 22, N 2.
5. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны.— Киев: Наук. думка, 1973.
6. Pramanik A. K. Waves due to a moving oscillatory surface pressure in a stratified fluid // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1974.— V. 41, N 3.
7. Pramanik A. K. Generation of internal gravity waves in a stratified ocean // Bull. Cal. Math. Soc.— 1983.— V. 75, N 1.

8. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.
9. Гончаров В. В. О некоторых особенностях внутренних волн в океане // Цунами и внутренние волны. — Севастополь: МГИ, 1976.
10. Завольский Н. А. Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 1.
11. Rehm R. G., Radt H. S. Internal waves generated by a translation oscillating body // J. Fluid Mech. — 1975. — V. 68, N 2.

г. Москва

Поступила 27/VII 1992 г.,
в окончательном варианте — 12/X 1992 г.

УДК 533.72:551.511

Д. А. Верещагин, С. Б. Лебле, А. К. Щекин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Введение. Известно, что наиболее последовательное описание волновых возмущений в разреженных газах должно основываться на кинетическом уравнении Больцмана или его модельных аналогах [1, 2]. Цель данной работы — исследование с помощью кинетического уравнения задачи о вынужденных колебаниях вертикально стратифицированного в поле тяжести газа при заданных граничных режимах возбуждения. Если для этой задачи определить число Кнудсена K_n через отношение длины свободного пробега молекул газа к характерному масштабу неоднородности, определяемому распространяющейся волной, то изменение вследствие стратификации длины свободного пробега дает растущее по вертикали значение K_n . Таким образом, в рассматриваемой задаче требуется описание движения газа при произвольных K_n .

Во многих отношениях рассматриваемая проблема близка к известной задаче о распространении ультразвука в однородном газе, интерес к которой в кинетической теории газов был стимулирован еще работами Ван Чан и Уленбека [2]. Важные результаты в этой области, полученные для линеаризованного уравнения Больцмана и модельных кинетических уравнений методом аналитического продолжения дисперсионных соотношений [3], методом Винера — Хопфа [4], сведением к задаче Римана — Гильберта [5, 6], численным интегрированием вдоль характеристик [7], подтверждают, что волноподобный характер возмущения в газах сохраняется и при $K_n \geq 1$. При этом зависимости фазовой скорости и коэффициента поглощения акустической волны, вычисленные с помощью модельного кинетического уравнения Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК), находились в хорошем согласии с экспериментом. Уравнение БГК может быть положено и в основу анализа распространения волновых возмущений в стратифицированном газе. С физической точки зрения наличие стратификации газа приводит к появлению наряду с акустическими волнами и внутренних волн. Закон дисперсии внутренних волн существенно отличается от соответствующего закона для акустических волн, исследование влияния кинетического режима на характер распространения внутренних волн представляет особый интерес в связи с приложениями в физике верхней атмосферы [8]. Однако наличие внешнего поля и стратификация газа существенно усложняют задачу, так как приводят к уравнению с переменными коэффициентами. В силу этого упомянутые выше методы решения задачи о звуке в однородном газе, существенным элементом которых было разделение переменных с помощью преобразования Фурье, оказываются неприменимыми, а метод интегрирования вдоль характеристик должен быть модифицирован с учетом нелинейности характеристик.

© Д. А. Верещагин, С. Б. Лебле, А. К. Щекин, 1993