

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУХСКОРОСТНОЙ СМЕСИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД С РАЗЛИЧНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ

А. А. Жилин, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследована задача описания ударно-волновых структур в смеси двух сжимаемых сред с различными скоростями и давлениями компонентов. Проблема сведена к решению краевой задачи для двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих скоростную релаксацию и процесс выравнивания давлений компонентов. Методами качественной теории динамических систем на плоскости показано существование и единственность волн четырех типов: а) полностью дисперсионных, б) замороженно-дисперсионных, в) дисперсионно-замороженных, г) замороженных двухфронтной конфигурации. В плоскости параметров: начальной скорости смеси и начальной объемной концентрации одного из компонентов — построена карта решений соответствующих типов течений. Проведенные численные расчеты иллюстрируют полученные аналитические структуры УВ. Показана адекватность результатов, определенных с помощью предложенной математической модели, экспериментальным данным по зависимости скорости дисперсионной УВ от равновесного давления за ее фронтом для смеси кварцевого песка и воды.

В [1–3] описана структура ударной волны (УВ) в смеси двух твердых тел в гидродинамическом приближении одно- и двухскоростного течения с различными давлениями компонентов и двухскоростного течения с одинаковыми давлениями компонентов. В [4] численно показана устойчивость распространения УВ различных типов, найденных в [1–3], решена задача об отражении УВ от жесткой стенки. В [5] исследована структура УВ в односкоростном и однотемпературном течении смеси с различными давлениями.

В данной работе рассматривается проблема описания УВ в смеси двух сжимаемых сред в случае переменной (в отличие от [2]) концентрации компонентов и их различных скоростей и давлений.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Уравнения, описывающие течение смеси двух сжимаемых сред с различными давлениями и скоростями фаз, в системе координат, распространяющейся с УВ, имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 \dot{\rho}_1 + \rho_1 \dot{U}_1 = 0, \quad U_2 \dot{\rho}_2 + \rho_2 \dot{U}_2 = 0, \quad C_1 \dot{U}_1 + C_2 \dot{U}_2 + \dot{P} = 0, \\ C_2 \dot{U}_2 + m_2 \dot{P}_2 + (P_2 - P_1) \dot{m}_2 + F_S = 0, \quad \dot{m}_2 = R. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и ниже m_i — объемная концентрация i -й фазы ($m_1 + m_2 = 1$); $P = P_1 m_1 + P_2 m_2$ — давление смеси; $P_i = a_i^2 (\rho_{ii} - \rho_{ii,0})$ — давление i -й фазы; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — плотность смеси; $\rho_i = \rho_{ii} m_i$ — средняя плотность i -й фазы; ρ_{ii} — истинная плотность i -й фазы; $\rho_{ii,0}$ — истинная плотность i -й фазы в первоначальный момент; $\xi_i = \rho_i / \rho$; $C_0 = \rho_0 U_0 = C_1 + C_2$; $C_i = \rho_{i0} U_0$; $C_3 = (C_1 + C_2) U_0$; $C = 1 - a^2 \bar{\rho}$; $a = a_2 / a_1$; $\bar{\rho} = \rho_{22,0} / \rho_{11,0}$; U_i — относительная скорость i -й фазы; a_i — скорость звука в i -й фазе; $R = m_1 m_2 (P_2 - P_1) / (\mu_2 U_2)$ — функция, описывающая процесс выравнивания давлений в фазах [6]; $F_S = m_1 \rho_2 (U_2 - U_1) / \bar{\rho}_3$ — сила Стокса,

учитывающая взаимодействие между фазами за счет вязкости; $\tau_S = 2\rho_2 r^2 / (9\mu_1)$ — время стоксовой релаксации скоростей; r — радиус твердой частицы; μ_i — коэффициент динамической вязкости i -й фазы; $\tau_{m_2} = 2\mu_2 / (a_1^2 \rho_{11,0})$.

Поскольку перед фронтом ударной волны и далеко за ним по потоку смесь находится в состоянии динамического и термодинамического равновесия, то для (1.1) должны быть поставлены условия стационарности на $\pm\infty$ для вектора решения $\Phi(\rho_1, \rho_2, U_1, U_2, P, m_2)$:

$$\Phi \rightarrow \Phi_0, \quad \Phi_k, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \pm\infty. \quad (1.2)$$

Таким образом, физическая задача о распространении стационарной ударной волны по смеси двух материалов свелась к решению краевой задачи (1.1), (1.2).

Система уравнений (1.1) приводится к нормальной форме Коши для двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dU_1}{d\zeta} = \frac{U_1}{\rho_1} \frac{F_S - \rho_1 R / m_1}{U_1^2 - 1}, \quad \frac{dU_2}{d\zeta} = -\frac{U_2}{\rho_2} \frac{F_S + R [P_2 - P_1 - a^2 \rho_2 / m_2]}{U_2^2 - a^2}. \quad (1.3)$$

Функция m_1 находится из закона сохранения импульса смеси

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 + P(\rho_1, \rho_2, m_1) = C_3$$

и уравнений $\rho_i = C_i / U_i$ в виде

$$m_1 = \frac{C_1 U_2 (U_1^2 + 1) + C_2 U_1 (U_2^2 + a^2) - U_1 U_2 (C_3 + a^2 \rho)}{C U_1 U_2}.$$

2. Возможные типы течений смеси. Определим характерные параметры течения фаз, которые возникают при изменении времен релаксации скоростей и концентраций компонентов.

1. Замороженное течение, когда $\tau_S, \tau_{m_2} \rightarrow \infty$ ($U_1 \neq U_2, P_1 \neq P_2$). В этом случае имеется a_i — скорость звука в i -м компоненте, находится $\tilde{U}_i = a_i^2 / U_0$ — скорость за замороженной УВ, скорости и давления компонентов всегда различны.

2. Равновесное течение, когда $\tau_S, \tau_{m_2} \rightarrow 0$ ($U_1 = U_2, P_1 = P_2$), характеризуется равновесной скоростью звука

$$C_e^2 = \frac{\xi_1}{m_1} \frac{m_1 C - \rho \xi_1}{m_1^2 C - \rho \xi_1},$$

а скорости и давления равны. Здесь можно аналитически определить скорость компонентов в конечном равновесном состоянии [1] за фронтом УВ:

$$\tilde{U}_k = \frac{2 - C + C_3 - \sqrt{(C - C_3)^2 + 4(C_3 - C_3^2 C_{ef}^2)}}{2C_0}.$$

3. Равновесно-замороженное течение, когда $\tau_S \rightarrow 0, \tau_{m_2} \neq 0, \infty$ ($U_1 = U_2, P_1 \neq P_2$), для него находится равновесно-замороженная скорость звука $C_{ef}^2 = \xi_1 + a^2 \xi_2$. Состояние за фронтом равновесно-замороженной УВ определяется в виде $\tilde{U} = C_{ef}^2 / U_0$. Здесь скорости компонентов равны, а давления различны.

4. Замороженно-равновесное течение, когда $\tau_S \neq 0, \infty, \tau_{m_2} \rightarrow 0$ ($U_1 \neq U_2, P_1 = P_2$), характеризуется замороженно-равновесной скоростью звука

$$C_{fe}^2 = 1 + a^2 \left(\frac{C_1}{C_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2.$$

При этом скорости компонентов различны, а давления одинаковы.

В дальнейшем потребуется упорядочение промежуточных скоростей звука. Рассмотрение показало, что справедливо

Утверждение 1. Если $m_{10} \in (0, m_*)$, то справедлива цепочка неравенств $1 \leq C_e < C_{ef} < a < C_{fe}$, если $m_{10} \in (m_*, 1)$, то $C_e < 1 < C_{ef} < a < C_{fe}$, где

$$m_* = \frac{\bar{\rho}(a^2 - 1)}{C(1 - \rho)}.$$

3. Анализ типа стационарных точек системы (1.3). Классификация видов ударных волн. Оценки коэффициентов векового уравнения матрицы Якоби. Для исследования корректности постановки задачи (1.1), (1.2) изучим тип стационарных точек системы уравнений (1.3). Для этого определим собственные числа ее матрицы Якоби, которые удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\sigma = -\frac{U^2 - C_{ef}^2}{U^2 - 1} \frac{Um_1}{\xi_1 \tau_S (U^2 - a^2)} + \frac{\Omega Um_1 m_2}{\mu_2 (U^2 - a^2)} \frac{U^2 - C_{fe}^2}{U^2 - 1},$$

$$\Delta = -\frac{\Omega m_1^2 m_2}{\xi_1 \tau_S \mu_2 (U^2 - a^2)} \frac{U^2 - C_e^2}{U^2 - 1}; \quad \Omega = -\left[\frac{\rho_1}{m_1^2} + \frac{\rho_2 a^2}{m_2^2} \right]; \quad U_1 = U_2 = U; \quad P_1 = P_2 = P.$$

Изучим поведение величины Δ в зависимости от (U, m_{10}) . Знак Δ определяется функцией $(U^2 - C_e^2)/[(U^2 - 1)(U^2 - a^2)]$. Отсюда нетрудно представить качественное поведение $\Delta(U)$ для различных значений m_{10} . Если $m_{10} \in (0, m_*)$, то $\Delta(U)$ отрицательна на интервале $U \in (0, 1) \cup (C_e, a)$, если $U \in (1, C_e) \cup (a, +\infty)$, то положительна. При $U = C_e$ Δ обращается в нуль и имеет разрывы второго рода при $U = 1, a$. Если $m_{10} = m_*$, то остается одна точка разрыва a , поведение $\Delta(U)$ в окрестности этой точки аналогично случаю, изложенному выше. Функция $\Delta(U)$ отрицательна при $U \in (0, a)$ и положительна при $U \in (a, +\infty)$. Если $m_{10} \in (m_*, 1)$, то $\Delta(U)$ отрицательна при $U \in (0, C_e) \cup (1, a)$, а положительна при $U \in (C_e, 1) \cup (a, +\infty)$. Когда $U = C_e$, то Δ обращается в нуль. При $U = 1, a$ Δ претерпевает разрыв второго рода. Наконец, во всех трех случаях $\Delta(U)$ асимптотически приближается к нулю при $U \rightarrow +\infty$. Как видим, величина Δ в зависимости от U не является знакоопределенной.

Там, где $\Delta < 0$, дискриминант $\mathcal{D} = \sigma^2 - 4\Delta$ положительный и значения $\lambda_{1,2}$ действительны. Если же $\Delta > 0$, то необходим дальнейший анализ. Для этого рассмотрим дискриминант \mathcal{D} уравнения (3.1), определяющего собственные числа, как функцию отношения времен релаксации $\chi = \tau_S/\tau_{m_2}$. Тогда

$$\mathcal{D} = \sigma^2 - 4\Delta = \frac{1}{\tau_S^2} D [A\chi^2 + B\chi + C],$$

где

$$A = 4m_2^2 \Omega^2 (U^2 - C_{fe}^2)^2 > 0;$$

$$B = \frac{4\Omega m_2}{\xi_1} \left\{ \frac{2}{U^2} (U^2 - 1)(U^2 - a^2)(U^2 - C_e^2) - (U^2 - C_{fe}^2)(U^2 - C_{ef}^2) \right\};$$

$$C = \frac{(U^2 - C_{ef}^2)^2}{\xi_1^2} > 0; \quad D = \frac{U^2 m_1^2}{(U^2 - 1)^2 (U^2 - a^2)^2} > 0.$$

Найдем величины $\chi_{\pm} = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2C$, которые определяют области знакоопределенности функции $\mathcal{D}(\chi)$. После некоторых преобразований для $\mathcal{D}_1(U) = B^2 - 4AC$ можно записать представление

$$\mathcal{D}_1 = F(F - 1).$$

Здесь

$$F(U^2) = \frac{(U^2 - 1)(U^2 - a^2)(U^2 - C_e^2)}{U^2(U^2 - C_{ef}^2)(U^2 - C_{fe}^2)}.$$

Элементарные оценки позволяют получить

$$F = \begin{cases} < 1 & \text{при } U \in (1, C_e), & F(1) = F(C_e) = 0, \\ \leq 0 & \text{при } U \in [C_e, a), \\ \geq \hat{u} & \text{при } U \in (C_{ef}, a), & F \in [0, \infty), \\ \leq 0 & \text{при } U \in [a, C_{fe}], & F \in [-\infty, 0), \\ > 1 & \text{при } U \in (C_{fe}, \infty). \end{cases}$$

Заметим, что при $m_{10} \in (m_*, 1)$ в описанной выше картине поведения F поменяются местами точки 1 и C_e . При $m_{10} = m_*$ точки 1 и C_e сольются, и в месте слияния функция F будет иметь максимальное значение на интервале $(0, C_{ef})$, равное нулю. В результате анализа запишем

Утверждение 2. Если $m_{10} \in (0, m_*)$, то имеем следующие оценки для Δ, F :

- 1) $U \in (1, C_e) = I_1, \quad \Delta > 0, \quad 0 < F < 1,$
- 2) $U \in (C_e, C_{ef}) = I_2, \quad \Delta < 0, \quad F < 0,$
- 3) $U \in (C_{ef}, a) = I_3, \quad \Delta < 0, \quad F > 0 \quad (U \in (C_{ef}, C'), \quad F \geq 1 \quad U \in (C', a), \quad F < 1),$
- 4) $U \in (a, C_{fe}) = I_4, \quad \Delta > 0, \quad F < 0,$
- 5) $U \in (C_{fe}, \infty) = I_5, \quad \Delta > 0, \quad F > 1.$

Если $m_{10} = m_*$, то оценки для Δ и F аналогичны изложенным выше, когда $m_{10} \in (0, m_*)$, исключая область I_1 , так как $C_e = 1$.

Если $m_{10} \in (m_*, 1)$, то для Δ, F имеем аналогичные 1-5 оценки по областям, при этом первые два интервала изменяются на $(C_e, 1), (1, C_{ef})$.

Собственные числа и типы стационарных точек системы (3.1).

А. Рассмотрим стационарные точки в начальном состоянии. Исследуем собственные числа $\lambda_{1,2}$ уравнения (3.1) на основе полученных выше утверждений для соответствующих областей (рис. 1).

1. Область I_1 состоит из подобластей I_{11} при $m_{10} \in (0, m_*)$ и I_{12} при $m_{10} \in (m_*, 1)$. Для $I_1 \quad \Delta > 0, F \in (0, 1)$. Поэтому $\mathcal{D}_1 < 0$ и не существует корней χ_{\pm} уравнения $\mathcal{D}(\chi) = 0$. Отсюда $\mathcal{D}(\chi) > 0$, особая точка — узел.

2. В области $I_2 \quad \Delta < 0, F < 0$. Поэтому $\mathcal{D}_1 > 0$ и существуют действительные корни уравнения

$$\chi_{\pm} = \frac{(U^2 - 1)(U^2 - C_e^2)(U^2 - a^2)}{\xi_1 m_2 U^2 (-\Omega)(U^2 - C_{fe}^2)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2F} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{F}} \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках положительно, тогда знак χ_{\pm} определяется знаком выражения $(U^2 - 1)(U^2 - C_e^2)(U^2 - a^2)$, которое всюду в (C_e, a) отрицательно. Отсюда в $I_2 \quad \chi_{\pm} < 0$. Поэтому неравенство справедливо и в этой области имеем седло.

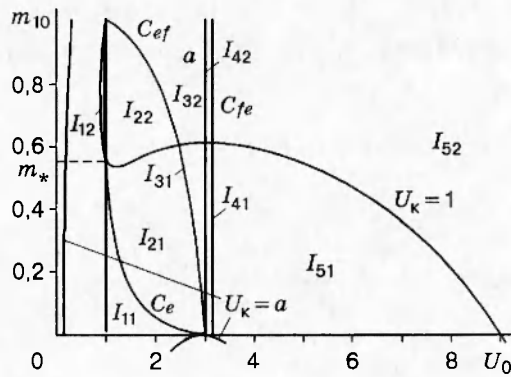


Рис. 1

3. Область I_3 разбиваем на две: I_3' , где $U \in (C_{ef}, C'']$, и I_3'' , где $U \in (C', a)$. В области I_3' опять существуют действительные корни $\chi_{\pm} < 0$. Поэтому имеем седло. В области I_3'' $0 < F < 1$, поэтому χ_{\pm} комплексно-сопряженные, $\mathcal{D}(\chi) > 0$, $\Delta < 0$ и имеем седло.

4. В области I_4 $F < 0$, поэтому существуют положительные значения χ_{\pm} . Отсюда для $\chi \in (0, \chi_-) \cup (\chi_+, \infty)$ дискриминант \mathcal{D} положителен, а поскольку и $\Delta > 0$, то особая точка — узел. При $\chi \in (\chi_-, \chi_+)$ $\mathcal{D} < 0$, $\Delta > 0$, особая точка — фокус.

5. В области I_5 $F > 1$ и существуют $\chi_{\pm} > 0$. Далее рассмотрение сводится к предыдущему случаю, с той разницей, что узел находится в диапазоне $\chi \in (0, \chi_+) \cup (\chi_-, \infty)$, а фокус — на интервале $\chi \in (\chi_+, \chi_-)$.

Сведем результаты в

Утверждение 3. При $U_0 \in I_1$ особая точка — узел; при $U_0 \in (I_2, I_3)$ особая точка — седло; при $U_0 \in I_4$, если $\chi \in (0, \chi_-) \cup (\chi_+, \infty)$, особая точка — узел, а если $\chi \in (\chi_-, \chi_+)$, особая точка — фокус; при $U_0 \in I_5$, если $\chi \in (0, \chi_+) \cup (\chi_-, \infty)$, особая точка — узел, а если $\chi \in (\chi_+, \chi_-)$, особая точка — фокус.

Б. Рассмотрим стационарные точки в конечном состоянии. В силу теоремы Цемплена $U_k < C_{ек}$, и может представиться три возможности:

1. $0 < U_k < 1 < C_{ек}$, тогда $\Delta < 0$ и конечная точка — седло.
2. $1 < U_k < C_{ек}$, тогда $\Delta > 0$, $F \in (0, 1)$, $\mathcal{D}_1 < 0$. Это означает, что корней χ_{\pm} в области действительных чисел нет. Поэтому $\mathcal{D} > 0$ и конечная точка — узел.
3. $U_k < C_{ек} < 1$. Тогда $\Delta < 0$, $\mathcal{D}(\chi) > 0$ и конечная точка — седло.

Отсюда справедливо

Утверждение 4. При $U_k \in (0, 1)$ особая точка — седло; при $U_k \in (1, C_{ек})$ особая точка — узел; при $U_k \in (C_{ек}, 1)$ особая точка — седло.

Подводя итог приведенным выше рассуждениям о типах ударных волн (рис. 1), формулируем

Предложение. Если краевые условия для задачи (1.2), (1.3) в бесконечно удаленной точке таковы, что:

- 1) $U_0 \in (I_{21}, I_{31})$, то решение $(U_1(\zeta), U_2(\zeta))$ существует в классе непрерывно дифференцируемых функций;
- 2) $U_0 \in (I_{22}, I_{32})$, то решение существует в классе непрерывных функций по второй фазе и в классе разрывных функций для первого компонента;
- 3) $U_0 \in (I_{41}, I_{51})$, то решение существует в классе непрерывных функций по легкой фазе и в классе разрывных функций для тяжелого компонента;

4) $U_0 \in (I_{42}, I_{52})$, то решение существует в классе разрывных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Физически течение 1 соответствует полностью дисперсионным УВ в обеих фазах, течение 2 — дисперсионной УВ в тяжелой фазе и замороженной УВ в легкой фазе, в течении 3 имеется дисперсионная УВ в первом компоненте и замороженная УВ во второй фазе, течение 4 отвечает замороженным УВ по обоим компонентам смеси. Местоположение замороженной УВ в первой фазе является свободным параметром задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При определении области $I_{k;}$ мы не включаем туда окрестность линии $U_k = 1$, для которой есть основания полагать, что решение будет трансзвуковым с внутренними особыми точками.

4. Обсуждение результатов численных расчетов. При проведении расчетов исследовалась картина течения смеси воды (первая фаза) и кварцевого песка (вторая фаза) в УВ различных типов. На рис. 2 приводится зависимость скорости дисперсионной УВ для $m_{10} = 0,4$ от равновесного давления за ее фронтом (линия — расчетные данные, вертикальные черточки — размах экспериментальных данных [7]). Как видно, при небольших давлениях в смеси принятые линейные парциальные уравнения состояния компонентов позволяют описать экспериментальные данные.

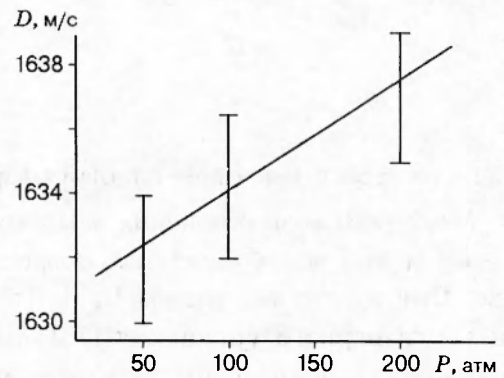


Рис. 2

1. Пусть $U_0 \in (C_{e,0}, a)$ и $m_{10} \leq m^*$ (m^* — значение m_{10} , при котором $U_k = 1$). В этой области начальных параметров УВ полностью дисперсионная в обеих фазах. С ростом объемной концентрации воды наблюдаются распределения параметров, приведенные на рис. 3, где течение в УВ квазиравновесное по скоростям. Ширина УВ с ростом доли жидкости уменьшается, происходит более резкое торможение, и как следствие более сильно растет давление. В отличие от скоростной равновесности давления фаз демонстрируют неравновесное поведение. Различие давлений максимально в центре УВ, причем давление в твердой фазе больше, чем в жидкой.

Последующее увеличение m_{10} приводит к изменению типа наблюдаемой УВ. Волна трансформируется в замороженно-дисперсионную УВ. Замороженно-дисперсионной УВ будем называть течение, асимптотически примыкающее к начальному и конечному состо-

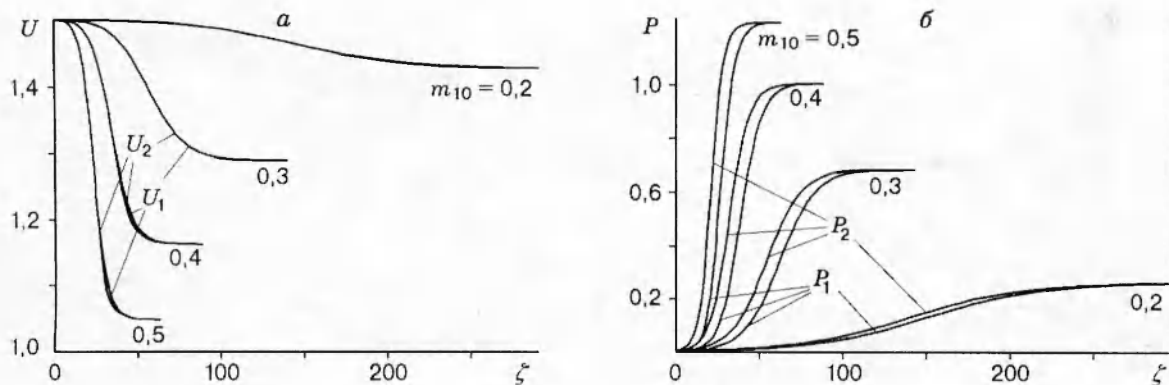


Рис. 3

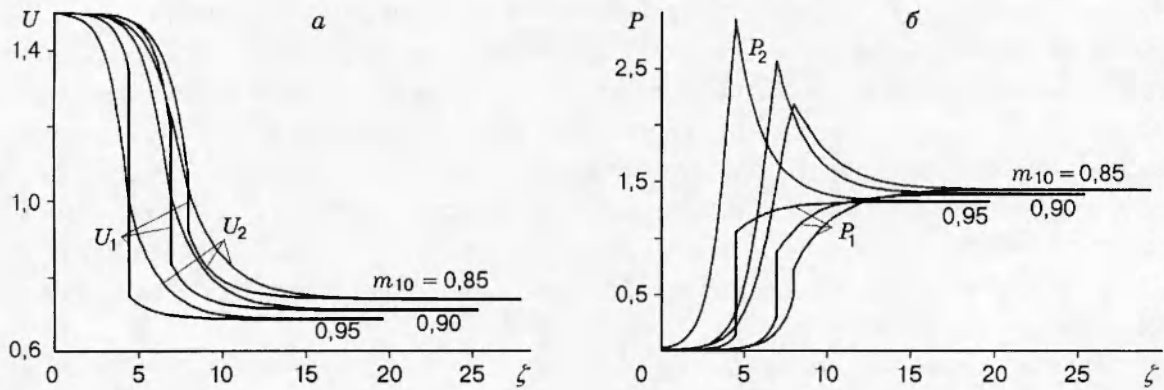


Рис. 4

нениям на $\pm\infty$ и имеющее слабый разрыв во второй фазе, сильный разрыв в первой.

Механизм возникновения замороженно-дисперсионной УВ заключается в следующем. С ростом m_{10} до m^* конечная скорость в волне приближается к скорости звука в первой фазе. При $m_{10} = m^*$ имеем $U_k = 1$. Это движение смеси граничное, особенность в правой части первого уравнения (1.3) раскрываемая. Однако при $m_{10} > m^*$ $U_k < 1$, и для достижения равновесного состояния за фронтом УВ необходим переход через скорость звука в первой фазе, что и является причиной возникновения внутреннего сильного разрыва в жидкости. Вторая фаза при этом имеет в данной точке пространства слабый разрыв. Видно (рис. 4, а, б), что с ростом доли жидкости в смеси внутренняя УВ перемещается вверх по потоку, сила ее возрастает. Участок непрерывного течения перед фронтом внутренней УВ с ростом m_{10} уменьшается. Следует отметить, что в первой фазе происходит постоянная нагрузка жидкости. В то же время в песке в передней части замороженно-дисперсионной УВ (в области, расположенной до внутренней УВ) происходит нагрузка, а в задней части волны — разгрузка. Отношение максимального давления второй фазы к давлению в жидкости за фронтом внутренней УВ остается при изменении m_{10} примерно равным трем. Кроме того, давление за фронтом УВ в конечном равновесном состоянии обнаруживает немонотонное поведение в зависимости от содержания воды. Существует значение m_{10} , после которого возрастание m_{10} приводит к уменьшению давления за фрон-

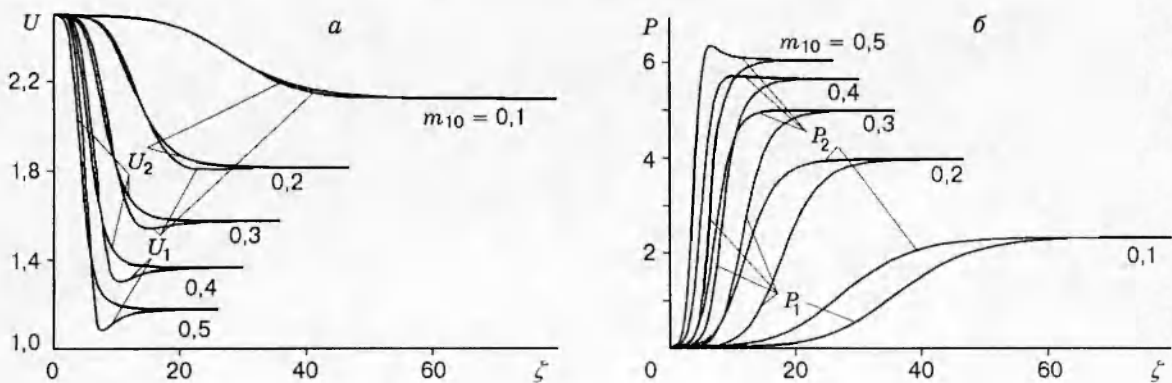


Рис. 5

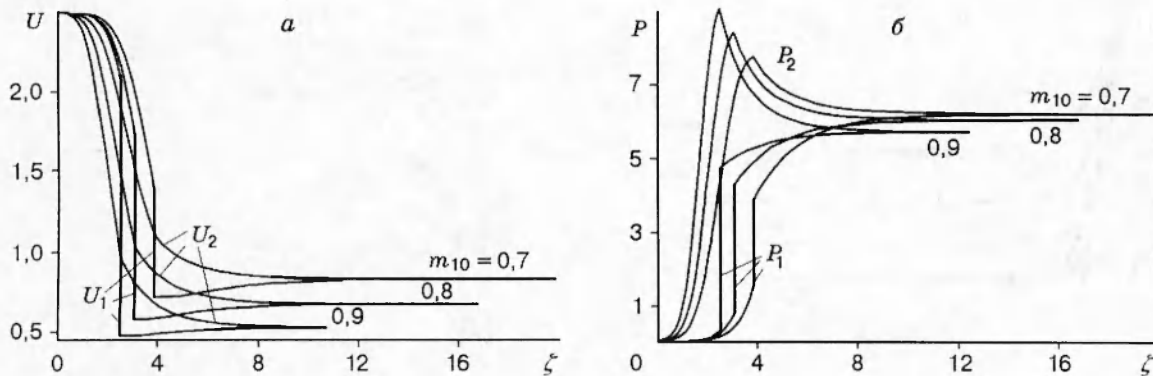


Рис. 6

том. Связано это с ростом содержания воды в смеси.

2. Увеличим скорость УВ до $U_0 = 2,5$, оставаясь в то же время в интервале $(C_{e,0}, a)$ и $m_{10} < m^*$. УВ является дисперсионной, однако скорость жидкости становится немонотонной с ростом m_{10} , как это изображено на рис. 5. В отличие от УВ с небольшой скоростью ($U_0 = 1,5$) в этом случае квазиравновесное по скоростям течение наблюдается лишь при малых m_{10} (см. $m_{10} = 0,1$). Дисперсионная УВ разбивается на две области. В передней части фронта $U_1 > U_2$. В задней, за точкой $\zeta = \zeta_*$ ($U_1(\zeta_*) = U_2(\zeta_*)$), $U_1 < U_2$, и течение в такой волне проявляет сильную неравновесность по скоростям. Видно, что с увеличением m_{10} скоростная неравновесность возрастает. Течение при $m_{10} = 0,5$ содержит узкую зону, в которой происходит резкое торможение фаз. В течении как бы возникает сильный скачок, за которым U_1 увеличивается до своего конечного значения.

Движение смеси такого типа с немонотонным поведением существует до тех пор, пока минимальное значение U_1 не сравнивается со скоростью звука в первой фазе. Поскольку равновесия по скоростям и давлениям при этом может не быть, то возможна градиентная катастрофа, и течение такого рода в стационарной постановке отсутствует.

Давление в легкой фазе монотонно возрастает вниз по течению (рис. 5). Поведение профиля давления в твердом компоненте зависит от начальной объемной концентрации первой фазы. На рис. 5 виден процесс перехода от монотонного профиля давления твердых частиц к немонотонному. При увеличении m_{10} от 0,1 до 0,3 профиль давления принимает более пологую форму при подходе к конечному равновесному состоянию. При $m_{10} = 0,3$ давление в твердых частицах на заключительном этапе выходит на «полочку», после чего дальнейшее увеличение начальной объемной концентрации первой фазы приводит к появлению максимума давления во второй фазе. Максимум давления во второй фазе связан с увеличением плотности твердых частиц вследствие их большой массы.

При возрастании m_{10} тип течения дисперсионной УВ меняется (рис. 6) на замороженно-дисперсионный. Однако в отличие от случая 1 здесь скорость первой фазы за фронтом внутренней УВ возрастает, в то время как частицы по-прежнему тормозятся. До внутреннего скачка смесь находится в сильнонеравновесном состоянии. При торможении жидкости в скачке неравновесность фаз уменьшается. Качественное поведение давления фаз подобно описанному выше при $U_0 = 1,5$.

3. Пусть $U_0 \in (a, C_{fe})$ и $U_0 = 3,05$ (рис. 7). В этом случае при малых m_{10} УВ представляет собой структуру, которую будем называть дисперсионно-замороженной. В голове УВ

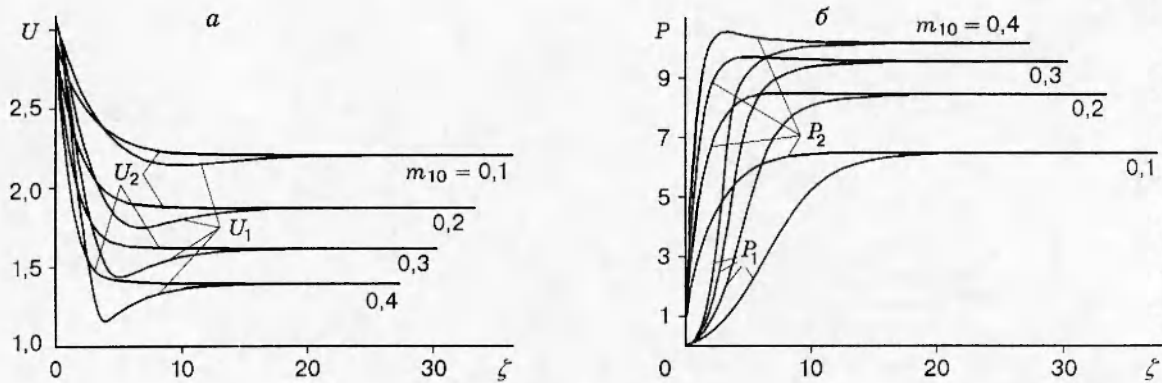


Рис. 7

имеется сильный скачок во втором компоненте (с помощью скачка осуществляется выход из начального равновесного состояния устойчивого фокуса (узла)). Затем скорость этого компонента монотонно уменьшается до достижения равновесного состояния. Скорость легкого компонента смеси изменяется непрерывно, проявляя немонотонное поведение. В течении с ростом m_{10} абсолютная величина $U_{1,\min}$ уменьшается и приближается к единице. Такой тип течения требует особого рассмотрения.

Давление в первой фазе монотонно, во второй с ростом m_{10} становится немонотонным.

С увеличением m_{10} течение приобретает двухфронтную конфигурацию (рис. 8), назовем его замороженной УВ. Здесь в голове волны имеется сильный разрыв во второй фазе, в первой фазе течение непрерывно. В передней части замороженной УВ, расположенной до внутреннего скачка в жидкости, течение сильнонеравновесное. После торможения жидкости во внутреннем скачке степень неравновесности уменьшается. Частицы по-прежнему продолжают тормозиться, а жидкость, которой передается импульс от частиц, ускоряется до тех пор, пока скорости фаз не сравняются.

4. Увеличивая скорость U_0 до значений, принадлежащих интервалу (C_{fe}, a^2) , получим следующие картины течения. При $U_0 = 3,3$ скорости и давления имеют качественно аналогичное поведение, как и для $U_0 = 3,05$. Отличие заключается в интенсивности УВ, которая возрастает с увеличением U_0 .

5. Замечания о методике проведения расчетов. Расчеты полностью дисперсионных УВ

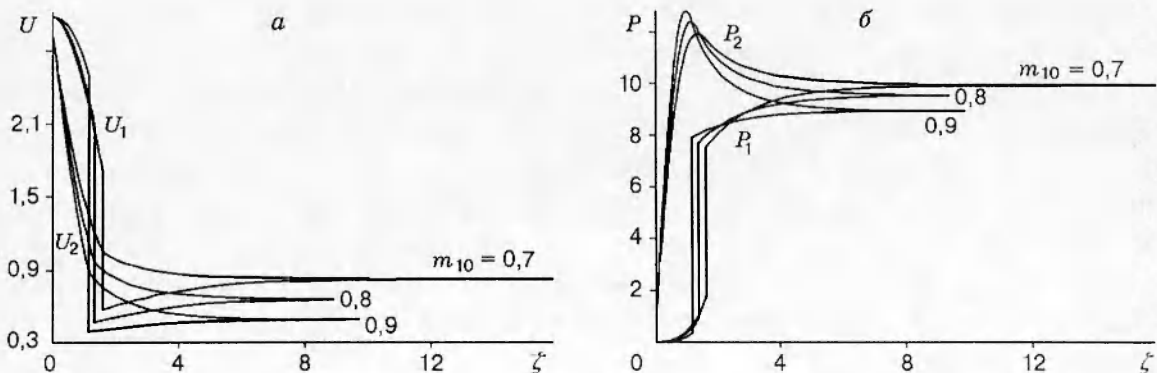


Рис. 8

сводились к определению траектории, идущей из седла в узел, и не представляли трудностей.

Для определения течений с внутренней УВ (движение смеси типа замороженно-дисперсионной УВ) алгоритм расчетов заключался в следующем. Из начальной и конечной стационарных точек (седла) выход осуществлялся по сепаратрисе аналитически вдоль неустойчивого направления. После получения расчетным путем соответствующих сепаратрис их связывали с помощью условий на УВ в первой фазе. Местоположение внутренней УВ было при этом искомым параметром.

Расчет дисперсионно-замороженной УВ заключался в следующем. Из начального состояния выход осуществлялся путем введения УВ во второй фазе и дальнейшего расчета траектории до входа в конечное состояние равновесия (узел).

Для определения параметров течений с замороженными УВ по обоим компонентам использовали такой алгоритм расчета: выход из начального состояния осуществлялся посредством введения УВ во второй фазе; траектория, ведущая в конечное состояние равновесия, находилась с помощью подбора местоположения УВ в легком компоненте по методике, изложенной выше для замороженно-дисперсионной УВ.

5. Выводы. На основе математической модели для описания течения смеси двух конденсированных компонентов с различными скоростями и давлениями описана структура ударных волн в виде дисперсионных и замороженных УВ одно- и двухфронтной конфигурации.

Показано, что эта модель адекватно описывает экспериментальные данные Г. М. Ляхова по зависимости скорости дисперсионной УВ от равновесного давления за ее фронтом.

В плоскости с координатами m_{10} и U_0 численно построена карта возможных типов движения смеси, приведены и проанализированы расчетные данные, иллюстрирующие эти типы течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В. Математическое описание течения смеси конденсированных материалов при высоких давлениях // Физическая газодинамика реагирующих сред. Новосибирск: Наука, 1990. С. 119–128.
2. Федоров А. В. Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике. 1991. Т. 5(22), № 4. С. 135–158.
3. Федоров А. В. Структура ударной волны в гетерогенной смеси двух твердых тел с одинаковыми давлениями компонент // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ИТПМ, 1992. С. 235–249.
4. Федоров А. В., Федорова Н. Н. Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // ПМТФ. 1992. № 4. С. 10–18.
5. Варламов Е. В., Федоров А. В. Бегущая волна в неизотермической смеси двух твердых тел // Моделирование в механике. 1991. Т. 5(22), № 3. С. 14–26.
6. Baer M. R., Nunziato J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // J. Multiphase Flow. 1986. V. 12, N 6. P. 861–889.
7. Ляхов Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. М.: Недра, 1964.

Поступила в редакцию 6/VI 1996 г.,
в окончательном варианте — 19/VII 1996 г.