

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Т. Н. Мартынова

(Воронеж)

В работе рассматриваются разрывные решения для напряжений при пространственном предельном состоянии статики сыпучей среды. Используется линейная зависимость касательных напряжений от нормального давления [1]. Разрывные решения плоских задач статики сыпучей среды впервые, по-видимому, исследовал Массо [2], позднее исследованиями разрывных решений теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды занимались С. А. Христианович [3], В. Прагер [4], В. В. Соколовский [5], Г. С. Шапиро [6,7], Д. Д. Ивлев [8] и др.

1. Пусть имеется сыпучая среда, находящаяся в равновесии под действием внешних сил. Условие предельного состояния такой среды запишем в виде

$$\max(|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \rho) = k \quad (1.1)$$

где τ_n и σ_n — касательные и нормальные напряжения на площадке с нормалью n , а ρ и k — постоянные материала. Условие (1.1) интерпретируется в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ шестигранной пирамидой, исходящей из точки $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -k \operatorname{ctg} \rho$, равнонаклоненной к прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Если использовать ассоциированный закон течения, то максимальная свобода перемещений соответствует ребрам этой пирамиды, при этом задача становится статически определенной. Условие соответствия напряженного состояния ребру пирамиды запишется в виде

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \lambda(\sigma_1 - \sigma_3) = 2k \cos \rho + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \rho \quad (1.2)$$

где λ принимает значение, равное ± 1 в зависимости от того, какому из двух противоположных ребер пирамиды соответствует предельное напряженное состояние. Если, следуя [1], ввести переменную

$$p = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \sin \rho} \quad (1.3)$$

то из (1.2) получим следующие уравнения

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 2\lambda p - 2k \operatorname{ctg} \rho, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2p \sin \rho \quad (1.4)$$

Из (1.4) находятся как σ_1 , так и σ_3 через новую переменную p .

Запишем напряжения в произвольной ортогональной системе координат α, β, n . Известно, что

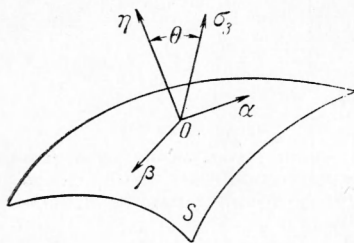
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{\alpha\beta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, определяющие ориентацию главных напряжений в системе координат α, β, n .

Полагая $\sigma_1 = \sigma_2$ и используя известные соотношения между косинусами, получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2, \quad \tau_{\alpha\beta} = -(\sigma_1 - \sigma_3) n_1 n_2 \quad (1.5)$$

Найдем σ_1 из (1.4), затем, используя (1.3), после преобразования выражений (1.5) запишем формулы для напряжений в произвольных осях



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= -k \operatorname{ctg} \rho + \lambda p - p \sin \rho \cos 2\varphi_1 \\ \sigma_\beta &= -k \operatorname{ctg} \rho + \lambda p - p \sin \rho \cos 2\varphi_2 \\ \sigma_n &= -k \operatorname{ctg} \rho + \lambda p - p \sin \rho \cos 2\theta \\ \tau_{\alpha\beta} &= -2p \sin \rho \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \tau_{\alpha n} &= -2p \sin \rho \cos \varphi_1 \cos \theta, \\ \tau_{\beta n} &= -2p \sin \rho \cos \varphi_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

здесь $\varphi_1, \varphi_2, \theta$ — углы, образованные направлением σ_3 с осями α, β, n .

Предположим теперь, что имеется некоторая поверхность S , на которой напряжения терпят разрыв. Припишем индексы плюс наверху и минус наверху напряжениям, находящимся по разные стороны от этой поверхности. Направим ось n по нормали к поверхности S , тогда оси α и β будут лежать в ее касательной плоскости (фиг. 1). В силу условия непрерывности контактирующих напряжений имеем

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^-, \quad \tau_{\alpha n}^+ = \tau_{\alpha n}^-, \quad \tau_{\beta n}^+ = \tau_{\beta n}^- \quad (1.7)$$

Ниже рассмотрим два основных случая: во-первых, когда поверхность разрыва S разделяет предельное напряженное состояние, соответствующее одному и тому же ребру предельной пирамиды, во-вторых, когда оно соответствует ее разным ребрам.

2. Рассмотрим первый случай. В соотношениях (1.6) положим $\lambda = +1$. Подставив (1.6) в (1.7), получаем

$$\begin{aligned} p^+ (1 - \sin \rho \cos 2\theta^+) &= p^- (1 - \sin \rho \cos 2\theta^-) \\ p^+ \cos \varphi_1^+ \cos \theta^+ &= p^- \cos \varphi_1^- \cos \theta^- \\ p^+ \cos \varphi_2^+ \cos \theta^+ &= p^- \cos \varphi_2^- \cos \theta^- \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выберем ось β так, чтобы $\cos \varphi_2^+ = 0$. Тогда необходимо положить и $\cos \varphi_2^- = 0$, все другие случаи равенства нулю правой части последнего выражения (2.1) не представляют интереса. Следовательно, направления n , σ_3 , α лежат в одной плоскости, откуда получим

$$\cos \varphi_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

Выражения (2.1) примут вид

$$p^+ (1 - \sin \rho \cos 2\theta^+) = p^- (1 - \sin \rho \cos 2\theta^-), \quad p^+ \sin 2\theta^+ = p^- \sin 2\theta^- \quad (2.2)$$

Из этих выражений найдем разрывы угла θ и напряжения p . Поделив верхнее равенство на нижнее, получим

$$\frac{1 - \sin \rho \cos 2\theta^+}{\sin 2\theta^+} = \frac{1 - \sin \rho \cos 2\theta^-}{\sin 2\theta^-}$$

Отсюда

$$\sin (\theta^- - \theta^+) \cos (\theta^+ + \theta^-) = \sin \rho \sin (\theta^- - \theta^+) \cos (\theta^- - \theta^+)$$

Считая, что $\sin (\theta^- - \theta^+) \neq 0$ (в противном случае не было бы разрыва), и сокращая обе части равенства на эту величину, найдем

$$\cos (\theta^+ + \theta^-) = \sin \rho \cos (\theta^- - \theta^+)$$

Отсюда после простых преобразований получим окончательно

$$\operatorname{tg} \theta^+ = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \operatorname{ctg} \theta^-, \quad \theta^+ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \operatorname{ctg} \theta^- \right) + m\pi$$

Последняя формула дает возможность определить значение угла θ^+ , если известна величина θ^- . Из формул (2.2) найдем зависимость между напряжениями

$$p^+ = p^- \frac{\sin 2\theta^-}{\sin 2\theta^+} = p^- \frac{\sin^2 \theta^-}{a} (1 + a^2 \operatorname{ctg}^2 \theta^-), \quad a = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \quad (2.3)$$

Для нахождения разрывов остальных напряжений воспользуемся формулами (1.6). Будем иметь

$$[\sigma_\alpha] = |p| + \sin \rho (p^+ \cos 2\theta^+ - p^- \sin 2\theta^-), \quad [\sigma_i] = \sigma_i^+ - \sigma_i^-$$

Отсюда, используя (2.2), найдем

$$[\sigma_\alpha] = 2[p] \quad (2.4)$$

Аналогичным образом получаем величину разрыва напряжения σ_β

$$[\sigma_\beta] = [p] (1 + \sin \rho) \quad (2.5)$$

При выбранной системе координат разрыв касательного напряжения $\tau_{\alpha\beta}$ равен нулю. Выясним теперь, как меняются разрывы напряжений в зависимости от ориентации осей в касательной плоскости к поверхности разрыва. Для этого введем новые ортогональные оси x , y , лежащие в этой плоскости, положение которых относительно старых осей определяется углом ψ . Напряжения в этих осях выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\alpha \cos^2 \psi + \sigma_\beta \sin^2 \psi + 2\tau_{\alpha\beta} \sin \psi \cos \psi \\ \sigma_y &= \sigma_\alpha \sin^2 \psi + \sigma_\beta \cos^2 \psi + 2\tau_{\alpha\beta} \sin \psi \cos \psi \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\psi + \tau_{\alpha\beta} \cos 2\psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величина разрыва напряжений (2.6) с учетом (2.4) и (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} [\sigma_x] &= [p] \{2 - (1 - \sin \rho) \sin^2 \psi\} \\ [\sigma_y] &= [p] \{2 - (1 - \sin \rho) \cos^2 \psi\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$[\tau_{xy}] = [p] (1 - \sin \rho) \sin \psi \cos \psi \quad (2.8)$$

Отсюда нетрудно получить, что величины разрывов связаны между собой следующим образом

$$([\sigma_x] - [\sigma_y])^2 + 4[\tau_{xy}]^2 = [p]^2(1 - \sin \rho)^2$$

Если построить в системе координат α, β графики соотношений (2.7) и (2.8), то они будут иметь вид, представленный на фиг. 2, где внешняя кривая соответствует разрыву σ_x , а внутренняя — разрыву напряжения τ_{xy} . Отметим, что характер изменения графиков значения $[\sigma_x]$ и $[\tau_{xy}]$ тот же, что и для разрывов напряжения в идеально-пластических телах [8], однако роль σ играет в данном случае величина p .

Для величины разрыва среднего нормального напряжения σ имеем

$$[\sigma] = \sin \rho \left([q] + \frac{1}{3} \right) [p], \quad \text{или} \quad [\sigma] = [p] \left(1 + \frac{1}{3} \sin \rho \right)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma = \sin \rho \left(q + \frac{1}{3} p \right), \quad q = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2 \sin \rho}$$

3. Пусть по разные стороны от поверхности разрыва предельное напряженное состояние соответствует противоположным ребрам предельной пирамиды. Тогда по одну сторону от поверхности разрыва полагаем в формулах (1.6) $\lambda = +1$, а по другую сторону — $\lambda = -1$. Формулы, выражающие непрерывности контактирующих напряжений (1.7), примут вид

$$-p^+(1 - \sin \rho \cos 2\theta^+) = p^-(1 + \sin \rho \cos 2\theta^-) \quad (3.1)$$

$$p^+ \sin 2\theta^+ = p^- \sin 2\theta^- \quad (3.2)$$

Аналогично придем к выражению

$$\sin(\theta^+ + \theta^-) \cos(\theta^+ - \theta^-) = \sin \rho \sin(\theta^+ - \theta^-) \cos(\theta^+ - \theta^-) \quad (3.3)$$

Предположим, что $\cos(\theta^+ - \theta^-) \neq 0$. Тогда из (3.3) получим

$$\operatorname{tg} \theta^+ = -\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \operatorname{tg} \theta^- \quad (3.4)$$

Отсюда находится разрыв угла θ . Величина разрыва p определяется из (3.2), откуда

$$p^+ = -p^- a \cos^2 \theta^- \left(1 + \frac{1}{a^2} \operatorname{tg}^2 \theta^- \right) \quad (3.5)$$

Разрывы напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ находятся из формул (1.6)

$$[\sigma_\alpha] = -2p^-(1 + b), \quad [\tau_{\alpha\beta}] = 0$$

$$[\sigma_\beta] = -p^-(1 + \sin \rho)(1 + ab), \quad b = \frac{\sin 2\theta^-}{\sin 2\theta^+}$$

здесь b на основании (3.4) выражено только через θ^- .

Вводя снова произвольную систему координат x, y в касательной плоскости к поверхности разрыва S , получим изменение разрывов напряжений в зависимости от направления

$$[\sigma_x] = [\sigma_\alpha] \cos^2 \psi + [\sigma_\beta] \sin^2 \psi$$

$$[\sigma_y] = [\sigma_\alpha] \sin^2 \psi + [\sigma_\beta] \cos^2 \psi$$

$$[\tau_{xy}] = -p^-(1 - b) \sin \rho \cos \psi \sin \psi$$

Далее исследуем случай, когда

$$\cos(\theta^+ - \theta^-) = 0, \quad \theta^+ = \theta^- + \frac{\pi}{2} + m\pi$$

Будем иметь

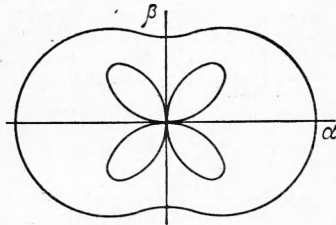
$$\cos \theta^+ = \pm \sin \theta^-, \quad \cos 2\theta^+ = -\cos 2\theta^-, \quad \sin 2\theta^+ = -\sin 2\theta^-$$

Из равенства $\tau_{\alpha n} = \tau_{\alpha n}^-$ следует, что

$$p^+ = -p^-, \quad [p] = -2p^- \quad (3.6)$$

Разрывы напряжений при этом будут равны

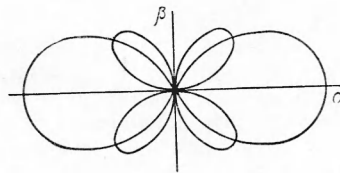
$$[\sigma_\alpha] = 0, \quad [\tau_{\alpha\beta}] = 0, \quad [\sigma_\beta] = [p] \sin \rho$$



Фиг. 2

Разрывы напряжений в произвольных осях определяются из (2.6)

$$\begin{aligned} [\sigma_x] &= [p] \sin \rho \cos^2 \psi \\ [\sigma_y] &= [p] \sin \rho \sin^2 \psi \\ [\tau_{xy}] &= [p] \sin \rho \sin \psi \cos \psi \\ ([\sigma_x] - [\sigma_y])^2 + 4[\tau_{xy}]^2 &= [p]^2 \sin^2 \rho \end{aligned} \quad (3.7)$$



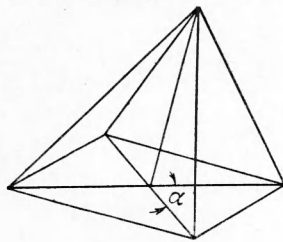
Фиг. 3

Графики функций (3.7) представлены на фиг. 3, где внешняя кривая соответствует изменению величины $[\sigma_x]$, внутренняя — величины $[\tau_{xy}]$.

Важно отметить, что из полученных формул в общем случае нельзя получить формулы работы [8] приравниванием нулю $\sin \rho$, так как существенно использовалось условие $\sin \rho \neq 0$, в противном случае величина p не имела бы смысла.

Таким образом, соотношения на поверхностях разрыва пространственных задач теории идеальной пластичности не являются предельными для соответствующих соотношений статики сыпучей среды.

4. В качестве примера рассмотрим равновесие четырехгранной пирамиды из невесомой сыпучей среды, находящейся под действием нормальных давлений, приложенных к двум ее противоположным граням. Положим, что в основании пирамиды лежит прямоугольник с меньшим углом между диагоналями, равным 2α . Пусть угол между двумя меньшими противоположными гранями равен 2γ (фиг. 4). Тогда, если обозначить угол между двумя другими гранями через $2\gamma_1$, то, как нетрудно видеть, между углами α , γ и γ_1 существует зависимость



Фиг. 4

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha \quad (4.1)$$

Плоскости, проходящие через высоту и диагонали основания пирамиды, являются плоскостями разрыва, разделяющими области постоянных напряжений. Найдем величину предельного давления, действующего на грани пирамиды. Для этого применим формулы, полученные в п. 3. В силу симметрии задачи следует рассмотреть разрывы только лишь на одной плоскости. Найдем углы, которые образуют третье главное направление напряжений с нормалью к плоскости разрыва. Из рассмотрения проекции вектора, нормального к грани пирамиды, на нормаль к плоскости разрыва имеем

$$\cos \theta^+ = \cos \gamma \sin \alpha, \quad \cos \theta^- = \cos \gamma_1 \sin \alpha \quad (4.2)$$

Преобразуем это соотношение, используя (4.1). Тогда

$$\cos^2 \gamma (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta^-}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta^+}$$

Так как при заданных α и γ левая часть является известной величиной, то обозначая ее через M и используя (3.4), получим

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta^-}{a^2 + \operatorname{tg}^2 \theta^-} = \frac{M}{a^2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \theta^- = \frac{a^2 (M - 1)}{a^2 - M} \quad (4.3)$$

Из этого соотношения видно, что так как в левой части стоит положительная величина, то и правая часть должна быть положительна, M должно удовлетворять неравенству

$$a^2 \leq M < 1$$

Таким образом, при заданном α угол γ не может быть произвольным, он должен выбираться так, чтобы не противоречить полученному неравенству. Далее, по найденному θ^- определяем θ^+ по формуле (3.4).

Найдем напряжение σ_3 . Из формул (1.4) получим

$$\sigma_3^- = -p^-(1 + \sin \rho) - k \operatorname{ctg} \rho, \quad \sigma_3^+ = p^+(1 - \sin \rho) - k \operatorname{ctg} \rho \quad (4.4)$$

Так как по условию на одной из двух граней давления нет, то, полагая $\sigma_3^+ = 0$, найдем из (4.4)

$$p^+ = \frac{k \operatorname{ctg} \rho}{1 - \sin \rho} \quad (4.5)$$

Преобразуем формулу (4.4), используя (3.2), (4.5), (3.4) и (4.3). Окончательно формула для определения предельного давления будет иметь вид

$$P = - \frac{M(1-M)}{a^2} \operatorname{ctg} \rho \quad (4.6)$$

Как видно из (4.6), предельное давление, приложенное к двум противоположным граням пирамиды, полностью определяется геометрией тела и углом внутреннего трения ρ данной сыпучей среды.

5. Предположим теперь, что предельное состояние сыпучей среды задается условиями $\sigma_1 \leq d$, $\sigma_2 \leq d$, $\sigma_3 \leq d$.

Условие полного предельного состояния означает, что мы находимся на ребре прямого угла, определяемого условиями $\sigma_1 = \sigma_2 = d$, $\sigma_3 < d$. Исследуем разрывные решения при таком предположении. По формулам (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= d - (d - \sigma_3) n_1^2, & \tau_{\alpha\beta} &= - (d - \sigma_3) n_1 n_2 \\ \sigma_\beta &= d - (d - \sigma_3) n_2^2, & \tau_{\alpha n} &= - (d - \sigma_3) n_1 n_3 \\ \sigma_n &= d - (d - \sigma_3) n_3^2, & \tau_{\beta n} &= - (d - \sigma_3) n_2 n_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из равенства контактирующих напряжений

$$p_0^+ \cos^2 \theta^+ = p_0^- \cos^2 \theta^- \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} p_0^+ \cos \varphi_1^+ \cos \theta^+ &= p_0^- \cos \varphi_1^- \cos \theta^-, & p_0^+ &= d - \sigma_3^+, \\ p_0^+ \cos \varphi_2^+ \cos \theta^+ &= p_0^- \cos \varphi_2^- \cos \theta^-, & p_0^- &= d - \sigma_3^- \end{aligned} \quad (5.3)$$

Учитывая, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, из (5.3) получим

$$p_0^{+2} \sin^2 \theta^+ \cos^2 \theta^+ = p_0^{-2} \sin^2 \theta^- \cos^2 \theta^- \quad (5.4)$$

Поделив друг на друга выражения (5.4) и (5.2), найдем

$$p_0^+ \sin^2 \theta^+ = p_0^- \sin^2 \theta^- \quad (5.5)$$

Из (5.2) и (5.5) будем иметь $p_0^+ = p_0^-$. Следовательно, величина p_0 разрыва не терпит. Для определения угла θ^+ по углу θ^- из (5.5) и (5.2) найдем

$$\cos 2\theta^+ = \cos 2\theta^-, \quad \text{или} \quad \theta^+ = \pm \theta^- + \pi$$

Найдем зависимости между другими углами. Из (5.3) имеем

$$\cos \varphi_1^+ = \pm \cos \varphi_1^-, \quad \cos \varphi_2^+ = \pm \cos \varphi_2^- \quad (5.6)$$

Заметим, что из (5.3) следует

$$\frac{\cos \varphi_1^+}{\cos \varphi_2^+} = \frac{\cos \varphi_1^-}{\cos \varphi_2^-} \quad (5.7)$$

Если в равенстве (5.6) взят определенный знак, то и в равенстве (5.7) необходимо брать тот же знак. Подставляя все найденные величины в формулы (5.1), получим

$$[\sigma_\alpha] = [\sigma_3] = [\tau_{\alpha\beta}] = 0$$

Таким образом, если предельное состояние сыпучей среды соответствует условиям $\sigma_1 = \sigma_2 = d$, $\sigma_3 < d$, то разрыва напряжений в ней не возникает.

Поступила 31 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
2. Massau. Memoire sur l'integration graphique des equations aux derivees partielles. Edition des Centenaire, Comite national de Mecanique. Bruxelles, 1952.
3. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математ. сб., новая серия, 1938, т. 1, вып. 4.
4. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. ИИЛ, М., 1956.
5. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1946.
6. Шапиро Г. С. Упруго-пластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности. ПММ, 1952, т. XIV, вып. 1.
7. Шапиро Г. С. О предельном равновесии сыпучего клина и разрывном решении статки сыпучей среды. ПММ, 1952, т. XIV, вып. 2.
8. Ивлеев Д. Д. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.