

7. Laufer J. Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels // JAS.— 1961.— V. 28, N 9.
8. Елфимов А. Г., Лебига В. А., Черных В. В. Термоанемометр постоянного тока ТПТ-2 // Экспериментальные методы и аппаратура для исследования турбулентности.— Новосибирск, 1976.

Поступила 7/1 1987 г.

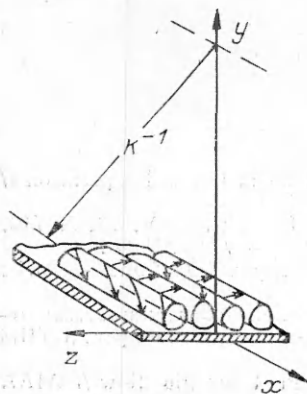
УДК 532.52 6.013

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В СЖИМАЕМОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. М. Тумин, Ю. П. Чернов

(Москва)

В двумерном пограничном слое на искривленной поверхности имеет место механизм невязкой неустойчивости, вследствие которого появляются пары вихрей, вращающихся в противоположные стороны и ориентированные вдоль потока. Обычно их называют вихрями Гёртлера (рис. 1). По мере усиления этих вихрей вниз по потоку они могут приводить к переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный. В экспериментах в переходной области пограничного слоя они проявляют себя периодическим распределением тепловых потоков, силы трения и т. д. в трансверсальном направлении по отношению к направлению основного течения в пограничном слое (см., например, [1, 2] и библиографию в [3]). Интерес к устойчивости пограничных слоев на искривленной поверхности обусловлен тем, что на разрабатываемых сверхкритических профилях имеются участки с достаточно большой кривизной, чтобы из-за влияния центробежных сил возник переход к турбулентному пограничному слою [4]. Кроме того, влиянию кривизны поверхности на характер течения в пограничном слое уделяется большое внимание при проектировании сопел для малозумных сверхзвуковых труб [5]. Обзоры предшествующих работ по исследованию неустойчивости пограничных слоев на искривленных поверхностях даны в [3, 6, 7]. Основной особенностью рассматриваемой задачи, на наш взгляд, является то, что по сравнению с неустойчивостью типа волн Толлмина — Шлихтинга или с неустойчивостью вторичных течений в пограничном слое в окрестности кромок стреловидного крыла вихри Гёртлера характеризуются слабой интенсивностью движения и сравнительно медленным усилением вниз по потоку. Это приводит к тому, что в общем случае при анализе устойчивости течения необходимо сохранять те члены линеаризованных уравнений Навье — Стокса, которые обычно связывают с эффектами непараллельности течения. По данному вопросу следует отметить работы [8—10], в которых обсуждается влияние отсоса пограничного слоя, его охлаждения, а также градиента давления на устойчивость течения. В [11] получена асимптотическая зависимость для нейтральной кривой устойчивости в случае несжимаемого пограничного слоя, когда пространственный период вихрей в трансверсальном направлении мал по сравнению с толщиной пограничного слоя. В [12] задача об устойчивости пограничного слоя на искривленной поверхности анализировалась в рамках численного решения уравнений в частных производных. При этом обращено внимание на то обстоятельство, что найденное двучленное асимптотическое выражение для нейтральной кривой устойчивости оказывается пригодным в весьма широком диапазоне изменения параметра, характеризующего линейный масштаб вихрей в трансверсальном направлении. В настоящей работе приводятся обобщение результатов [11] на случай нарастающих вниз по потоку вихрей Гёртлера в сжимаемом пограничном слое, что позволяет получить простые приближенные соотношения, которые могут использоваться в инженерной практике.



Р и с. 1

1. Постановка задачи. Рассмотрим в качестве основного течения двумерный сжимаемый пограничный слой на слабоискривленной поверхности. Следуя [10], используем систему координат  $(x, y, z)$ , основанную на линиях тока и равного потенциала для невязкого течения на искривленной поверхности. Координата  $x$  направлена вдоль линии тока, координата  $y$  — по линии постоянного потенциала, а  $z$  — по нормали к плоскости  $(x, y)$ . Выберем в качестве характерного масштаба длины  $\delta = \sqrt{\nu_\infty x / U_\infty}$ , где  $U_\infty$  — скорость набегающего потока,  $\nu_\infty$  — кинематический коэффициент

вязкости в набегающем потоке. В качестве масштаба давления выбирается  $\rho_\infty U_\infty^2$  ( $\rho_\infty$  — плотность в набегающем потоке). Температуру будем измерять в единицах температуры набегающего потока  $T_\infty$ . Анализируемая задача характеризуется двумя малыми параметрами:  $\varepsilon_0 = R^{-1} = \sqrt{\nu_\infty/U_\infty x}$  — вязкий параметр,  $k = (K\delta)^{1/2}$  — параметр кривизны ( $K$  — кривизна обтекаемой поверхности). Рассматривается предел, когда  $\varepsilon_0, k \rightarrow 0$ , так что  $G = k/\varepsilon_0 = \text{const}$  ( $G$  — число Гёртлера). При этом в качестве главного приближения для основного течения получаются уравнения пограничного слоя на плоской пластине. Относительно возмущений  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -компонент скорости  $u, v, w$ , давления  $p$ , температуры  $\Theta$  предполагается, что они имеют следующие порядки величин [10]:  $u = O(1)$ ,  $v = O(R^{-1})$ ,  $w = O(R^{-1})$ ,  $p = O(R^{-2})$ ,  $\Theta = O(1)$ .

Эти соотношения между определяющими параметрами подтверждаются экспериментальными наблюдениями и прямыми численными расчетами [3]. Если выбрать в качестве масштаба длины по координате  $x$   $L = R\delta$  и искать решения для возмущений после выделения их порядка в виде

$$\begin{aligned} u &= \widehat{u}(y) \cos \beta z \cdot \exp\left(\int \sigma dx\right), & v &= \widehat{v}(y) \cos \beta z \cdot \exp\left(\int \sigma dx\right), \\ w &= \widehat{w}(y) \sin \beta z \cdot \exp\left(\int \sigma dx\right), & p &= \widehat{p}(y) \cos \beta z \cdot \exp\left(\int \sigma dx\right), \\ \Theta &= \widehat{\Theta}(y) \cos \beta z \cdot \exp\left(\int \sigma dx\right), \end{aligned}$$

то из линеаризованных уравнений Навье — Стокса получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений [10] (в [10] содержатся опечатки, которые легко устанавливаются в ходе элементарных выкладок). Для полученных уравнений формулируются граничные условия:  $u, v, w, \Theta \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ ;  $u, v, w = 0$  при  $y = 0$ . Если обтекаемая поверхность теплоизолированная, то при  $y = 0$  должно быть выполнено условие  $\partial\Theta/\partial y = 0$ . Если же фиксирована температура обтекаемой поверхности, то при  $y = 0$  будет выполняться условие  $\Theta = 0$ .

Сформулированная задача представляет собой задачу на собственные значения, в которой устанавливается связь между вещественными параметрами  $\sigma, \beta, G$ .

**2. Асимптотический анализ.** Будем искать асимптотическое решение поставленной задачи, когда  $\beta, G$  велики. Тогда, как и в [11], эффекты непараллельности течения в пограничном слое становятся несущественными. Если положить  $G = O(\beta^2)$ , то из анализа уравнений приходим к выводу, что  $v = O(\beta^2 u)$ ,  $\Theta = O(u)$ . Как и в [11], в асимптотическом пределе  $\beta \rightarrow \infty$  получается, что возмущения локализуются внутри тонкого слоя, находящегося на удалении  $y_+$  от обтекаемой стенки, а толщина слоя имеет порядок  $\beta^{-1/2}$ . Смысл этого внутреннего слоя заключается в том, что в нем устанавливается баланс центробежных, конвективных и вязких членов линеаризованных уравнений Навье — Стокса. Аналогично [11] приходим к заключению, что внутри слоя необходимо искать решения в виде разложений

$$\begin{aligned} \widehat{v}(\eta) &= v_0(\eta) + \varepsilon^{1/2} v_1(\eta) + \varepsilon v_2(\eta) + \dots, & \widehat{u}(\eta) &= \varepsilon^2 u_0(\eta) + \varepsilon^{5/2} u_1(\eta) + \\ &+ \varepsilon^3 u_2(\eta) + \dots, & \widehat{w}(\eta) &= \varepsilon^{1/2} w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta) + \varepsilon^{3/2} w_2(\eta) + \dots, & \widehat{p}(\eta) &= \\ &= \varepsilon^{-1/2} p_0(\eta) + p_1(\eta) + \varepsilon^{1/2} p_2(\eta) + \dots, & \widehat{\Theta}(\eta) &= \varepsilon^2 \Theta_0(\eta) + \varepsilon^{5/2} \Theta_1(\eta) + \\ &+ \varepsilon^3 \Theta_2(\eta) + \dots, & G^2 &= \varepsilon^{-4} (g_0 + \varepsilon^{1/2} g_1 + \varepsilon g_2 + \dots), & \eta &= (y - y_+)/\varepsilon^{1/2}, \\ & & \varepsilon &= \beta^{-1}. \end{aligned}$$

Скорость усиления  $\sigma$  полагаем заданной и представим как  $\sigma = \varepsilon^{-2} \sigma_0$ . Таким образом,  $\sigma_0$  есть мера отклонения от нейтральной кривой устойчивости. В частности,  $\sigma_0$  может полагаться равной нулю. Подставляя выписанные разложения в исходную систему уравнений для возмущений,

переходя к переменной  $\eta$ , получим в главном приближении систему уравнений

$$(2.1) \quad \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) u_0 + \frac{v_0}{T} \frac{dU}{dy} = 0, \\ \frac{2Ug_0}{T} u_0 + \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) v_0 - \frac{U^2}{T^2} g_0 \Theta_0 = 0, \quad \frac{v_0}{T} \frac{dT}{dy} + \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) \Theta_0 = 0, \\ w_0 = -dv_0/d\eta, \quad p_0 = -\mu dv_0/d\eta + \sigma_0 U w_0/T,$$

где  $U$ ,  $T$ ,  $\mu$  — скорость, температура и коэффициент вязкости в исходном течении;  $Pr$  — число Прандтля. Предполагается, что вязкость — функция температуры. В (2.1) и далее все функции, относящиеся к основному течению, а также их производные по координате  $y$  вычисляются в точке, координата которой  $y_+$  пока неизвестна. Первые три уравнения из (2.1) отщепляются, и из условия их разрешимости получаем соотношение, связывающее  $y_+$ ,  $g_0$ ,  $\sigma_0$ :

$$(2.2) \quad \left[\left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right)^2 - \frac{2g_0 U}{T} \frac{dU}{dy}\right] \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) + \frac{U^2}{T^3} g_0 \frac{dT}{dy} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) = 0.$$

Все неизвестные функции можно выразить через  $v_0$ :

$$(2.3) \quad u_0 = -\frac{v_0}{T} \frac{dU}{dy} \left/ \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right)\right., \quad w_0 = -\frac{dv_0}{d\eta}, \\ \Theta_0 = -\frac{v_0}{T} \frac{dT}{dy} \left/ \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right)\right., \quad p_0 = -\frac{dv_0}{d\eta} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right).$$

На этом этапе функция  $v_0(\eta)$  остается неопределенной. В следующем приближении приходим к уравнениям

$$(2.4) \quad \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) u_1 + \frac{v_1}{T} \frac{dU}{dy} = F_1(\eta), \\ \frac{2Ug_0}{T} u_1 + \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) v_1 - \frac{U^2}{T^2} g_0 \Theta_1 = F_2(\eta), \quad \frac{v_1}{T} \frac{dT}{dy} + \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) \Theta_1 = F_3(\eta), \\ F_1(\eta) = -u_0 \eta \frac{d}{dy} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) - v_0 \eta \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T} \frac{dU}{dy}\right), \\ F_2(\eta) = -\frac{2Ug_1}{T} u_0 + \frac{U^2}{T^2} g_1 \Theta_0 - 2g_0 u_0 \eta \frac{d}{dy} \frac{U}{T} - \\ - \eta v_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) + 2g_0 \eta \Theta_0 \frac{d}{dy} \frac{U}{T}, \\ F_3(\eta) = -v_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dy}\right) - \eta \Theta_0 \frac{d}{dy} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right).$$

Условие разрешимости системы (2.4) имеет вид

$$(2.5) \quad F_2 \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) + F_3 \frac{U^2}{T^2} g_0 \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) - \frac{2Ug_0}{T} \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) F_1 = 0.$$

В (2.5) содержатся слагаемые, пропорциональные  $\eta$  и  $g_1$ . Если выполнено соотношение (2.2), то можно показать, что для справедливости (2.5) необходимо положить  $g_1 = 0$ . В результате с помощью (2.2), (2.5) находим  $y_+$ ,  $g_0$  при заданном значении  $\sigma_0$ . Подставляя в (2.5) выражения для  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  из (2.4), используя соотношения (2.3), (2.2), приходим к уравнению для определения  $y_+$ :

$$(2.6) \quad 2 \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right) \frac{d}{dy} \left(\frac{U}{T^2} \frac{dU}{dy}\right) - \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right)^2 \frac{d}{dy} \left(\frac{U^2}{T^3} \frac{dT}{dy}\right) + \\ + \frac{U^2}{T^3} \frac{dT}{dy} \frac{\left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right)}{\left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right)} \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr}\right) \left(\frac{\sigma_0 U}{T} + \mu\right)\right] -$$

$$-\frac{4U}{T^2} \frac{dU}{dy} \left( \frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr} \right) \frac{d}{dy} \left( \frac{\sigma_0 U}{T} + \mu \right) = 0.$$

Если число Маха  $M$  равно нулю, а  $T = \text{const}$ ,  $\sigma_0 = 0$ , то из (2.6) следует, что  $y_+$  соответствует координате максимума функции  $U(y)dU/dy$  [11]. В третьем приближении получаем следующую систему:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{v_2}{T} \frac{dU}{dy} + u_2 \left( \frac{\sigma_0 U}{T} + \mu \right) &= S_1(\eta), \\ \frac{2Ug_0}{T} u_2 + \left( \frac{\sigma_0 U}{T} + \mu \right) v_2 - \frac{g_0 U^2}{T^2} \Theta_2 &= S_2(\eta), \\ \frac{v_2}{T} \frac{dT}{dy} + \left( \frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr} \right) \Theta_2 &= S_3(\eta). \end{aligned}$$

Выражения для  $S_1, S_2, S_3$  даны в приложении. Условие разрешимости системы (2.7) совпадает с (2.5). При этом в (2.5) необходимо заменить  $F_j$  на  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Если из (2.4) выразить  $u_1, \Theta_1$  через  $v_1$  и подставить их в выражения для  $S_1, S_2, S_3$ , то из соответствующего условия разрешимости для системы (2.7) получаем дифференциальное уравнение для  $v_0(\eta)$ :

$$(2.8) \quad Ad^2v_0/d\eta^2 - \eta^2 Bv_0 - g_2 v_0 C = 0.$$

Коэффициенты  $A, B, C$ , входящие в (2.8), выписаны в приложении. Следуя [11], перейдем к переменной  $\zeta = \sqrt{2\eta(B/A)^{1/4}}$  и получим из (2.8)

$$(2.9) \quad \frac{d^2v_0}{d\zeta^2} - \frac{1}{4}\zeta^2 v_0 - \frac{1}{2}g_2 \frac{C}{A} \left( \frac{A}{B} \right)^{1/2} = 0.$$

Решение (2.9), затухающее при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , указано в [11]:  $v_0 = \exp(-\zeta^2/4) \times H_m(\zeta)$  ( $H_m$  — полином Эрмита). При этом неизвестная константа  $g_2$  определяется из условия

$$(2.10) \quad g_2 = \frac{A}{C} \sqrt{\frac{B}{A}} (1 + 2m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Различные значения параметра  $m$  в (2.10) отвечают различным модам задачи устойчивости пограничного слоя на искривленной поверхности. В данной работе рассматривается только первая мода, соответствующая  $m = 0$ . Результаты численных расчетов  $y_+, g_0, g_2$  при  $\sigma_0 = 0$  и различных  $M$  представлены в таблице. Расчет выполнялся для теплоизолированной поверхности при  $Pr = 0,72$ , показателе адиабаты  $\gamma = 1,4$ . Вязкость полагалась зависящей от температуры по формуле Сазерленда. Температура торможения 310 К.

**3. Приближенные соотношения.** Как указано в [12], асимптотический анализ задачи при  $\beta \rightarrow \infty$  дает хорошие результаты при формальном использовании полученных соотношений при  $\beta \leq 1$ . Удобство асимптотических результатов заключается в том, что вместо сложной процедуры решений систем дифференциальных уравнений требуется решение лишь алгебраических уравнений, которые могут быть легко запрограммированы для их численного анализа. Как оказывается, при формальном использовании асимптотических соотношений при  $\beta = O(1)$ ,  $\sigma \geq 1$  координата  $y_+$  находится на небольшом удалении от стенки. Поэтому для получения приближенных соотношений можно воспользоваться разложением всех функций основного течения в ряд Тейлора в окрестности  $y = 0$ . Ограничимся лишь первыми членами разложения. Тогда из (2.6) получим при  $Pr = 1$ , когда вязкость линейно зависит от температуры,

$$(3.1) \quad \sigma_0 = T_w^2 / U_w' y_+,$$

где штрих — дифференцирование по  $y$ , а индекс  $w$  означает, что данная функция вычисляется при  $y = 0$ . Предлагаемые приближенные соотноше-

$M$	$y_+$	$g_0$	$g_2$
0	2,16	2,96	2,86
1	2,85	4,08	3,62
3	5,11	14,50	10,72

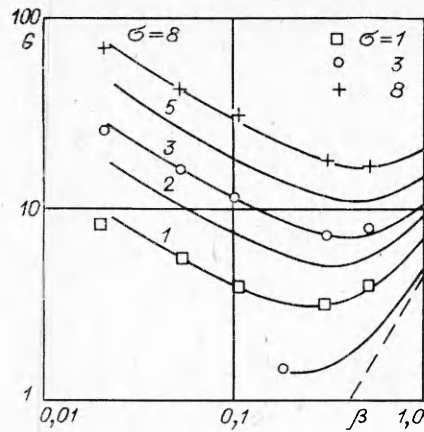


Рис. 2

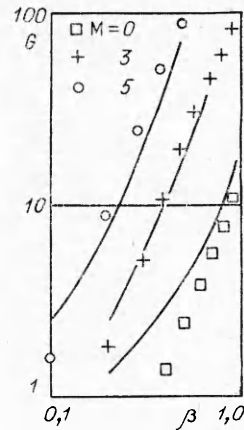


Рис. 3

ния будут более точно аппроксимировать найденные асимптотические решения, когда обтекаемая поверхность теплоизолированная и отсутствует отсос пограничного слоя, так как в этом случае второй член разложения по степеням  $y_+$  обращается в нуль. Так, погрешность в (3.1) при этом имеет порядок  $O(y_+)$ . Получаемые приближенные соотношения пригодны лишь при  $y_+ \rightarrow 0$ , что накладывает соответствующее ограничение на  $\sigma_0$  в (3.1). Точная оценка допустимых значений  $\sigma_0$  должна определяться из рассмотрения остаточного члена в (3.1). Как будет видно из сравнения результатов численных расчетов с приближенными соотношениями, последние дают удовлетворительные результаты даже при  $\sigma > 1$ .

После всех необходимых вычислений получаем следующие выражения:

$$(3.2) \quad g_0 = 2T_w^4 / ((U'_w)^2 y_+) = 2T_w^2 \sigma_0 / U'_w, \quad g_2 = \sqrt{2} T_w^4 / ((U'_w)^2 y_+^2) = \sqrt{2} \sigma_0^2, \\ G^2 = g_0 \beta^4 + g_2 \beta^6 = 2T_w^2 \sigma \beta^2 / U'_w + \sqrt{2} \sigma^2 / \beta.$$

Учитывая, что на теплоизолированной поверхности без отсоса пограничного слоя  $T_w = (1 + 0,5(\gamma - 1)M^2)$ ,  $U'_w = 0,332$ , из (3.2) находим

$$(3.3) \quad G = \sqrt{6,02(1 + 0,5(\gamma - 1)M^2)^2 \sigma \beta^2 + 1,41 \sigma^2 / \beta^2}.$$

На рис. 2 представлено сравнение прямого численного решения задачи при  $M = 3$  из [10] (сплошные линии) и расчета по приближенной формуле (3.3). Напомним, что приближенные соотношения (3.1)–(3.3) непригодны при  $\sigma \rightarrow 0$ . На рис. 2 также представлена асимптотика для нейтральной кривой устойчивости (штриховая линия). Из (3.3) можно найти уравнение для линии максимальных скоростей усиления в плоскости  $(\beta, G)$ :

$$(3.4) \quad G = 12,4 \beta^{5/2} (1 + 0,5(\gamma - 1)M^2)^2.$$

На рис. 3 представлено сравнение результатов расчетов из [10] (линии) и полученных по приближенной формуле (3.4). Из рис. 2, 3 видно, что приближенные соотношения правильно отражают результаты прямого численного расчета. Их простота может быть полезна для выполнения оценочных расчетов, возникающих в инженерной практике.

Авторы выражают благодарность В. Н. Жигулеву за полезные обсуждения результатов работы.

#### Приложение

$$q_1 = \frac{\sigma_0 U}{T} + \mu, \quad q_2 = \frac{\sigma_0 U}{T} + \frac{\mu}{Pr},$$

$$S_1 = -u_1 \eta \frac{dq_1}{dy} - \frac{u_2}{2} \eta^2 \frac{d^2 q_1}{dy^2} - v_1 \eta \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right) - \frac{v_0}{2} \eta^2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right) + \mu \frac{d^2 u_0}{d\eta^2},$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= -\frac{2Ug_z v_0}{T} + \frac{g_z U^2}{T^2} \Theta_0 - 2g_0 \mu_1 \eta \frac{d}{dy} \left( \frac{U}{T} \right) - g_0 \mu_0 \eta^2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{U}{T} \right) - v_1 \eta \frac{dq_1}{dy} - \\
&\quad - \frac{v_0}{2} \eta^2 \frac{d^2 q_1}{dy^2} + g_0 \Theta_1 \eta \frac{d}{dy} \left( \frac{U^2}{T^2} \right) + \frac{g_0}{2} \Theta_0 \eta^2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{U^2}{T^2} \right) + \mu \frac{d^2 v_0}{d\eta^2} - \frac{dp_0}{d\eta}, \\
S_3 &= -v_1 \eta \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} \right) - \frac{v_0}{2} \eta^2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} \right) - \Theta_1 \eta \frac{dq_2}{dy} - \frac{\Theta_0}{2} \eta^2 \frac{d^2 q_2}{dy^2} + \frac{\mu}{Pr} \frac{d^2 \Theta_0}{d\eta^2}, \\
A &= \frac{2U}{T^2} \frac{dU}{dy} \mu \frac{q_2}{q_1} - \frac{\mu}{Pr} \frac{U^2}{T^3} \frac{dT}{dy} \xi_0 \frac{q_1}{q_2} + q_1 q_2 (q_1 + \mu), \\
B &= -2g_0 \left[ \frac{q_2 U}{q_1 T} \frac{dq_1}{dy} - q_2 \frac{d}{dy} \left( \frac{U}{T} \right) \right] \left[ \frac{1}{q_1 T} \frac{dU}{dy} \frac{dq_1}{dy} - \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right) \right] - \\
&\quad - g_0 \left[ q_1 \frac{d}{dy} \left( \frac{U^2}{T^2} \right) - \frac{U^2 q_1}{T^2 q_2} \frac{dq_2}{dy} \right] \left[ \frac{1}{q_2 T} \frac{dT}{dy} \frac{dq_2}{dy} - \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{g_0}{T} q_2 \frac{dU}{dy} \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{U}{T} \right) + \frac{q_1 q_2}{2} \frac{d^2 q_1}{dy^2} + \frac{g_0 q_1}{2T} \frac{dT}{dy} \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{U^2}{T^2} \right) + \frac{g_0 U^2 q_1}{2T^2} \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} \right) - \\
&\quad - \frac{g_0 U^2 q_1}{2T^3 q_2} \frac{dT}{dy} \frac{d^2 q_2}{dy^2} + \frac{g_0 U q_2}{T q_1} \frac{dU}{dy} \frac{d^2 q_1}{dy^2} - \xi_0 \frac{U}{T} q_2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right), \\
C &= \frac{U^2 q_1}{T^2} \frac{dT}{dy} - \frac{2U q_2}{T^2} \frac{dU}{dy}.
\end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tani I. Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a concave wall // J. Geophys. Res.— 1962.— V. 17, N 8.
2. Kamotani Y., Lin J. K., Ostrach S. Effect of destabilizing heating on Görtler vortices // Trans. ASME: J. Heat Transf.— 1985.— V. 107, N 4.
3. Козлов Л. Ф., Цыганиук А. И., Бабенко В. В. и др. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях.— Киев: Наук. думка, 1985.
4. Saric W. S., Dagenhart J. R., Floryan J. M. Görtler vortices in 2-D and 3-D flows // 2nd IUTAM-Symp. on laminar-turbulent transition: Abstracts.— Novosibirsk, 1984.
5. Beckwith I. E., Malic M. R., Chen F. J., Bushnell D. M. Effects of nozzle design parameters on the extent of quiet test flow at Mach 3,5 // Laminar-turbulent transition/ Ed. V. V. Kozlov.— Berlin: Springer-Verlag, 1985.
6. Herbert T. On the stability of the boundary layer along a concave wall // Arch. Mech. Stosow.— 1976.— V. 28, N 5—6.
7. Floryan J. M., Saric W. S. Stability of Görtler vortices in boundary layers // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 3.
8. Floryan J. M., Saric W. S. Wave length selection and growth of Görtler vortices.— N. Y., 1980.— (Paper/AIAA; N 80—1376).
9. Ragab S. A., Nayfeh A. H. Effect of pressure gradients on Görtler instability.— N. Y., 1980.— (Paper/AIAA; N 80—1377).
10. El-Hady N. M., Verma A. K. Instability of compressible layers along curved walls with suction or cooling.— N. Y., 1982.— (Paper/AIAA; N 82—1010).
11. Hall P. Taylor—Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 124.
12. Hall P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 130.

Поступила 16/II 1987 г.