АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МНОГОПЛАСТОВЫХ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В. Е. Влюшин, О. Н. Харин (*Москва*)

В статье исследуется процесс распределения давления в двух нефтеводоносных пластах кругового месторождения радиуса R_+ при раздельной разработке их нефтяных залежей различными системами скважин. Предполагается, что рассматриваемые пласты разделены пропластком со значительно худшими коллекторскими свойствами.

Задача решается при помощи конечного преобразования Ханкеля на основе метода непрерывного распределения стоков по площади [1]. При этом допускается возможность осреднения потока по высоте [2]. В статье употребляются общепринятые в теории упругого режима обозначения [3].

Предположим, что в каждом из двух продуктивных пластов радиуса R_+, разделенных слабо проницаемым пропластком, имеются круговые нефтяные залежи, расположенные концентрично их границе.

Обе залежи имеют одинаковый радиус R_- и разрабатываются стоками, непрерывно распределенными по их площади, с постоянными плотностями q_1 и q_2.

Функции распределения давления $p_1(r, t)$ и $p_2(r, t)$ соответственно в первом и втором пластах в этом случае удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений, которая легко может быть получена из уравнений неразрывности и движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial r}-\Lambda_1(p_1-p_2)&=\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\mu}{k_1b_1}q_1(r)\\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r}-\Lambda_2(p_2-p_1)&=\frac{1}{\varkappa_2}\frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{\mu}{k_2b_2}q_2(r)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь

$$\Lambda_1=\frac{k_3}{b_3b_1k_1},\qquad \Lambda_2=\frac{k_3}{b_3b_2k_2},\qquad q_{1,2}(r)=\begin{cases}q_{1,2} & (0\leqslant r<R_-)\\ 0 & (R_-<r\leqslant R_+)\end{cases}\tag{2}$$

Отметим, что объемные дебиты жидкости в пластовых условиях Q_1 и Q_2 соответственно из первого и второго пластов равны

$$Q_1=\pi R_-^2q_1,\qquad Q_2=\pi R_-^2q_2\tag{3}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ пластовое давление всюду одинаково и равно p_0.

Найдем распределение давления $p_1(r, t)$ и $p_2(r, t)$ для любого момента времени в обоих пластах, если на их границе поддерживается постоянное, равное начальному, давление.

Для большей общности решения и упрощения записи воспользуемся безразмерными величинами

$$\begin{gathered}r^\times=\frac{r}{R_+},\quad R=\frac{R_-}{R_+},\quad \tau=\frac{\varkappa_1t}{R_+^2},\quad \varkappa=\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2},\quad \lambda_{1,2}=\Lambda_{1,2}\cdot R_+^2,\quad Q=\frac{Q_2}{Q_1}\\ q_1^\times=\frac{2\pi R_+^2}{Q_1}q_1,\quad q_2^\times=\frac{2\pi b_1k_1R_+^2}{b_2k_2Q_1}q_2\\ p_{1,2}^\times=\frac{2\pi b_1k_1}{Q_1\mu}(p_0-p_{1,2}),\quad \beta=\frac{k_1b_1}{k_2b_2}\end{gathered}\tag{4}$$

В дальнейшем изложение ведется в безразмерных величиинах и во всех обозначениях значок $^\times$ опускается.

Рассматриваемая задача сводится тогда к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial r}-\lambda_1(p_1-p_2)&=\frac{\partial p_1}{\partial \tau}-q_1(r)\\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r}-\lambda_2(p_2-p_1)&=\varkappa\frac{\partial p_2}{\partial \tau}-q_2(r)\end{aligned}\qquad q_{1,2}(r)=\begin{cases}q_{1,2} & (0\leqslant r\leqslant R)\\ 0 & (R<r\leqslant 1)\end{cases}\tag{5}$$

при следующем начальном и граничных условиях:

$$p_{1,2}=0\quad \text{при } 0\leqslant r\leqslant 1,\qquad \tau=0\tag{6}$$

$$p_{1,2}=0\quad \text{при } r=1,\qquad \tau\geqslant 0\tag{7}$$

и условиях в центре пластов

$$r\frac{\partial p_{1,2}}{\partial r}\Big|_{r=0}=0 \tag{8}$$

Применим к уравнениям системы (5) и начальному условию (6) конечное преобразование Ханкеля, определяемое выражением

$$F(s)=\int_0^1 f(r)\,rJ_0(sr)\,dr \tag{9}$$

где в качестве s выбираются положительные корни a_n $(n=1,2,\ldots)$ уравнения

$$J_0(a_n)=0 \tag{10}$$

Здесь $J_\nu(z)$ — цилиндрическая функция первого рода порядка ν.

В результате получаем, что для отыскания изображений (по Ханкелю) $P_{1,2}(s,\tau)$ функций распределения понижения давления $p_{1,2}(r,\tau)$ следует решить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dP_1}{d\tau}=-a_n^2P_1-\lambda_1(P_1-P_2)+q_1\frac{R}{a_n}J_1(Ra_n)\\ \varkappa\frac{dP_2}{d\tau}=-a_n^2P_2-\lambda_2(P_2-P_1)+q_2\frac{R}{a_n}J_1(Ra_n)\end{gathered} \tag{11}$$

при начальном условии

$$P_1=P_2=0 \quad \text{при } \tau=0 \tag{12}$$

Решение системы (11) может быть представлено в виде

$$P_i(a_n,\tau)=A_i(a_n)+B_i(a_n)\exp\eta_1(a_n)\tau+C_i(a_n)\exp\eta_2(a_n)\tau \qquad (i=1,2) \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{gathered}A_1(a_n)=\frac{R}{a_n^3}J_1(Ra_n)\frac{(a_n^2+\lambda_2)q_1+\lambda_1q_2}{a_n^2+\lambda_1+\lambda_2}\\ A_2(a_n)=\frac{R}{a_n^3}J_1(Ra_n)\frac{(a_n^2+\lambda_2)q_2+\lambda_2q_1}{a_n^2+\lambda_1+\lambda_2}\\ B_1(a_n)=q_1\frac{R}{a_n}J_1(Ra_n)\frac{\eta_1(a_n)+(a_n^2+\lambda_2)/\varkappa+\lambda_1q_2/q_1\varkappa}{\eta_1(a_n)[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)]}\\ B_2(a_n)=\frac{q_2R}{\varkappa a_n}J_1(Ra_n)\frac{\eta_1(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_2q_1/q_2}{\eta_1(a_n)[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)]}\\ C_1(a_n)=q_1\frac{R}{a_n}J_1(Ra_n)\frac{\eta_2(a_n)+(a_n^2+\lambda_2)/\varkappa+\lambda_1q_2/q_1\varkappa}{\eta_2(a_n)[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)]}\\ C_2(a_n)=\frac{q_2R}{\varkappa a_n}J_1(Ra_n)\frac{\eta_2(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_2q_1/q_2}{\eta_2(a_n)[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)]}\end{gathered} \tag{14}$$

$$\eta_1(a_n)=-\frac{1}{2}\left[a_n^2\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)+\lambda_1+\frac{\lambda_2}{\varkappa}-\left(\left(a_n^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}+\lambda_1-\frac{\lambda_2}{\varkappa}\right)^2+4\frac{\lambda_1\lambda_2}{\varkappa}\right)^{1/2}\right]$$

$$\eta_2(a_n)=-\frac{1}{2}\left[a_n^2\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)+\lambda_1+\frac{\lambda_2}{\varkappa}+\left(\left(a_n^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}+\lambda_1-\frac{\lambda_2}{\varkappa}\right)^2+4\frac{\lambda_1\lambda_2}{\varkappa}\right)^{1/2}\right]$$

Переходя от изображений к оригиналу по формуле обращения, которая для конечного преобразования Ханкеля имеет вид

$$f(r)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(a_nr)}{J_1^2(a_n)}F(a_n) \tag{15}$$

получаем выражения для функций распределения безразмерного давления в обоих пластах

$$p_i(r, \tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_i(a_n)\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} [B_i(a_n)\exp\eta_1(a_n)\tau + C_i(a_n)\exp\eta_2(a_n)\tau]\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \tag{16}$$

Так как η_1 и η_2 при любых значениях параметров пласта и жидкости, а также при всех a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ отрицательны, а их модули с увеличением n оказываются большими величинами порядка a_n^2, то при τ, не близких к нулю, вторые ряды, входящие в правые части равенства (16) с членами, содержащими экспоненты, сходятся быстро. Хуже обстоит дело с первыми рядами, входящими в правые части равенств (16).

Эти ряды сходятся очень медленно, однако для их сумм можно найти конечное выражение.

В самом деле, если в (16) τ стремится к бесконечности, то распределение давления стремится к стационарному, и в нашем случае упруговодонапорного режима будет

$$p_i(r) = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_i(a_n)\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \qquad (i = 1, 2) \tag{17}$$

С другой стороны, эти функции должны удовлетворять уравнениям (5), если в них положить $\partial p_1 / \partial\tau \equiv \partial p_2 / \partial\tau \equiv 0$.

Опуская в (5) производные по времени и решая полученную таким образом систему обыкновенных дифференциальных уравнений при условии (7), получаем выражения для $p_1(r)$ и $p_2(r)$

$$p_i(r) = -\frac{q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left\{\frac{R^2}{2}\ln R + \frac{r^2 - R^2}{4} \mp \frac{\lambda_i(q_1 - q_2)}{\omega^2(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1)} \pm\right.$$

$0 \leqslant r \leqslant R)$

$$\left.\pm\frac{\lambda_i R(q_1 - q_2)}{\omega(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1)}[K_1(R\omega)I_0(\omega) + I_1(R\omega)K_0(\omega)]\frac{I_0(r\omega)}{I_0(\omega)}\right\} \tag{18}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant R)$$

$$p_i(r) = -\frac{q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left\{\frac{R^2}{2}\ln r \mp \frac{\lambda_i R(q_1 - q_2)}{\omega(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1)} \times\right.$$

$$\left.\times [I_0(\omega)K_0(r\omega) - K_0(\omega)I_0(r\omega)]\frac{I_1(R\omega)}{I_0(\omega)}\right\}$$

$$(R \leqslant r \leqslant 1)$$

где $\omega = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$, а $I_0(z)$, $I_1(z)$, $K_0(z)$, $K_1(z)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго родов соответствующих порядков.

Для получения решений (18) были использованы общие решения соответствующей (5) однородной системы [2] и метод вариации постоянных.

Окончательно на основании формул (16) — (18) можно записать решение рассматриваемой задачи следующим образом:

$$p_i(r, \tau) = p_i(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} [B_i(a_n)\exp\eta_1(a_n)\tau + C_i(a_n)\exp\eta_2(a_n)\tau]\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \tag{19}$$

где $B_i(a_n)$, $C_i(a_n)$ и $\eta_{1,2}(a_n)$ определяются равенствами (14), а $p_i(r)$ — равенствами (18).

Следует отметить, что сформулированная выше задача решалась в самой общей постановке, когда все параметры пластов и разделяющего их пропластка различны. Естественно поэтому, что из полученного универсального решения (19) легко можно выделить разнообразные частные случаи, когда, например, $\varkappa_1 = \varkappa_2$ или $\Lambda_1 = \Lambda_2$ или же $q_1 = q_2$ и т. д. При этом решение сильно упрощается.

Рассмотрим некоторые частные случаи, которые, однако, не столь очевидны.

1. Устремим радиус обоих залежей R_- к нулю, а плотности распределения стоков — в бесконечность так, чтобы дебиты залежей оставались постоянными и равными Q_1 и Q_2.

Для этого следует положить

$$q_1 = \frac{2}{R^2}, \qquad q_2 = \frac{2}{R^2}\beta Q$$

В этом случае при $R \to 0$ последние члены правых частей уравнений (1) и (5) обратятся в нуль, а условия (8) примут вид

$$r\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r\to 0} = -1, \qquad r\left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r\to 0} = -\beta Q \tag{20}$$

Кроме того, в уравнениях (11) последние члены правых частей заменяются соответственно на 1 и βQ.

Таким образом, весь ход решения претерпевает изменение лишь в обозначениях, и в результате получим

$$p_i^*(r,\tau) = p_i^*(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_i^*(a_n)\exp\eta_1(a_n)\tau + C_i^*(a_n)\exp\eta_2(a_n)\tau\right]\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \tag{21}$$

$$(i = 1, 2)$$

Здесь

$$p_i^*(r) = -\frac{\lambda_2+\lambda_1\beta Q}{\lambda_1+\lambda_2}\ln r \pm \lambda_i\frac{1-\beta Q}{\lambda_1+\lambda_2}\,\frac{I_0(\omega)K_0(r\omega)-K_0(\omega)I_0(r\omega)}{I_0(\omega)}$$

$$B_1^*(a_n) = \frac{\eta_1(a_n) + (a_n^2+\lambda_2)/\varkappa + \lambda_1\beta Q/\varkappa}{\eta_1(a_n)\left[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)\right]}$$

$$B_2^*(a_n) = \frac{\beta Q\left[\eta_1(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_2/Q\right]}{\varkappa\eta_1(a_n)\left[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)\right]} \tag{22}$$

$$C_1^*(a_n) = \frac{\eta_2(a_n)+(a_n^2+\lambda_2)/\varkappa+\lambda_1\beta Q/\varkappa}{\eta_2(a_n)\left[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)\right]}, \qquad C_2^*(a_n) = \frac{\beta Q\left[\eta_2(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_2/Q\right]}{\varkappa\eta_2(a_n)\left[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)\right]}$$

Совокупность формул (21) и (22) позволяет подсчитывать распределение безразмерного понижения давления в обоих пластах в случае, когда они эксплуатируются скважинами исчезающе малого диаметра, расположенными в центре пластов.

2. Положим в (19) сначала $R = R^\circ$, а затем $R = R^\circ + \Delta R$ и вычтем первый результат из второго. В результате получим формулы, позволяющие находить распределения понижения давления в обоих пластах, вызванное работой непрерывно распределенных по площади колец стоков. Причем внутренние безразмерные радиусы колец будут равны R°, а их безразмерная ширина ΔR. Если теперь устремить ширину ΔR к нулю, а плотность распределения стоков в бесконечность так, чтобы дебиты колец оставались постоянными и равными соответственно Q_1 и Q_2, то получим формулы, позволяющие определять распределение давления в пластах в том случае, когда они эксплуатируются двумя галереями с постоянными дебитами Q_1 и Q_2, в виде

$$p_i^\circ(r,\tau) = p_i^\circ(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_i^\circ(a_n)\exp\eta_1(a_n)\tau + C_i^\circ(a_n)\exp\eta_2(a_n)\tau\right]\frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \tag{23}$$

$$p_i^\circ(r) = -\frac{\lambda_2+Q\beta\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\ln R^\circ \mp \lambda_i\frac{1-\beta Q}{\lambda_1+\lambda_2}\left[I_0(R^\circ\omega)K_0(\omega)-K_0(R^\circ\omega)I_0(\omega)\right]\frac{I_0(r\omega)}{I_0(\omega)} \tag{24}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant R^\circ) \qquad (i = 1, 2)$$

$$B_1^\circ(a_n) = J_0(R^\circ a_n)\,\frac{\eta_1(a_n)+(a_n^2+\lambda_2)/\varkappa+\lambda_1\beta Q}{\eta_1(a_n)\left[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)\right]}$$

$$B_2^\circ(a_n) = \frac{Q\beta}{\varkappa}J_0(R^\circ a_n)\,\frac{\eta_1(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_1/Q}{\eta_1(a_n)\left[\eta_1(a_n)-\eta_2(a_n)\right]} \tag{25}$$

$$C_1^\circ(a_n) = J_0(R^\circ a_n)\,\frac{\eta_2(a_n)+(a_n^2+\lambda_2)/\varkappa+Q\beta\lambda_1/\varkappa}{\eta_2(a_n)\left[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)\right]}$$

$$C_2^\circ(a_n) = \frac{Q\beta}{\varkappa}J_0(R^\circ a_n)\,\frac{\eta_2(a_n)+a_n^2+\lambda_1+\lambda_1/Q}{\eta_2(a_n)\left[\eta_2(a_n)-\eta_1(a_n)\right]}$$

Для значений r, лежащих в области $R^\circ \leqslant r \leqslant 1$, в формулах (24) следует R° и r поменять местами.

3. Полученные решения (19) и (23) могут быть использованы в случае, если радиусы круговых областей непрерывно распределенных стоков или галерей в разных пластах различны. Для этого в соответствующих решениях следует положить сначала $Q_2 = 0$, а $R = R_1$ или $R° = R_1°$, затем $Q_1 = 0$, а $R = R_2$ или же $R° = R_2°$ и результаты сложить.

Известно, что при значительной разнице в пластовых давлениях в продуктивных пластах через большую поверхность кровли и подошвы может произойти утечка (а в некоторых случаях — приток) определенного количества жидкости, пренебрегать которым нельзя.

В последнее время задачи по определению перетока жидкости через слабопроницаемые пронпластки становятся весьма актуальными[1].

Используя полученные в настоящей статье формулы, подсчитаем величину перетока жидкости из пласта в пласт, отнесенной к единице времени (утечку), следующим *образом:*

$$Q_0 = \frac{k_3}{\mu b_3} 2\pi \int_0^{R_+} (p_1 - p_2)\, r dr$$

или в безразмерных величинах (4)

$$Q_+ = \frac{Q_0}{Q_1} = \lambda_1 \int_0^1 (p_2 - p_1)\, r dr \tag{26}$$

Подставляя в (26) значения p_1 и p_2 из (19), (21) и (23) и произведя интегрирование, получим соответственно величины перетока из второго пласта в первый в случаях разработки пластов

а) непрерывно распределенными по их площади стоками

$$Q_+ = \lambda_1 \frac{q_2 - q_1}{\omega^2} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R I_1 (R\omega)}{\omega I_0 (\omega)}\right] + 2\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \times$$

$$\times \{[B_2 (a_n) - B_1 (a_n)] \exp \eta_1 (a_n) \tau + [C_2 (a_n) - C_1 (a_n)] \exp \eta_2 (a_n) \tau\} \frac{1}{a_n J_1 (a_n)} \tag{27}$$

б) точечными стоками, расположенными в центрах пластов

$$Q_+^* = \lambda_1 \frac{1 - \beta Q}{\omega^2} \left[\frac{1 - I_0 (\omega)}{I_0 (\omega)}\right] + 2\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \times$$

$$\times \{[B_2^* (a_n) - B_1^* (a_n)] \exp \eta_1 (a_n) \tau + [C_2^* (a_n) - C_1^* (a_n)] \exp \eta_2 (a_n) \tau\} \frac{1}{a_n J_1 (a_n)} \tag{28}$$

в) круговыми галереями, концентричными границам пластов

$$Q_+^{\circ} = \lambda_1 \frac{1 - \beta Q}{\omega^2} \left[\frac{I_0 (R^{\circ}\omega)}{I_0 (\omega)} - 1\right] + 2\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \times$$

$$\times \{[B_2^{\circ} (a_n) - B_1^{\circ} (a_n)] \exp \eta_1 (a_n) \tau + [C_2^{\circ} (a_n) - C_1^{\circ} (a_n)] \exp \eta_2 (a_n) \tau\} \frac{1}{a_n J_1 (a_n)} \tag{29}$$

Отметим, что все полученные строгими гидродинамическими методами формулы достаточно эффективны для практических расчетов и позволяют определять пластовое давление в обоих пластах, а также величину перетока с любой заданной степенью точности.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность В. Н. Щелкачеву, предложившему тему исследования и сделавшему ряд ценных замечаний при выполнении этой работы.

Поступила 7 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Влюшин В. Е. Метод непрерывного распределения стоков по площади для подсчета пластового давления при разработке крупных нефтяных залежей. Тр. МИНХ и ГП, изд. «Недра», 1964, вып. 55.
2. Гусейн-Заде М. А. Некоторые вопросы учета проницаемости кровли и подошвы пласта при движении в нем жидкости. Тр. МИНХ и ГП, Гостоптехиздат, 1961, вып. 33.
3. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.

[1] Краткий обзор упомянутых задач и методов их решений см. в работе [2].