Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЩЕЛИ ВДОЛЬ ЛИНИИ РАЗДЕЛА

УДК 539.412

Б. В. Нерубайло, Л. Г. Смирнов

Институт прикладной механики РАН,
117334 Москва

В данной работе рассматриваются стационарные температурные поля в двухслойной пластине при наличии полубесконечной щели на линии раздела слоев. Предполагается, что коэффициент теплоотдачи на границе постоянен, а на общей границе вне щели имеет место идеальный контакт. Для нахождения решения используется аналог метода факторизации Винера — Хопфа. Расчеты иллюстрируются кривыми распределения температурного поля вдоль берегов границы в зоне расположения щели.

Пусть теплопроводные слои $(0 < y < h_1, -\infty < x < +\infty)$ и $(-h_2 < y < 0, -\infty < x < 0)$ имеют между собой идеальный контакт при $x > 0$, а при $x < 0$ термоизолированы друг от друга.

Уравнения теплопроводности для обоих слоев запишем как

$$\Delta T_j = \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} = 0 \quad (j = 1, 2); \tag{1}$$

краевые условия

$$\alpha_j \frac{\partial T_j}{\partial y}\Big|_{y=y_j} = (\beta_j T_j + \gamma_j)\Big|_{y=y_j} \qquad (j = 1, 2;\ y_1 = h_1,\ y_2 = -h_2), \tag{2}$$

а условия на общей границе слоев

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \quad (y = 0,\ x < 0); \tag{3}$$

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \quad (y = 0,\ x > 0). \tag{4}$$

Здесь λ_j — коэффициент теплопроводности материалов первого и второго слоев соответственно $(j = 1, 2)$; α_j, β_j, γ_j — постоянные $(j = 1, 2)$ ($\alpha_j = 0$ — краевое условие первого рода, $\beta_j \neq 0$). Будем искать решение $T_j(x, y)$ в виде

$$T_j(x, y) = T_j^*(x, y) + T_j^{(0)}(x, y), \tag{5}$$

где $T_j^{(0)}(x, y)$ — решение уравнения (1) с краевыми условиями (2) и условием сопряжения (4), выполняющимися на всей прямой $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение $T_j^{(0)}(x, y)$ следующее:

$$T_j^{(0)}(x, y) = a_j y + b_j \quad (j = 1, 2).$$

Здесь

$$a_1 = (\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1)/(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\beta_2 h_1 - \alpha_2\beta_1\lambda_1/\lambda_2 - \beta_1\beta_2\lambda_1 h_2/\lambda_2);$$
$$b_1 = ((\alpha_1 - \beta_1 h_1)a_1 - \gamma_1)/\beta_1; \quad a_2 = (\lambda_1/\lambda_2)a_1; \quad b_2 = b_1.$$

Тогда условия (1)–(4) с учетом (5) запишем в форме ($q = a_1\lambda_1 = a_2\lambda_2$)

$$\alpha_j \frac{\partial T_j^*}{\partial y}\bigg|_{y=y_j} = \beta_j T_j^*\bigg|_{y=y_j} \quad (j = 1, 2); \tag{6}$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad \frac{\partial T_2^*}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{q}{\lambda_2} \quad (x < 0); \tag{7}$$

$$T_1^*\bigg|_{y=0} = T_2^*\bigg|_{y=0}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1^*}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2^*}{\partial y}\bigg|_{y=0} \quad (x > 0). \tag{8}$$

Будем искать $T_j^*(x, y)$ в виде [1]

$$T_j^*(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \left(A_j(\xi)e^{i\xi y} + B_j(\xi)e^{-i\xi y}\right)e^{\xi x}\, d\xi, \tag{9}$$

где $A_j(\xi)$, $B_j(\xi)$ — искомые функции ($j = 1, 2$). Используя (9), из условий (6) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \left(i\alpha_j\xi\left(A_j(\xi)e^{i\xi y_j} - B_j(\xi)e^{-i\xi y_j}\right) - \beta_j\left(A_j(\xi)e^{i\xi y_j} + B_j(\xi)e^{-i\xi y_j}\right)\right)e^{\xi x}\, d\xi = 0,$$

откуда следует

$$B_j(\xi) = e^{2i\xi y_j}(i\alpha_j\xi - \beta_j)/(i\alpha_j\xi + \beta_j)A_j(\xi) \quad (j = 1, 2).$$

Условия (7), (8) теперь представим как

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} X_1(\xi)A_1(\xi)e^{\xi x}\, d\xi = -\frac{q}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} X_2(\xi)A_2(\xi)e^{\xi x}\, d\xi = -\frac{q}{\lambda_2}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} Y_1(\xi)A_1(\xi)e^{\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} Y_2(\xi)A_2(\xi)e^{\xi x}\, d\xi, \\ \frac{\lambda_1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} X_1(\xi)A_1(\xi)e^{\xi x}\, d\xi = \frac{\lambda_2}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} X_2(\xi)A_2(\xi)e^{\xi x}\, d\xi. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$X_j(\xi) = i\xi\left(1 - \frac{i\alpha_j\xi - \beta_j}{i\alpha_j\xi + \beta_j}e^{2i\xi y_j}\right); \quad Y_j(\xi) = 1 + \frac{i\alpha_j\xi - \beta_j}{i\alpha_j\xi + \beta_j}e^{2i\xi y_j} \quad (j = 1, 2).$$

Обозначив $A_j^*(\xi) = X_j(\xi)A_j(\xi)$, вместо (10), (11) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} A_1^*(\xi)e^{\xi x}\, d\xi = -\frac{q}{\lambda_1} \quad (x < 0); \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} A_2^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi = -\frac{q}{\lambda_2} \quad (x<0); \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} Y_1(\xi)X_1^{-1}(\xi)A_1^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} Y_2(\xi)X_2^{-1}(\xi)A_2^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi \quad (x>0); \tag{14}$$

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} A_1^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi = \frac{\lambda_2}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} A_2^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi \quad (x>0). \tag{15}$$

Если положить теперь $A_2^*(\xi) = \lambda_1/\lambda_2 A_1^*(\xi)$, то условие (15) автоматически удовлетворяется, а условия (12), (13) сведутся к одному. В результате получим два условия:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} A_1^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi = -\frac{q}{\lambda_1} \quad (x<0); \tag{16}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} F(\xi)A_1^*(\xi)\mathrm{e}^{\xi x}\,d\xi = 0 \quad (x>0), \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}
F(\xi) = F_0(\xi)/(F_1(\xi)F_2(\xi)),\\
F_0(\xi) = [(\alpha_1\xi\cos(\xi y_1) - \beta_1\sin(\xi y_1))(\alpha_2\xi\sin(\xi y_2) + \beta_2\cos(\xi y_2)) -\\
-\gamma(\alpha_1\xi\sin(\xi y_1) + \beta_2\cos(\xi y_1))(\alpha_2\xi\cos(\xi y_2) - \beta_2\sin(\xi y_2))]/\xi,\\
F_1(\xi) = \alpha_1\xi\sin(\xi y_1) + \beta_1\cos(\xi y_1), \quad F_2(\xi) = \alpha_2\xi\sin(\xi y_2) + \beta_2\cos(\xi y_2).
\end{gathered} \tag{18}$$

Функции $F_j(\xi)$ $(j = 0,1,2)$ являются целыми функциями первого порядка [1], причем каждая из них — четная функция относительно ξ, а потому представление Вейерштрасса для каждой из них по теореме Адамара [2] имеет вид

$$f(\xi) = \mathrm{e}^b \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \xi^2/\delta_m^2\right).$$

Здесь b — постоянная; δ_m — нули функции $f(\xi)$ $(m = 1,2,\ldots,\infty)$.

Функцию $F(\xi)$ можно записать в виде

$$F(\xi) = F^+(\xi)F^-(\xi), \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered}
F^+(\xi) = \frac{F_0^+(\xi)}{F_1^+(\xi)F_2^+(\xi)} = g(\xi)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m0}^+\right)\Big/\left(\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m1}^+\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m2}^+\right)\right),\\
F^-(\xi) = \frac{F_0^-(\xi)}{F_1^-(\xi)F_2^-(\xi)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m0}^-\right)\Big/\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m1}^-\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\xi/a_{m2}^-\right)\right);
\end{gathered} \tag{20}$$

$a_{mj}^{\pm}$ — нули функций $F_j(\xi)$, лежащие в правой и левой половине комплексной плоскости соответственно $(j = 0,1,2,\ m = 1,2,\ldots,\infty)$; $g(\xi)$ — целая функция, не имеющая нулей во всей комплексной плоскости.

Положим $A_j^*(\xi) = a/(\xi F^-(\xi))$ (a — неизвестная константа) и подставим в выражение (17). В результате получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} aF(\xi)/(\xi F^-(\xi))e^{\xi x}\,d\xi = \frac{a}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} F^+(\xi)/\xi e^{\xi x}\,d\xi \quad (x > 0). \tag{21}$$

При $x > 0$ в области $\mathrm{Re}\,\xi < 0$ голоморфная функция $F^+(\xi)/\xi$ не имеет полюсов и удовлетворяет условиям леммы Жордана [1]. Действительно, в области $\mathrm{Re}\,\xi < 0$ при $|\xi| \to \infty$ существует асимптотика

$$F(\xi) = F^+(\xi)F^-(\xi) \sim (1-\gamma),$$

откуда, учитывая равенства (19), (20), при $|\xi| \to \infty$ находим ($\mathrm{Re}\,\xi < 0$)

$$F^+(\xi) \sim F^-(\xi) \sim \sqrt{(1-\gamma)} = \mathrm{const},$$

а значит, $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}(F^+(\xi)/\xi) = 0$, и потому интеграл в (21) равен нулю. Подставив теперь $A_1^*(\xi) = a/(F^-(\xi)\xi)$ в условие (16), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} a/(\xi F^-(\xi))e^{\xi x}\,d\xi = -\frac{q}{\lambda_1} \quad (x < 0),$$

а следовательно, поскольку функция при $\mathrm{Re}\,\xi \geqslant 0$ также удовлетворяет условиям леммы Жордана и имеет единственный полюс первого порядка при $\xi = 0$, то $a = q/\lambda_1$. Для $T_j^*(x,y)$ с учетом (10) запишем

$$T_j^*(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Big(A_j(\xi)e^{i\xi y} + B_j(\xi)e^{-i\xi y}\Big)e^{\xi x}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Big(e^{i\xi y} + e^{-i\xi y+2i\xi y_j}(i\alpha_j - \beta_j)/(i\alpha_j + \beta_j)\Big)\Big/X_j(\xi)A_j^*(\xi)e^{\xi x}\,d\xi =$$

$$= \frac{(q/\lambda_j)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Big(\alpha_j\xi\cos(\xi(y-y_j)) + \beta_j\sin(\xi(y-y_j))\Big)\Big/\Big(\xi^2F_j(\xi)F^-(\xi)\Big)e^{\xi x}\,d\xi =$$

$$= \frac{(q/\lambda_j)}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Big(\alpha_j\xi\cos(\xi(y-y_j)) + \beta_j\sin(\xi(y-y_j))\Big)F_k^-(\xi)\Big/\Big(\xi^2F_j^+(\xi)F_0^-(\xi)\Big)e^{\xi x}\,d\xi$$

($k = 1$, если $j = 2$, и $k = 2$, если $j = 1$).

Функции $F_j(\xi)$ ($j = 1, 2$) являются целыми функциями первого порядка [2], причем каждая из них — четная функция относительно ξ, а потому представление Вейерштрасса для каждой из них по теореме Адамара [2] имеет вид

$$F_j(\xi) = d_j\prod_{m=1}^{\infty}(1 - \xi^2/a_{mj}^2),$$

где d_j — постоянная; a_{mj} — нули функций $F_j(\xi)$ ($m = 1, 2, \ldots, \infty$). Используя выражения для $F_j(\xi)$, легко найти коэффициенты d_j:

$$d_j = \lim_{\xi\to 0} F_j(\xi) = \lim F_j^+(\xi) = F_j^+(0) = \beta_j \quad (j = 1, 2).$$

В результате при $x > 0$ $(\mathrm{Re}\,\xi < 0)$ по теории вычетов получим

$$T_j^*(x,y) = \frac{q}{\lambda_j\beta_j}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\alpha_j a_{m0}^- \cos\left(a_{m0}^-(y-y_j)\right) + \beta_j \sin\left(a_{m0}^-(y-y_j)\right)\right] X\left(a_{m0}^-\right)\Big/\left(a_{m0}^-\right)^2 \mathrm{e}^{a_{m0}^- x}\right\}.$$

Здесь

$$X(y) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - y/a_{mk}^-\right)\Bigg/\left(\prod_{m=1}^{\infty}{}' \left(1-y/a_{mj}^+\right)\prod_{m=1}^{\infty}{}'\left(1-y/a_{m0}^-\right)\right);$$

штрих указывает на то, что члены в произведениях опускаются, если они равны нулю; $a_{mj}^{\pm}$ — нули функций $F_j(\xi)$ $(j = 0,1,2,\ m = 1,2,\ldots,\infty)$, лежащие соответственно в правой и левой половине комплексной плоскости.

При $x < 0$ $(\mathrm{Re}\,\xi > 0)$ запишем

$$T_j^*(x,y) = -\frac{q}{\lambda_j\beta_j}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_j a_{mj}^+\cos\left(a_{mj}^+(y-y_j)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\beta_j\sin\left(a_{mj}^+(y-y_j)\right)\right]X\left(a_{mj}^+\right)/\left(a_{mj}^+\right)^2\mathrm{e}^{a_{mj}^+x} + \beta_j(y-y_j)+\alpha_j\Bigg\}.$$

До сих пор предполагалось, что $q = \mathrm{const}$. В случае, когда в формулах (6)

$$q = \lambda_1 \partial T_2^{(0)}\big/\partial y\Big|_{y=0} = \lambda_2 \partial T_2^{(0)}\big/\partial y\Big|_{y=0} = q_0 \mathrm{e}^{p_n x},$$

где $p_n > 0$ $(x < 0)$, достаточно взять $A_1^*(\xi) = a\Big/\left(F^-(\xi)(\xi - p_n)\right)$. Повторив аналогичные вычисления с учетом того, что функция $A_1^*(\xi)$ теперь имеет дополнительный простой полюс в точке $\xi = p_n$, получим $(p_n \neq a_{mj};\ n,m = 1,2,\ldots;\ j = 0,1,2)$

$$T_j^*(x,y) = \frac{q}{\lambda_j\beta_j}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_j a_{m0}^-\cos\left(a_{m0}^-(y-y_j)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta_j\sin\left(a_{m0}^-(y-y_j)\right)\right]X(a_{m0}^-)\mathrm{e}^{a_{m0}^- x}\Big/\left(a_{m0}^-\right)^2\right\} \quad (x > 0); \tag{22}$$

$$T_j^*(x,y) = -\frac{q}{\lambda_j\beta_j}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_j a_{mj}^+\cos\left(a_{mj}^+(y-y_j)\right)+\right.\right.$$

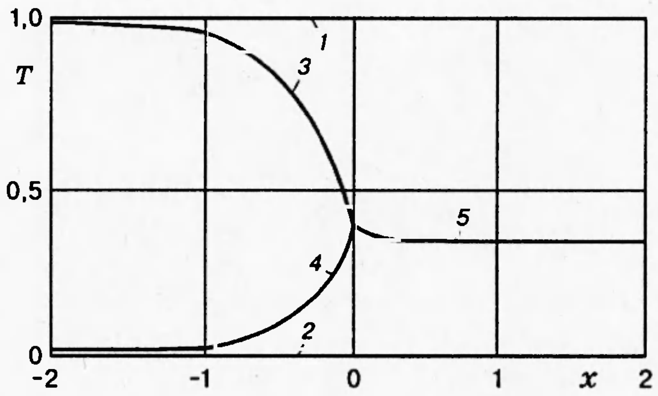
$$+\beta_j\sin\left(a_{mj}^+(y-y_j)\right)\Big]X(a_{mj}^+)\mathrm{e}^{a_{mj}^+x}\Big/\left(\left(a_{mj}^+\right)^2\left(a_{mj}^+ - p_n\right)\right) + \Big[\alpha_j p_n\cos(p_n(y-y_j))+$$

$$\left.+\beta_j\sin(p_n(y-y_j))\Big]X(p_n)\mathrm{e}^{-p_n x}\Big/p_n^2 + \beta_j(y-y_j)+\alpha_j\right\} \quad (x < 0). \tag{23}$$

Поскольку любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(t)$ может быть как угодно точно приближена полиномом вида $Q_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} q_n t^{p_n}$ (t^{p_n} — полная система функций на отрезке $[0,1]$, p_n — действительные числа), то, пользуясь заменой $t = \mathrm{e}^x$ $(x < 0)$, функцию $q(x)$ запишем в виде

$$q(x) = q(\ln t) = q_*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^{p_k} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \mathrm{e}^{p_k x}.$$

Тогда решение будет представлено суперпозицией решений (22), (23). Функция $q(x)$ не является константой в том случае, когда γ_j есть функции x, и для определения $T_j^{(0)}(x,y)$



достаточно применить преобразование Лапласа по координате x, чтобы найти затем $q(x) = \lambda_1 \partial T^{(0)}/\partial y\big|_{y=0}$. Суммируя решения (22), (23), получим искомое решение для $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k e^{p_k x}$. На рисунке приведен график поведения температуры $T_j(x,y)$ при $y = 0$ как функция от x на различных берегах границы для $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$ $(j = 1,2)$, $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma = 1$, $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ (линии *1*, *2* — распределение температуры на внешних поверхностях, *3*, *4* — на берегах щели, *5* — в зоне идеального контакта).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
2. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 30/I 1995 г.