ПМТФ, № 4, 1972

УДК 532.526;536.24

ТЕПЛООБМЕН СФЕРЫ СО ВДУВОМ ПРИ МЕДЛЕННОМ ОБТЕКАНИИ

М. В. Башкатов, С. И. Шабанов

(Новосибирск)

Проводится аналитическое решение задачи о конвективном тепло- и массообмене сферы с поперечным потоком вещества на поверхности при значениях критерия Пекле меньше единицы и при скорости вдува меньше скорости набегающего газового потока. Используется решение для поля скоростей, полученное авторами в опубликованной ранее статье по обтеканию сферы со вдувом, а также метод асимптотических разложений Акривоса и Тейлора. Во втором приближении определены выражения для поля температур и для значений локального и усредненного критериев Нуссельта. Показано, что вдув уменьшает градиент температур или концентраций у поверхности.

В работе [1] изложена постановка задачи по обтеканию и тепломассообмену сферы при наличии поперечного потока вещества через поверхность и получены во втором приближении решения для профиля скоростей и коэффициента сопротивления с использованием метода Пирсона и Праудмена [2].

Вторая половина общей задачи — определение поля температур или концентраций вокруг обтекаемой сферы — сводится к решению следующего уравнения теплового баланса в безразмерном виде:

$$\nabla^2 h = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial h}{\partial \mu}\right] = \frac{P}{2}\left[V_r\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}(1-\mu^2)^{1/2}\frac{\partial h}{\partial \mu}\right] \tag{1}$$

где $h = (T - T_\infty) / (T_a - T_\infty)$ — безразмерная температура (или концентрация), T_a — температура поверхности сферы, T_∞ — температура набегающего потока, V_r, V_θ — соответственно радиальная и тангенциальная составляющие скорости, $\mu \equiv \cos\theta$, $\theta = 0$ — направление набегающего потока, $P = 2aU_\infty / D$, a — радиус сферы, D — коэффициент диффузии.

Целью данной работы является решение уравнения (1) с применением метода Акривоса и Тейлора [3] для случая медленного обтекания сферы с постоянной интенсивностью вдува и одинаковой температурой вдоль поверхности, когда

$$R = \frac{aU_\infty}{\nu} < 1, \quad S = \frac{\nu}{D} \approx 1, \quad k = \frac{R_1}{R} < 1 \tag{2}$$

где $R_1 = aV / \nu$, V — радиальная скорость вдува на поверхности, ν — коэффициент кинематической вязкости.

По методу [3], как и по [2] в гидродинамической задаче, решение уравнения (1) ищется в виде двух различных разложений для одной и той же функции, являющейся однородно справедливой во всей области течения.

Для первого из них, справедливого лишь во внутренней области вблизи сферы, в уравнение (1) необходимо подставить компоненты скорости, которые были получены в [1], для той же внутренней области и равны

$$V_r = \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu + \frac{k}{r^2} + R\left[\frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \frac{3}{16}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2r^3} + \frac{1}{2r^4}\right)(1 - 3\mu^2) - \frac{9k}{16}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\mu\right] + \ldots$$

$$V_\theta = -\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right)(1 - \mu^2)^{1/2} + R\left[-\frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right)(1 - \mu^2)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{3}{4r} + \frac{1}{4r^3} - \frac{1}{2r^4}\right)(1 - \mu^2)^{1/2}\mu + \frac{9k}{32}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\right)(1 - \mu^2)^{1/2}\right] + \ldots$$

Тогда уравнение (1) переходит в следующее: (4)

$$\nabla_r^2 h = \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial h}{\partial r} + \left[\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\left(\varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{8S}\right)\mu + \right.$$

$$+ \frac{3\varepsilon^2}{16S}\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2r^3} + \frac{1}{2r^4}\right)(1 - 3\mu^2) - \tag{5}$$

$$\left. - \frac{9\sigma\varepsilon}{16S}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\mu + \ldots\right]\frac{\partial h}{\partial r} + \left\{\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4r^2} - \frac{1}{4r^4}\right)\left(\varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{8S}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3\varepsilon^2}{8S}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{4r^2} + \frac{1}{4r^4} - \frac{1}{2r^5}\right)\mu - \frac{9\sigma\varepsilon}{32S}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4}\right)\right](1 - \mu^2) + \ldots\right\}\frac{\partial h}{\partial \mu}$$

где $\varepsilon = {}^1/_2\, P$, $\sigma = SR_1$.

Учитывая (2), решение этого уравнения можно представить в виде разложения по малому параметру ε

$$h(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon)\, h_n(r, \mu), \qquad f_0(\varepsilon) = 1 \tag{6}$$

при условии, что $f_{n+1} / f_n \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Соответствующие граничные условия на поверхности сферы имеют вид

$$h_0(1, \mu) = 1, \quad h_n(1, \mu) = 0 \text{ при } n \geqslant 1 \tag{7}$$

Для второго разложения, справедливого только во внешней области, т. е. на большом удалении от сферы, нужно использовать составляющие скорости, полученные в работе [1] для этой же области, которые в обычных координатах r и μ равны

$$V_r = \mu + \frac{3}{2r^2 R} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r^2 R} + \frac{1 + \mu}{r}\right)\exp\left[-{}^1/_2 Rr(1 - \mu)\right]$$

$$V_\theta = \left\{-1 + \frac{3}{4r}\exp\left[-{}^1/_2 Rr(1 - \mu)\right]\right\}(1 - \mu^2)^{1/2} \tag{8}$$

После подстановки (8) и с помощью замены переменных

$$\rho = \varepsilon r, \qquad H = h \tag{9}$$

Уравнение (1) для внешнего разложения в тепловой задаче преобразуется в следующее:

$$\nabla_\rho^2 H = \left\{\mu + \frac{3\varepsilon S}{2\rho^2} - \frac{3\varepsilon}{2}\left(\frac{S}{\rho^2} + \frac{1 + \mu}{\rho}\right)\exp\left[-\frac{\rho}{2S}(1 - \mu)\right] + \ldots\right\}\frac{\partial H}{\partial \rho} +$$

$$+ \left\{\left[\frac{1}{\rho} + \frac{3\varepsilon}{4\rho^2}\exp\left(-\frac{\rho(1 - \mu)}{2S}\right)\right](1 - \mu^2) + \ldots\right\}\frac{\partial H}{\partial \mu} \tag{10}$$

Его решение представляется также в виде разложения

$$H(\rho, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\varepsilon)\, H_n(\rho, \mu) \tag{11}$$

где $F_{n+1} \,/\, F_n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а граничное условие на бесконечности имеет вид

$$H(\infty, \mu) = 0 \tag{12}$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают, как и в гидродинамической задаче, из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область

$$h(r \to \infty, \mu) = H(\rho \to 0, \mu) \tag{13}$$

Построение решения ведется следующим образом. Поскольку во внутреннем разложении (6) $f_0(\varepsilon) = 1$, очевидно, что в уравнении (5) для h_0 останется лишь первый член в правой части

$$\nabla_r^2 h_0 = \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial h_0}{\partial r} \tag{14}$$

Вместе с тем из условия (2) следует, что $\sigma < 1$, а поэтому как главный член h_0, так и последующее приближение для удобства дальнейших построений целесообразно разложить в ряд по малому параметру σ

$$h_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma^m \varphi_{n,m}(r, \mu) \tag{15}$$

Тогда уравнение (14) приобретает вид

$$\nabla_r^2 \varphi_{0,m} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{0,m-1}}{\partial r} \tag{16}$$

с граничными условиями на поверхности

$$\varphi_{00} = 1, \ \varphi_{0,m} = 0 \ \text{ для } \ m \geqslant 1 \tag{17}$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных последовательно для $m = 0, 1, 2, \ldots$ и каждый раз удовлетворяя граничным условиям (17), можно получить следующее общее решение:

$$\begin{aligned}
h_0 = {} & \frac{1}{r} + \sigma\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r^2}\right) + \sigma^2\left(\frac{1}{12r} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{6r^3}\right) + \\
& + \sigma^3\left(\frac{-1}{24r^2} + \frac{1}{12r^3} - \frac{1}{24r^4}\right) + \ldots + \sum_{q=0}^{\infty}\Big\{(B_{00q} + \sigma B_{01q} + \sigma^2 B_{02q} + \ldots) \times \\
& \times \Big[\left(\frac{-1}{r^{q+1}} + r^q\right) + \sigma\left(\frac{1}{2r^{q+2}} - \frac{1}{2} r^{q-1}\right) + \sigma^2\left(\frac{2q+1}{4(2q+3)(2q-1)\,r^{q+1}} - \right. \\
& \left. - \frac{q+2}{4(2q+3)\,r^{q+3}} + \frac{q-1}{4(2q-1)} r^{q-2}\right) + \sigma^3\left(-\frac{2q+1}{8(2q+3)(2q-1)\,r^{q+2}} + \right. \\
& \left. + \frac{q+3}{24(2q+3)\,r^{q+4}} - \frac{q-2}{24(2q-1)} r^{q-3}\right) + \ldots\Big]\Big\} P_q(\mu)
\end{aligned} \tag{18}$$

где $P_q(\mu)$ — сферическая функция Лежандра первого рода.

Это выражение приводится к виду

$$\begin{aligned}
h_0 = {} & \frac{\sigma}{1 - e^{-\sigma}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \sigma^i}{(1+i)!\, r^{i+1}} + \sum_{q=0}^{\infty}\Big\{\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i B_{0iq}\Big[\left(\frac{-1}{r^{q+1}} + r^q\right) + \\
& + \sigma\left(\frac{1}{2r^{q+2}} - \frac{1}{2} r^{q-1}\right) + \sigma^2\left(\frac{2q+1}{4(2q+3)(2q-1)\,r^{q+1}} - \frac{q+2}{4(2q+3)\,r^{q+3}} + \right. \\
& \left. + \frac{q-1}{4(2q-1)} r^{q-2}\right) + \sigma^3\left(-\frac{2q+1}{8(2q+3)(2q-1)\,r^{q+2}} + \right. \\
& \left. + \frac{q+3}{24(2q+3)\,r^{q+4}} - \frac{q-2}{24(2q-1)} r^{q-3}\right) + \ldots\Big]\Big\} P_q(\mu)
\end{aligned} \tag{19}$$

в чем легко убедиться разложением первого члена в ряд Маклорена.

Чтобы найти первое приближение для внешнего разложения, необходимо в (10) оставить только члены с ε в нулевой степени. Общее решение соответствующего уравнения приведено в [3] и равно

$$H_0 = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \exp\left(\tfrac{1}{2}\rho\mu\right) \sum_{k=0}^{\infty} C_k K_{k+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) P_k(\mu) \qquad (20)$$

где

$$K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\rho\right) \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!\, m!\, \rho^m}$$

есть модифицированная функция Бесселя.

Если решение (19) представить в координатах (9) и оставить в нем и в (20) лишь старшие члены соответственно по $r \to \infty$ и по $\rho \to 0$, то условие согласования (13) принимает вид

$$\underset{r\to\infty}{\frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}}\frac{\varepsilon}{\rho} + \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i B_{0iq} \frac{\rho^q P_q(\mu)}{\varepsilon^q}} = \underset{\rho\to 0}{\frac{\pi F_0(\varepsilon)}{\rho}\,[1+\ldots] \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{(2k)!\, P_k(\mu)}{k!\, \rho^k}} \qquad (21)$$

Отсюда непосредственно следует, что равенство возможно только тогда, когда

$$B_{0iq} = 0, \quad C_k = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 1, \quad C_0 = \sigma/\pi(1-e^{-\sigma}), \quad F_0(\varepsilon) = \varepsilon$$

Таким образом, для первого приближения решения во внутренней и внешней областях равны

$$h_0 = \frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \sigma^i}{(1+i)!\, r^{i+1}} = \frac{1-e^{-\sigma/r}}{1-e^{-\sigma}} \qquad (22)$$

$$H_0 = \frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}}\frac{1}{\rho} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\rho(1-\mu)\right], \quad F_0(\varepsilon) = \varepsilon \qquad (23)$$

Нужно отметить, что выражение (22) идентично полученному в [4] и представляет собой точное решение для сферы со вдувом в неподвижной среде. Поэтому оно справедливо при любых интенсивностях вдува, что подтверждено и экспериментальной проверкой его в [5].

Определение второго приближения h_1 производится аналогичным способом. Если предположить, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$, то из уравнений (5), (6) и (15) следует:

$$\nabla_r^2 \varphi_{1,m} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi_{1,m-1}}{\partial r} + \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\mu \frac{\partial \varphi_{0,m}}{\partial r} - \\ - \frac{9}{16S}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\mu \frac{\partial \varphi_{0,m-1}}{\partial r} \qquad (24)$$

поскольку производные по μ от всех $\varphi_{0,m}$ после согласования (21) обращаются в нуль. Используя ранее найденные значения $\varphi_{0,0}$, $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$, можно получить следующее общее решение, удовлетворяющее граничным условиям $\varphi_{1,m}(1, \mu) = 0$

$$h_1 = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3}{8r^2} - \frac{1}{8r^3}\right) + \sigma\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8r} + \frac{63}{80r^2} + \frac{\ln r}{4r^2} - \frac{1}{4r^3} + \frac{7}{80r^4}\right) + \right. \\ \left. + \sigma^2\left(\frac{1}{24} - \frac{5}{16r} + \frac{247}{480r^2} + \frac{\ln r}{8r^2} - \frac{149}{480r^3} - \frac{\ln r}{8r^3} + \frac{1}{10r^4} - \frac{1}{30r^5}\right) + \ldots\right]\mu +$$

$$+\frac{9}{16S}\left[\sigma\left(\frac{-1}{2r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{2\ln r}{3r^2}+\frac{1}{4r^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\sigma^2\left(\frac{-1}{4r}+\frac{7}{40r^2}+\frac{\ln r}{2r^2}+\frac{1}{4r^3}-\frac{\ln r}{3r^3}-\frac{7}{40r^4}\right)+\ldots\right]\mu+$$
$$+\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sigma^i B_{1iq}\left[\left(\frac{-1}{r^{q+1}}+r^q\right)+\sigma\left(\frac{1}{2r^{q+2}}-\frac{1}{2}r^{q-1}\right)+\right.\right. \tag{25}$$
$$\left.\left.+\sigma^2\left(\frac{2q+1}{4(2q+3)(2q-1)r^{q+1}}-\frac{q+2}{4(2q+3)r^{q+3}}+\frac{q-1}{4(2q-1)}r^{q-2}\right)\right]+\ldots\right\}P_q(\mu)$$

Чтобы согласовать это решение по условию (13) с внешним разложением, необходимо в (25) оставить лишь старшие члены по $r\to\infty$ и представить его в координатах (9), а из (23) исключить ранее согласованный самый старший член при $\rho\to 0$. Это дает

$$f_1(\varepsilon)\left(1+\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma^2}{12}+\ldots\right)\frac{\mu}{2}+f_1(\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty}\sigma^i B_{1i0}+ \tag{26}$$
$$r\to\infty$$
$$+f_1(\varepsilon)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sigma^i B_{1iq}\frac{\rho^q P_q(\mu)}{\varepsilon^q}=\frac{\varepsilon\sigma}{1-e^{-\sigma}}\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\rho}{2}(1-\mu)+\ldots\right]$$
$$\rho\to 0$$

Поскольку

$$1+\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma^2}{12}+\ldots=\frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}}$$

из сравнения членов видно, что равенство соблюдается, когда

$$B_{1iq}=0\quad\text{при}\quad q\geqslant 1,\quad \sum_{i=0}^{\infty}\sigma^i B_{1i0}=-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}},\quad f_1(\varepsilon)=\varepsilon$$

т. е. одновременно подтверждается и предположенный ранее вид функции $f_1(\varepsilon)$.

В этом случае член со знаком суммы в (25) превращается в выражение

$$-\frac{\sigma}{1-e^{-\sigma}}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{r}\right)+\sigma\left(\frac{-1}{2r}+\frac{1}{2r^2}\right)+\sigma^2\left(\frac{-1}{12r}+\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{6r^3}\right)+\ldots\right]$$

а многочлен в квадратной скобке в свою очередь может быть представлен как $1-(1-e^{-\sigma/r})/(1-e^{-\sigma})$.

Таким образом, окончательное решение для h во втором приближении, которым ограничиваемся, с точностью до членов порядка ε имеет вид

$$h=h_0+\varepsilon h_1=\frac{1-\exp(-\sigma/r)}{1-\exp(-\sigma)}-\frac{\varepsilon\sigma}{2[1-\exp(-\sigma)]}\left[1-\frac{1-\exp(-\sigma/r)}{1-\exp(-\sigma)}\right]+$$
$$+\varepsilon\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4r}+\frac{3}{8r^2}-\frac{1}{8r^3}\right)+\sigma\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{8r}+\frac{63}{80r^2}+\frac{\ln r}{4r^3}-\frac{1}{4r^3}+\frac{7}{80r^4}\right)+\right.$$
$$+\sigma^2\left(\frac{1}{24}-\frac{5}{16r}+\frac{247}{480r^2}+\frac{\ln r}{8r^2}-\frac{149}{480r^3}-\frac{\ln r}{8r^3}+\frac{1}{10r^4}-\frac{1}{30r^5}\right)+\ldots$$
$$+\frac{9\sigma}{16S}\left(\frac{-1}{2r}+\frac{1}{4r^2}+\frac{2\ln r}{3r^2}+\frac{1}{4r^3}\right)+$$
$$\left.+\frac{9\sigma^2}{16S}\left(\frac{-1}{4r}+\frac{7}{40r^2}+\frac{\ln r}{2r^2}+\frac{1}{4r^3}-\frac{\ln r}{3r^3}-\frac{7}{40r^4}\right)+\ldots\right]\mu \tag{27}$$

Если в данном случае под локальным и усредненным критериями Нуссельта понимать их обычное определение

$$\mathrm{Nu}^* = -2\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=1}, \qquad \mathrm{Nu} = -\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=1} d\mu$$

то их значения, выраженные через более привычное обозначение $R_1^* = 2R_1$, соответственно равны

$$\mathrm{Nu}^* = \frac{SR_1^*}{\exp(^1/_2 SR_1^*) - 1} + \frac{P(SR_1^*)^2 \exp(-^1/_2 SR_1^*)}{8[1 - \exp(-^1/_2 SR_1^*)]^2} +$$
$$+ \frac{3P}{8}\left[-1 + \frac{SR_1^*}{15} + \frac{(SR_1^*)^2}{80} + \frac{R_1^*}{16} - \frac{S(R_1^*)^2}{160}\right]\mu + \dots \tag{28}$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{SR_1^*}{\exp(^1/_2 SR_1^*) - 1} + \frac{P(SR_1^*)^2 \exp(-^1/_2 SR_1^*)}{8[1 - \exp(-^1/_2 SR_1^*)]^2} + \dots \tag{29}$$

Последнее выражение, учитывая (2), можно представить в виде ряда

$$\mathrm{Nu} = 2 - \frac{SR_1^*}{2} + \frac{(SR_1^*)^2}{24} + \dots + \frac{P}{2} - \frac{5P(SR_1^*)^2}{288} + \dots \tag{30}$$

Получение дальнейших приближений становится громоздким и при малых P и $^1/_2 SR_1^*$ вряд ли существенно уточнит результат.

Из сравнения (30) с выражением, полученным в [4], видно, что основные члены остаются одинаковыми, но второстепенные в более строгом решении (30) несколько изменяются.

Анализ показывает, что вдув уменьшает градиент температур или концентраций у поверхности и сглаживает неравномерность коэффициентов переноса в лобовой и кормовой областях сферы.

Строго говоря, выведенные формулы справедливы при условиях (2). Однако при $P = 0$ выражение (22), как говорилось, верно для любой интенсивности вдува.

В заключение следует напомнить, что действительный поток энтальпии внутрь материала самой сферы при наличии вдува должен определяться по формуле

$$q_s = \frac{\mathrm{Nu}\,\lambda_0}{2a}(T_\infty - T_a) - \rho c_p V T_a \tag{31}$$

где Nu вычисляется по (29), λ_0 — коэффициент теплопроводности газа, ρc_p — массовая теплоемкость вдуваемого вещества. Последний член учитывает потерю тепловой энтальпии с выходящим из сферы веществом, которая в случае нагрева сферы уменьшает q_s еще больше, а при ее охлаждении увеличивает абсолютное значение потока тепловой энтальпии.

Поступила 7 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкатов М. В., Шабанов С. И. Обтекание сферы с поперечным потоком вещества при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1972, № 3.
2. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 3, pp. 237—262.
3. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in Stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4.
4. Петин Ю. М. Теплообмен сферической частицы, имеющей поперечный поток с поверхности. Сб. «Горение твердого топлива», т. 1, Новосибирск, «Наука», 1969.
5. Петин Ю. М., Шабанов С. И., Маланов М. Д. Влияние поперечного потока вещества на тепло-массообмен обтекаемых сферических частиц. Сб. «Горение твердого топлива», т. 2, Новосибирск, «Наука», 1969.