

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ/КРУЧЕНИИ

А. Г. Колпаков

Сибирская государственная академия телекоммуникаций и информатики,
630009 Новосибирск

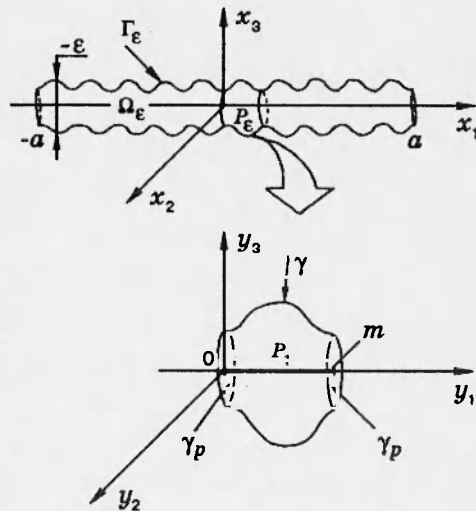
Данная работа является продолжением [1]. Изучается задача устойчивости тонкой (диаметра $\varepsilon \rightarrow 0$) балки, рассматриваемой исходно как трехмерное тело. Предельная задача для одномерной структуры (балки) получается на основе асимптотического разложения решения задачи теории упругости в области малого диаметра. Как и в [1], упругие постоянные материала балки имеют порядок ε^{-4} , что гарантирует ненулевую изгибную жесткость балки при $\varepsilon \rightarrow 0$. В [1] при условии, что начальные напряжения в балке имеют порядок ε^{-2} (т. е. 1/диаметр балки), получена классическая задача теории устойчивости балок, в которой потеря устойчивости обусловливается наличием ненулевого осевого сжимающего усилия [1]: $\langle \sigma_{11}^{(-2)} \rangle \neq 0$ (угловые скобки означают среднее значение по элементу структуры балки, см. ниже).

Что можно ожидать, если осевое усилие равно нулю? В этом случае в балке (трехмерном теле) могут возникать начальные напряжения, вызывающие потерю устойчивости. Представляется правдоподобным, что такие самоуравновешенные напряжения должны иметь большие значения, чтобы вызвать потерю устойчивости. Эта гипотеза в данной работе обеспечивается рассмотрением начальных напряжений порядка ε^{-3} с условием $\langle \sigma_{11}^{(-3)} \rangle = 0$. Ниже показано, что в рассматриваемой ситуации потеря устойчивости может инициироваться моментами начальных напряжений $\langle \sigma_{i1}^{(-3)} y_\alpha \rangle$. Исследование начальных напряжений еще более высоких порядков является отдельной задачей (приведенной для не тонких тел в [5–8]).

Анализ задачи осуществляется на основе двухмасштабного метода в версии для балок [1–4], позволяющего рассматривать как неоднородные балки периодической структуры, так и однородные цилиндрические балки [3] как частный случай.

1. Постановка задачи. Рассмотрим область $\bar{\Omega}_\varepsilon$, получающуюся периодическим повторением ячейки периодичности (ЯП) P_ε вдоль оси Ox_1 от $-a$ до a (см. рисунок). Характерный размер ЯП $\varepsilon \ll 1$, что формализуется в виде $\varepsilon \rightarrow 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ область $\bar{\Omega}_\varepsilon$ стягивается к отрезку $[-a, a]$ на оси Ox_1 .

Согласно [9], задача равновесия для тела с начальными напряжениями



имеет вид

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = 0 \quad (1.1)$$

для любой пробной функции $\mathbf{v} \in V(\Omega_\varepsilon) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } x_1 = \pm a\}$. Определение указанных классов функций см. в [4]. При этом связь между текущими напряжениями σ_{ij}^ε , перемещениями \mathbf{u}^ε и начальными напряжениями $\sigma_{ij}^{(-3)}$ следующая:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = (\varepsilon^{-4} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^{-3} b_{ijkl}(x_1, \mathbf{x}/\varepsilon)) \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l}. \quad (1.2)$$

Здесь [9] $\varepsilon^{-4} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ — тензор упругих постоянных; $b_{ijkl}(x_1, \mathbf{x}/\varepsilon) = \sigma_{jl}^{*(-3)}(x_1, \mathbf{x}/\varepsilon) \delta_{ik}$; δ_{ik} — символ Кронекера.

В соответствии с вышесказанным на начальные напряжения накладывается условие

$$\langle \sigma_{jl}^{*(-3)} \rangle = 0, \quad (1.3)$$

где $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{m} \int_{P_1} \cdot dy$ — среднее по ЯП P_1 (см. рисунок).

2. Метод асимптотического разложения. В данной работе рассматривается потеря устойчивости по глобальным формам, т. е. с появлением глобальных смещений \mathbf{u}^ε при устойчивых деформациях в пределах ЯП. Асимптотические разложения перемещений, напряжений и пробной функции выбираются в форме для балок, предложенной в [2]:

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}^{(n)}(x_1, \mathbf{y}); \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} \sigma_{ij}^{(-4)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma^{(m)}(x_1, \mathbf{y}); \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}(x_1, \mathbf{y}) \quad (2.3)$$

($\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — быстрые (локальные) переменные, $x_1 \in [-a, a]$ — медленная переменная). Функции в правых частях (2.1)–(2.3) предполагаются периодическими по y_1 с периодом m (m — длина ЯП $P_1 = \{\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon : \mathbf{x} \in P_\varepsilon\}$ вдоль оси Oy_1 (см. рисунок).

Производная от функции вида $f(x_1, \mathbf{y})$ вычисляется путем замены оператора дифференцирования по правилу [2]

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \rightarrow f_{,1x} + \varepsilon^{-1} f_{,1y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \rightarrow \varepsilon^{-1} f_{,\alpha y} \quad (\alpha = 2, 3).$$

Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие — 2, 3.

Подставив (2.1), (2.2) в (1.2), с учетом приведенного правила дифференцирования имеем

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\varepsilon^{-4} a_{ijkl} + \varepsilon^{-3} b_{ijkl}) (u_{k,1x}^{(n)} \delta_{il} + \varepsilon^{-1} u_{k,ly}^{(n)}). \quad (2.4)$$

Здесь и ниже используются обозначения: $1x = \partial/\partial x_1$; $jy = \partial/\partial y_j$.

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε , получим, в частности, следующие соотношения:

$$\text{при } \varepsilon^{-4} \quad \sigma_{ij}^{(-4)} = a_{ijk1}(\mathbf{y})u_{k,1x}^{(0)} + a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(1)}; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \varepsilon^{-3} \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = & a_{ijk1}(\mathbf{y})u_{k,1x}^{(1)} + a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(2)} + \\ & + b_{ijk1}(x_1, \mathbf{y})u_{k,1x}^{(0)} + b_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})u_{k,ly}^{(1)}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \varepsilon^{-2} \quad \sigma_{ij}^{(-2)} = & a_{ijk1}(\mathbf{y})u_{k,1x}^{(2)} + a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(3)} + \\ & + b_{ijk1}(x_1, \mathbf{y})u_{k,1x}^{(1)} + b_{ijkl}(x_1, \mathbf{y})u_{k,ly}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что определенные формулами (1.2) и (2.5)–(2.7) величины $\sigma_{ij}^{(-4)}$, $\sigma_{ij}^{(-3)}$, $\sigma_{ij}^{(-2)}$ несимметричны по ij . При этом в указанных формулах выделяются группы членов: симметричная по ij (свертка a_{ijkl} с соответствующими выражениями) и несимметричная (свертка b_{ijkl} с соответствующими выражениями).

Подстановка (2.2), (2.3) в уравнения равновесия (1.1) дает при подходящем выборе пробной функции соотношения [2]

$$\sigma_{ij,jy}^{(m)} = \bar{u} \quad \text{в } \widehat{\Omega}_1^{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij}^{(m)} n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_1^{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

где $\widehat{\Omega}_1^{\varepsilon} = \{(x_1, y_2, y_3) : \mathbf{x} \in \Omega_{\varepsilon}\}$; \mathbf{n} — нормаль к боковой поверхности Γ_1^{ε} области Ω_1^{ε} .

3. Уравнения равновесия. Как отмечалось в [10, 11], уравнения равновесия при использовании асимптотического метода получаются независимо от связи напряжения — деформации, в нашем случае — от (1.2). Для балок уравнения для осевых усилий $N_i^{(m)} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ и моментов $M_{i\alpha} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} u_{\alpha} \rangle$ представлены в [2]. Приведем уравнения равновесия из [2], которые будут использованы далее:

$$N_{11,1x}^{(-\varepsilon)} = 0, \quad N_{i1,1x}^{(-2)} = 0, \quad -M_{\alpha,1x}^{(-2)} + N_{i\alpha}^{(-2)} = 0. \quad (3.1)$$

4. Связь усилий и моментов с деформационными характеристиками. Специфика асимптотических задач рассматриваемого типа проявляется при изучении определяющих соотношений. В данном случае наличие начальных напряжений скажется, как будет видно в дальнейшем, в уравнениях, связывающих усилия и моменты с деформационными характеристиками балки, и в процедуре исключения неизвестных функций (имеющих в случае классических балок смысл перерезывающих сил) из уравнений равновесия. В случае ненапряженных балок [2] аналогичных ситуаций не возникает.

Рассмотрим задачу (2.8) при $m = -4$. В соответствии с (2.5)

$$\sigma_{ij}^{(-4)} = a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijk1}(\mathbf{y})u_{k,1x}^{(0)}(x_1). \quad (4.1)$$

Решение этой задачи приведено в [2]:

$$\mathbf{u}^{(1)} = -y_{\alpha} u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) \mathbf{e}_1 + y_{\beta} s_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \varphi(x_1) + \mathbf{V}(x_1). \quad (4.2)$$

Здесь $\varphi(x_1)$ — произвольная функция (имеющая смысл кручения балки); $\mathbf{V}(x_1)$ — произвольная функция (имеющая смысл осевого перемещения);

$s_1 = 0; s_2 = -1; s_3 = 1$; $\{e_i\}$ — базисные векторы стандартной прямоугольной системы координат; $\alpha, \beta = 2, 3$; $\bar{\beta} = \begin{cases} 2 & \text{при } \beta = 3, \\ 3 & \text{при } \beta = 2. \end{cases}$

Подстановка (4.2) в (2.6) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} = & -a_{ij11}(\mathbf{y})y_\alpha u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + a_{ijk1}(\mathbf{y})V_{k,1x}(x_1) + a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(2)} + \\ & + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y})s_\beta y_\beta \varphi_{,1x}(x_1) + b_{ij\alpha 1}(x_1, \mathbf{y})u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) - \\ & - b_{ij1\alpha}(x_1, \mathbf{y})u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + b_{ij\beta\bar{\beta}}(x_1, \mathbf{y})s_\beta \varphi(x_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь задачу (2.8) при $m = -3$, где $\sigma_{ij}^{(-3)}$ определены (4.3).

Предложение 1. Пусть начальные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} = 0 \text{ в } \Omega_\varepsilon, \quad \sigma_{ij}^* n_j = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon; \quad (4.4)$$

тогда

$$b_{ij\alpha 1, jy} = b_{ij1\alpha, jy} = b_{ij\beta\bar{\beta}, jy} = 0. \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) следует из определения b_{ijkl} и равенств

$$\sigma_{ij, jy}^{*(-3)} = 0 \text{ в } \hat{\Omega}_1^-, \quad \sigma_{ij}^{*(-3)} n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1^e, \quad (4.6)$$

получающихся из приведенных выше уравнений, если в них подставить разложения вида $\sigma_{ij}^* = \varepsilon^{-3} \sigma_{ij}^{*(-3)} + \dots$ и принять во внимание замечание 1.

В силу предложения 1 последние слагаемые в (4.3) (содержащие b_{ijkl}) при решении задачи (2.8) при $m = -3$ можно опустить, что и сделаем.

Замечание 1. При рассмотрении задач в переменных \mathbf{y} функции переменной x_1 играют роль параметра. То же имеет место при интегрировании по переменной \mathbf{y} .

С учетом замечания 1 решение задачи (2.8) $m = -3$, (4.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)} = & -N^{2\alpha}(\mathbf{y})u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) - y_\alpha V_{\alpha,1x}(x_1)\mathbf{e}_1 + \\ & + N^{11}(\mathbf{y})V_{1,1x}(x_1) + X^3(\mathbf{y})\varphi(x_1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $N^{11}, N^{2\alpha}, X^3$ — решения ячеечных задач (ЯЗ), соответствующих растяжению, изгибу и кручению структурного элемента стержня, введенные в [2]. Их явный вид в рассматриваемой задаче несуществен, поэтому они в данной работе подробно не описываются. Подробное описание этих функций имеется в [2].

Подстановка (4.7) в (4.3) после преобразований дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} = & (a_{ij11}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{k,ly}^{11}(\mathbf{y}))V_{1,1x}(x_1) - (a_{ij11}(\mathbf{y})y_\alpha + \\ & + a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + (a_{ij\beta\bar{\beta}}(\mathbf{y})s_\beta y_\beta + a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^3(\mathbf{y}))\varphi_{,1x}(x_1) + \\ & + (b_{ij\alpha 1}(x_1, \mathbf{y}) - b_{ij1\alpha}(x_1, \mathbf{y}))u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + b_{ij\beta\bar{\beta}}(x_1, \mathbf{y})s_\beta \varphi(x_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Проинтегрируем (4.8) по ЯР P_1 , затем умножим (4.8) на y_β и проинтегрируем результат по ЯП P_1 . С учетом того, что при интегрировании

по у функции аргумента x_1 играют роль параметров, получим

$$N_{11}^{(-3)} = A_1^0 V_{1,1x} - A_{i\alpha}^1 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{11}^0 \varphi_{,1x}; \quad (4.9)$$

$$M_{i\beta}^{(-3)} = {}^1A_{i\beta} V_{1,1x} - A_{i\beta\alpha}^2 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{i\beta}^1 \varphi_{,1x} + B_{i\beta\alpha} u_{\alpha,1x}^{(0)} + J_{i\beta} \varphi. \quad (4.10)$$

Предложение 2. Если $\sigma_{ij}^{*(-3)}$ удовлетворяют (4.6) и периодичны по y_1 с периодом m , то $\langle \sigma_{i\alpha}^{*(-3)} \rangle = 0$, $\alpha = 2, 3$.

Для проверки умножим первое равенство из (4.6) на y_α и проинтегрируем результат по частям на ЯП P_1 с учетом второго равенства в (4.6) и периодичности $\sigma_{ij}^{*(-3)}$ по y_1 (функция y_α также периодична по y_1). В результате получим требуемое.

В силу предложения 2 и условия (1.3) в (4.9) отсутствуют члены, содержащие $u_{\alpha,1x}^{(0)}$ и φ .

В формулах (4.9), (4.10) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \langle a_{1111}(\mathbf{y}) + a_{11kl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle, \\ A_{i\alpha}^1 &= \langle a_{1111}(\mathbf{y}) y_\alpha + a_{11kl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}) \rangle, \\ {}^1A_{i\beta} &= \langle (a_{1111}(\mathbf{y}) + a_{i1kl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{11}(\mathbf{y})) y_\beta \rangle, \\ A_{i\alpha\beta}^2 &= \langle (a_{i111}(\mathbf{y}) y_\alpha + a_{i1kl}(\mathbf{y}) N_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y})) y_\beta \rangle, \\ B_{ij}^0 &= \langle a_{ij\gamma\tilde{\gamma}}(\mathbf{y}) s_\gamma y_\gamma + a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^3(\mathbf{y}) \rangle, \\ B_{i\beta}^1 &= \langle (a_{i1\gamma\gamma}(\mathbf{y}) s_\gamma y_\gamma + a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^3(\mathbf{y})) y_\beta \rangle, \\ B_{i\beta\alpha} &= \langle (b_{i1\alpha 1} - b_{i11\alpha}) y_\beta \rangle = \langle \sigma_{11}^{*(-3)} y_\beta \rangle \delta_{i\alpha} - \langle \sigma_{1\alpha}^{*(-3)} y_\beta \rangle \delta_{i1}, \\ J_{i\beta} &= \langle b_{i1\gamma\gamma} s_\gamma y_\beta \rangle = \langle \sigma_{1\tilde{\gamma}}^{*(-3)} y_\beta \rangle s_\gamma \delta_{i\gamma}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Первые шесть равенств в (4.11) определяют жесткости балки на растяжение, изгиб и кручение. Сравнив с [2], можно заметить, что они те же, что для балки без начальных напряжений. Последние два равенства в (4.11) показывают, что в рассматриваемом случае имеет место зависимость определяющих соотношений от начальных напряжений, но она отлична от приведенной в [9]. Представленная в [9] зависимость возникает при рассмотрении начальных напряжений порядка ε^{-4} .

Уравнения равновесия (3.1) разбиваются на следующие группы:

$$N_{11,1x}^{(-3)} = 0; \quad (4.12)$$

$$N_{i1,1x}^{(-2)} = 0; \quad (4.13)$$

$$-M_{\alpha i,1x}^{(-3)} + N_{i\alpha}^{(-2)} = 0. \quad (4.14)$$

В (4.14) присутствует неопределенная функция $N_{ij}^{(-2)}$. Процедура ее исключения из (4.14) при отсутствии предварительных напряжений такова [2]: при $i = 1$ дифференцируется уравнение (4.14)

$$-M_{\alpha 1,1x1x}^{(-3)} + N_{1\alpha,1x}^{(-2)} = 0, \quad (4.15)$$

а затем используется (4.13) при $i = \alpha$

$$N_{\alpha 1, 1x}^{(-2)} = 0.$$

Если бы величины $N_{ij}^{(-2)}$ были симметричны по ij (как симметричны напряжения $\sigma_{ij}^{*(-3)}$ или усилия в случае отсутствия начальных напряжений [2]), мы пришли бы к классическому уравнению равновесия $-M_{\alpha 1, 1x}^{(-2)} = 0$. В рассматриваемом случае такой симметрии нет. Для исключения $N_{1\alpha}^{(-2)}$ выделим несимметричную часть $N_{1\alpha}^{(-2)}$ путем представления $N_{1\alpha}^{(-2)}$ в виде $N_{1\alpha}^{(-2)} = N_{\alpha 1}^{(-2)} + K_\alpha$ и заметим, что в силу симметрии упругих постоянных a_{ijkl} [12] в (2.7) член, содержащий неизвестную функцию $u^{(3)}$, симметричен по ij . Вследствие чего для вычисления K_α знать $u^{(3)}$ необязательно.

В результате получаем

$$K_\alpha = N_{1\alpha}^{(-2)} - N_{\alpha 1}^{(-2)} = \langle \sigma_{1\alpha}^{(-2)} - \sigma_{\alpha 1}^{(-2)} \rangle = \langle (b_{1\alpha k l} - b_{\alpha 1 k l}) u_{k, 1x}^{(1)} \rangle + \langle (b_{1\alpha k l} - b_{\alpha 1 k l}) u_{k, 1y}^{(2)} \rangle. \quad (4.16)$$

Предложение 3. Для напряжений $\sigma_{ij}^{*(-3)}$, описанных в предложениях 1, 2, имеет место равенство

$$\langle (b_{1\alpha k l} - b_{\alpha 1 k l}) u_{k, 1y}^{(2)} \rangle = 0. \quad (4.17)$$

Для доказательства рассмотрим величину $\langle \sigma_{\gamma l}^{*(-3)} u_{k, 1y}^{(2)} \rangle$. Интегрирование по частям на P_1 показывает, что она имеет вид

$$-\int_{P_1} \sigma_{\gamma l, 1y}^{*(-3)} u_k^{(2)} dy + \int_{\gamma} \sigma_{\gamma l}^{*(-3)} n_l u_k^{(2)} dy + \int_{\gamma_p} \sigma_{\gamma l}^{*(-3)} n_l u_k^{(2)} dy = 0.$$

Последнее равенство следует из (4.6) с учетом периодичности функций $\sigma_{\gamma l}^{*(-3)}$, $u^{(2)}$ и противоположности нормалей на гранях γ_p ЯП P_1 , перпендикулярных оси Oy_1 (см. рисунок). Равенство (4.17), ввиду того что $b_{ijkl} = \sigma_{ji}^{*(-3)} \delta_{ik}$, сводится к рассмотренному выше.

Подставляя в (4.16) выражение для $u^{(1)}$ (4.2) и $u^{(2)}$ (4.7), с учетом предложения 3 получим

$$K_\alpha = \langle (b_{1\alpha k l} - b_{\alpha 1 k l}) u_{k, 1x}^{(1)} \rangle = \langle (b_{1\alpha 11} - b_{\alpha 111}) y_\beta \rangle u_{\beta, 1x}^{(0)}(x_1) + \langle (b_{1\alpha \beta 1} - b_{\alpha 1 \beta 1}) y_\beta \rangle s_\beta \varphi_{, 1x}(x_1) + \langle b_{1\alpha k l} - b_{\alpha 1 k l} \rangle V_{k, 1x}(x_1).$$

Подставив в это равенство $b_{ijkl} = \sigma_{ji}^{*(-3)} \delta_{ik}$ и пользуясь предложением 2, находим

$$K_\alpha = \langle \sigma_{\alpha 1}^{*(-3)} y_\beta \rangle u_{\beta, 1x}^{(0)} - \langle \sigma_{11}^{*(-3)} y_\beta \rangle \delta_{\alpha\beta} s_\beta \varphi_{, 1x}. \quad (4.18)$$

Перейдем к уравнениям для момента кручения $M = M_{32}^{(-3)} - M_{23}^{(-3)}$. Уравнения равновесия для M получаются непосредственно из (4.14):

$$-M_{, 1x} + K = 0.$$

Здесь

$$K = N_{32}^{(-2)} - N_{23}^{(-2)}.$$

Поступая аналогично предыдущему, с учетом (2.7), (4.2) и предложения 3 имеем

$$K = -\langle (b_{3211} - b_{2311})y_\alpha \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + \langle (b_{32\beta 1} - b_{23\beta 1})y_\beta \rangle s_\beta \varphi_{,1x}(x_1) + \langle b_{32k1} - b_{23k1} \rangle V_{k,1x}(x_1).$$

Учитывая, что $b_{ijkl} = \sigma_{jl}^{*(-3)} \delta_{ik}$, и используя предложение 2, находим

$$K = \langle \sigma_{21}^{*(-3)} y_2 + \sigma_{31}^{*(-3)} y_3 \rangle \varphi_{,1x}. \quad (4.19)$$

Отметим, что (4.18), (4.19) можно представить как

$$K_\alpha = M_{\alpha\beta}^* u_{\beta,1x}^{(0)} + M_{1\alpha}^* s_\alpha \varphi_{,1x}, \quad K = (M_{22}^* + M_{33}^*) \varphi_{,1x}, \quad (4.20)$$

где $M_{\alpha\beta}^* = \langle \sigma_{\alpha 1}^{*(-3)} y_\beta \rangle$ — моменты предварительных напряжений.

Возникшая система уравнений имеет вид

$$N^0(V_{1,1x}, u_{\beta,1x}^{(0)}, \varphi_{,1x})_{,1x} = 0; \quad (4.21)$$

$$(M_x^0(V_{1,1x}, u_{\beta,1x}^{(0)}, \varphi_{,1x}) + \lambda B_{1\alpha\beta} u_{\beta,1x}^{(0)})_{,1x} = -\lambda K_\alpha (u_{\beta,1x}^{(0)}, \varphi_{,1x})_{,1x}; \quad (4.22)$$

$$(M^0(V_{1,1x}, u_{\beta,1x}^{(0)}, \varphi_{,1x}) + \lambda(B_{23\beta} - B_{32\beta})u_{\beta,1x}^{(0)} + \lambda(J_{23} - J_{32})\varphi)_{,1x} = -\lambda K(\varphi_{,1x}). \quad (4.23)$$

Здесь через N^0 , M_α^0 , M^0 обозначены выражения, соответствующие задаче без начальных напряжений (получаются из (4.9)–(4.11) при $\sigma_{ij}^{*(-3)} = 0$); остальные величины даются (4.18), (4.19).

Уравнения (4.21)–(4.23) для наглядности записаны для начальных напряжений, пропорциональных параметру λ , т. е. $\varepsilon^{-3} \lambda \sigma_{ij}^{*(-3)}$ (в виде задачи на собственные значения).

Для коэффициентов в левых частях (4.22), (4.23), согласно (4.11), получим

$$B_{1\alpha\beta} = -\langle \sigma_{\alpha 1}^{*(-3)} y_\beta \rangle = -M_{\alpha\beta}^*,$$

$$B_{23\beta} - B_{32\beta} = \langle \sigma_{11}^{*(-3)} y_3 \rangle \delta_{2\beta} - \langle \sigma_{11}^{*(-3)} y_2 \rangle \delta_{3\beta} = M_{13}^* \delta_{2\beta} - M_{12}^* \delta_{3\beta}, \quad (4.24)$$

$$J_{23} - J_{32} = -\langle \sigma_{31}^{*(-3)} y_3 \rangle - \langle \sigma_{21}^{*(-3)} y_2 \rangle = -M_{33}^* - M_{22}^*.$$

Краевые условия для уравнений (4.21)–(4.23) при жестком закреплении торцов стержня таковы [2]:

$$V_1(\pm a) = u_\alpha^{(0)}(\pm a) = u_{\alpha,1x}^{(0)}(\pm a) = \varphi(\pm a) = 0. \quad (4.25)$$

Таким образом, получена полная предельная задача для описания балки как одномерной структуры.

Отметим, что коэффициенты оператора, описывающего потерю устойчивости в (4.24), имеют смысл моментов начальных напряжений.

Предложение 4. Пусть начальные напряжения удовлетворяют условиям предложения 1, тогда

$$\langle \sigma_{i\alpha}^{*(-3)} y_\alpha \rangle = 0. \quad (4.26)$$

Для доказательства (4.26) достаточно умножить первое уравнение из (4.6) на y_z^2 и проинтегрировать результат по частям с учетом краевого условия из (4.6) и периодичности $\sigma_{i\alpha}^{*(-3)}$, y_α по y_1 .

В качестве следствия предложения 4 при $i = 1$ с учетом симметрии $\sigma_{ij}^{*(-3)}$ по ij имеем $M_{3\alpha}^* = \langle \sigma_{\alpha 1}^{*(-3)} y_\alpha \rangle = 0$. Последнее приводит к обращению в нуль K из (4.20) и $J_{23} - J_{32}$ из (4.24). В силу полученных равенств и (4.23), (4.25) заключаем, что в данном случае невозможна чисто крутильная форма потери устойчивости.

5. К вопросу о вычислении начальных напряжений. Рассматривая формулы (4.11), заметим, что коэффициенты A_1^0 , $A_{1\alpha}^1$, ${}^1A_{i\beta}$, $A_{i\alpha\beta}^2$, B_{ij}^0 , $B_{i\beta}^1$ вычисляются через решения ячеечных задач N^{11} , $N^{2\alpha}$, X^3 , непосредственно связанных со структурой балки [1, 2, 4]. В то же время коэффициенты, соответствующие потере устойчивости, не содержат явно таких функций (см. (4.20), (4.24)). Это не означает независимости коэффициентов (4.20), (4.24) от структуры балки вообще, просто зависимость имеет неявную форму.

Согласно [2], напряжения $\sigma_j^{*(-3)}$ могут быть выражены через решения ЯЗ и решения предельной задачи, отвечающей (4.6). Подстановка этого выражения в (4.20), (4.24) дает явные выражения коэффициентов из (4.20), (4.24) через решения ЯЗ. В рассматриваемом случае удобнее определить из решения предельной задачи только моменты $M_{\alpha\beta}^*$. При этом зависимость $M_{\alpha\beta}^*$ от структуры балки проявится в их зависимости от коэффициентов A_1^0 , $A_{1\alpha}^1$, ${}^1A_{i\beta}$, $A_{i\alpha\beta}^2$, B_{ij}^0 , $B_{i\beta}^1$.

Для балок, образованных из структурных элементов типа балок, стержней и т. п., что часто встречается, для решения ЯЗ могут быть использованы методы, разработанные в [13, 14].

В связи с полученными результатами отметим, что в строительной механике (см., например, [15]) на основании метода гипотез рассматриваются вопросы потери устойчивости несимметричных (составных) балок. Имеется некоторая аналогия между формулами из [15] и (4.21)–(4.23), хотя она не простирается далее наличия в обоих случаях выражений, содержащих производные различных порядков в членах уравнений, соответствующих потере устойчивости. В качестве отличия от [15] отметим, что формулы (4.21)–(4.23) справедливы для однородных (несоставных) балок, испытывающих изгибающие или крутящие моменты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колпаков А. Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 6. С. 139–144.
2. Колпаков А. Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // Прикл. математика и механика. 1991. Вып. 3. С. 440–448.
3. Колпаков А. Г. Жесткости упругих цилиндрических балок // Прикл. математика и механика. 1994. Вып. 2. С. 102–109.
4. Аннин Б. Д., Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993.
5. Колпаков А. Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66–73.
6. Kolpakov A. G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congress on Computational Mechanics. 1990. Stuttgart: Abstrs. P. 453–456.

7. **Колпаков А. Г.** On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // *Comput. and Struct.* 1992. V. 44, N 1/2. P. 97-101.
8. **Колпаков А. Г.** Жесткостные характеристики напряженных конструкций // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 2. С. 155-163.
9. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
10. **Колпаков А. Г.** Тонкие упругие пластинки периодического строения с односторонними контактами // *ПМТФ.* 1991. № 6. С. 136-142.
11. **Колпаков А. Г.** Конструкции малого диаметра с внутренними односторонними контактами // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 1. С. 129-135.
12. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
13. **Колпаков А. Г.** Усредненные характеристики термоупругих каркасов // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 6. С. 53-61.
14. **Колпаков А. Г.** К определению усредненных характеристик упругих каркасов // *Прикл. математика и механика.* 1985. Вып. 6. С. 969-977.
15. **Ржаницин А. Р.** Строительная механика. М.: Высш. шк., 1991.

*Поступила в редакцию 30/VIII 1994 г.,
в окончательном варианте — 19/X 1994 г.*
