УДК 532.54

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ В ЕСТЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

С. В. Головин, Л. Толедо Сэсма

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: golovin@hydro.nsc.ru, ltoledo@fisica.ugto.mx

Рассматриваются уравнения идеальной магнитной гидродинамики, описывающие стационарные течения невязкой идеально электропроводной жидкости. Описаны классы точных решений этих уравнений. С использованием естественной криволинейной системы координат, в которой линии тока и магнитные силовые линии являются координатными кривыми, уравнения модели частично интегрируются и приводятся к форме, более удобной для описания магнитных линий и линий тока частиц. Поскольку введенная система координат связана с исходной нелокальным преобразованием, допускаемая системой группа может измениться. Для системы в естественных координатах вычислена бесконечномерная (содержащая три произвольные функции времени) группа симметрий. Для этой группы построена оптимальная система подгрупп размерностей 1 и 2. Для одной из подгрупп оптимальной системы найдено инвариантное точное решение, описывающее течение электропроводной жидкости типа вихреисточника с закручивающимися магнитными линиями и линиями тока.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, криволинейная система координат, оптимальная система подалгебр, точное решение, вихреисточник.

DOI: 10.15372/PMTF20190205

Введение. Модель идеальной магнитной гидродинамики (МГД) описывает макроскопические движения идеально проводящей жидкости под действием внутреннего давления, инерционных сил и силы Лоренца. Помимо уравнений, описывающих силовые взаимодействия, модель содержит уравнение индукции, которое в предположении нулевого электрического сопротивления сводится к условию вмороженности магнитных силовых линий в течение сплошной среды. Баланс этих основных взаимодействий в предположении малости диссипативных процессов является ключевым в некоторых задачах астрофизики и магнитного удержания плазмы. Система уравнений идеальной МГД является нелинейной, а интересующие исследователей физические процессы — существенно трехмерными. Хорошо исследованные в настоящее время одномерные линейные или несопряженные постановки задач МГД не всегда удовлетворяют предъявляемым физическим требованиям. В то же время численный анализ таких задач затруднен вследствие существенной многомерности исследуемых процессов, наличия разнообразных слабых и сильных разрывов. Поэтому актуальными являются аналитические исследования, позволяющие найти точные решения уравнений идеальной МГД.

© Головин С. В., Толедо Сэсма Л., 2019

Многие из известных в настоящее время точных решений уравнений МГД относятся либо к случаю чистой газовой динамики (нулевое магнитное поле: $\boldsymbol{B}=0$), либо к случаю статического равновесного состояния (нулевая скорость: $\boldsymbol{u}=0$), либо к промежуточному случаю коллинеарных полей скорости и напряженности магнитного поля ($\boldsymbol{u}=\lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}$). Последний случай в результате замены переменных сводится к первым двум случаям [1]. Известно лишь небольшое количество примеров решений, в которых скорость и магнитное поле неколлинеарны.

В настоящей работе рассматриваются уравнения стационарной идеальной МГД для случая неколлинеарных полей $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{B}$. Используется введенная в работе [2] естественная криволинейная система координат, координатные линии которой являются линиями тока и магнитными силовыми линиями. Эта система координат является частным случаем системы лагранжевых координат [3], произвол в выборе которой использован для параметризации магнитных силовых линий. Преимуществом введенной системы координат является возможность естественного описания максвелловских поверхностей, образованных линиями тока и магнитными силовыми линиями. Различные классы точных решений, полученные с использованием данной системы координат и описывающие завихренные течения идеальной электропроводной жидкости, построены в работах [4–6].

Известно, что система уравнений идеальной МГД имеет 10-параметрическую группу непрерывных симметрий [7, 8]. Эта группа является расширением группы Галилея, состоящей из переносов по временной и пространственным переменным, вращений, галилеевых переносов и растяжений [9–11]. В случае перехода к лагранжевым координатам эта группа расширяется до бесконечномерной за счет так называемых нормировочных симметрий, выражающих произвол в выборе лагранжевых координат. Обзор работ, посвященных интерпретации и применению нормировочных симметрий с точки зрения вариационных принципов и законов сохранения, приведен в монографии [12].

В используемых в данной работе естественных координатах произвол в выборе лагранжевых координат частично устраняется, вследствие чего бесконечномерная часть группы сужается до трех преобразований, содержащих произвольные функции одной координаты. Целью работы является исследование структуры подгрупп, допускаемой системой уравнений бесконечномерной группы, а также построение точных решений уравнений МГД. Отметим, что точные решения, описывающие существенно трехмерные завихренные течения вязкой электропроводящей жидкости с конечной проводимостью, построены в работах [13, 14].

1. Предварительные сведения. В безразмерных переменных уравнения идеальной магнитной гидродинамики [15], описывающие стационарные течения невязкой идеально электропроводной жидкости с вмороженным магнитным полем, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B}+\nabla p=0,\qquad \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})=0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости; $\boldsymbol{B}$ — вектор магнитной индукции; p — давление; ρ — плотность. Будем считать, что плотность не меняется вдоль линий тока жидкости: $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho=0$. Это предположение является естественным обобщением несжимаемых течений. Введем следующие искомые функции:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\sqrt{\rho(\boldsymbol{x})}\,,\qquad P=p+\boldsymbol{B}^2/2$$

(P — полное давление). С использованием этих функций запишем систему уравнений (1) в эквивалентном виде

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}+\nabla P=0,\qquad (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Уравнение для плотности ρ отщепляется от системы (2) и может решаться отдельно. Уравнения (2) задают совместную переопределенную систему восьми уравнений для семи искомых функций.

2. Запись уравнений в криволинейных координатах. Введем следующие векторные поля, известные под названием переменных Эльзассера [16]:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{B},$$

или

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})/2, \qquad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2.$$

Из уравнений (2) получаем

$$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \nabla P = 0; \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}; \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{b} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) эквивалентно равенству нулю коммутатора векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = 0. \tag{6}$$

В предположении линейной независимости этих векторных полей условие коммутирования (6) означает, что они могут быть выбраны в качестве базисных [17] для некоторой криволинейной системы координат. Такая система координат (k^1, k^2, k^3) введена в работе [2] (координатные линии k^1 и k^2 являются интегральными кривыми векторных полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно) и в пространстве $\mathbb{R}^3$ задается взаимно однозначным отображением

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \qquad \det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{k}}\Big) \ne 0, \tag{7}$$

при этом

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial k^1}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial k^2}. \tag{8}$$

Данное представление возможно, поскольку уравнения (8) для зависимости $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$ являются совместными в силу условий коммутирования (6).

Система уравнений (3)–(5) в криволинейных координатах (7) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial k^1} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial k^1\, \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^1} = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial k^2} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial k^1\, \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^2} = 0,\\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial k^3} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial k^1\, \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^3} = 0, \qquad \det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{k}}\Big) = 1.\end{gathered} \tag{9}$$

Ниже для системы (9) вычислена группа преобразований симметрии, построена оптимальная система подгрупп малых размерностей и найдено точное решение.

3. Группа симметрий уравнений. Применение стандартного алгоритма вычисления группы симметрий [7] приводит к следующему результату.

Теорема. *Система уравнений* (9) *допускает бесконечномерную алгебру Ли* $L = L_9 \dot{\oplus} L_\infty$*, порождаемую операторами*

$$X_1 = \partial_{x^1}, \qquad X_2 = \partial_{x^2}, \qquad X_3 = \partial_{x^3},$$

$$X_4 = x^3\, \partial_{x^2} - x^2\, \partial_{x^3}, \qquad X_5 = x^1\, \partial_{x^3} - x^3\, \partial_{x^1}, \qquad X_6 = x^2\, \partial_{x^1} - x^1\, \partial_{x^2},$$

$$X_7 = \partial_{k^3}, \qquad X_8 = \partial_p, \qquad X_9 = 3k^3\,\partial_{k^3} + x^1\,\partial_{x^1} + x^2\,\partial_{x^2} + x^3\,\partial_{x^3} + 2p\,\partial_p,$$

$$\langle\varphi\rangle_1 = X_{10} = \varphi(k^3)(k^1\,\partial_{k^1} - k^2\,\partial_{k^2}), \quad \langle\psi\rangle_2 = X_{11} = \psi(k^3)\,\partial_{k^1}, \quad \langle\varkappa\rangle_3 = X_{12} = \varkappa(k^3)\,\partial_{k^2},$$

где $\varphi(k^3)$, $\psi(k^3)$, $\varkappa(k^3)$ *— произвольные гладкие функции; знак* "$\dot{\oplus}$" *обозначает полупрямую сумму алгебр Ли.*

Теорема доказывается путем прямого вычисления группы, в данной работе ее доказательство не приводится.

Задаваемые инфинитезимальными операторами $L_9 = \{X_1, \ldots, X_9\}$ преобразования соответствуют группе движений трехмерного пространства $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$, расширенной переносами по k^3 и p и растяжением. Эта группа "наследуется" из группы, допускаемой исходной системой уравнений (2). Новым по отношению к исходной системе МГД является преобразование, порождаемое операторами бесконечномерной подалгебры $L_\infty = \{X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$. Оператор X_{10} задает преобразование

$$\tilde{k}^1 = \varphi(k^3)k^1, \qquad \tilde{k}^2 = k^2/\varphi(k^3), \qquad \tilde{k}^3 = k^3,$$

являющееся растяжением для параметров k^1 и k^2 с произвольным коэффициентом φ, зависящим от k^3. Кроме того, система уравнений (9) инвариантна относительно преобразований

$$\tilde{k}^1 = k^1 + \psi(k^3), \qquad \tilde{k}^2 = k^2 + \chi(k^3),$$

порождаемых операторами X_{11}, X_{12} с произвольными функциями ψ и χ.

4. Оптимальная система подалгебр ΘL. Классификация подалгебр допускаемой алгебры Ли относительно группы внутренних автоморфизмов позволяет выделить неэквивалентные относительно действия группы симметрий классы инвариантно-групповых решений исходной системы уравнений. Полный набор неэквивалентных относительно действия группы внутренних автоморфизмов подалгебр алгебры Ли L называется оптимальной системой подалгебр и обозначается ΘL [18].

Алгоритмы нахождения оптимальных систем подалгебр для конечномерных алгебр Ли в настоящее время достаточно хорошо известны [18]. В настоящей работе ограничимся построением только оптимальной системы подалгебр $\Theta_2 L$ размерности не выше двух. Только такие подалгебры дают нетривиальные инвариантные решения системы (9). Построение частично инвариантных и дифференциально-инвариантных решений, которые порождаются подалгебрами более высоких размерностей, затруднено вследствие сильной нелинейности системы (9) и в данной работе не проводится.

4.1. *Внутренние автоморфизмы.* Коммутаторы базисных операторов алгебры Ли L приведены в табл. 1. Представим произвольный оператор алгебры L в виде

$$X = x^1 X_1 + \ldots + x^9 X_9 + \langle\varphi\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2 + \langle\varkappa\rangle_3$$

с координатами разложения по базису x^i и некоторыми фиксированными функциями φ, ψ, $\varkappa$. Группа внутренних автоморфизмов $\operatorname{Aut} L$ состоит из базисных автоморфизмов $A_i(t_i)$, порождаемых базисными операторами X_i. Действие этой группы на координаты оператора описывается следующим образом. Введем обозначения

$$\boldsymbol{p} = (x^1, x^2, x^3), \quad \boldsymbol{q} = (x^4, x^5, x^6), \quad \boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3), \quad \boldsymbol{s} = (t_4, t_5, t_6)$$

для координат базисного оператора x^i и параметров автоморфизмов t_i, $i = 1, \ldots, 6$. Действие группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} L_9$, порождаемых конечномерной частью алгебры L_9, представлено в табл. 2 (знак "$\times$" обозначает векторное произведение; $S(\boldsymbol{s})$ — ортогональная матрица, определяемая групповыми параметрами $\boldsymbol{s}$).

Таблица 1

Коммутаторы алгебры Ли L

0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	$\langle\varphi_2\rangle_1$	$\langle\psi_2\rangle_2$	$\langle\varkappa_2\rangle_3$
X_1	0	0	0	0	X_3	$-X_2$	0	0	X_1	0	0	0
X_2	0	0	0	$-X_3$	0	X_1	0	0	X_2	0	0	0
X_3	0	0	0	X_2	$-X_1$	0	0	0	X_3	0	0	0
X_4	0	X_3	$-X_2$	0	X_6	$-X_5$	0	0	0	0	0	0
X_5	$-X_3$	0	X_1	$-X_6$	0	X_4	0	0	0	0	0	0
X_6	X_2	$-X_1$	0	X_5	$-X_4$	0	0	0	0	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	0	0	0	$3X_7$	$\langle\dot\varphi_2\rangle_1$	$\langle\dot\psi_2\rangle_2$	$\langle\dot\varkappa_2\rangle_3$
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0	$2X_8$	0	0	0
X_9	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	$-3X_7$	$-2X_8$	0	$3\langle k^3\dot\varphi_2\rangle_1$	$\langle 3k^3\dot\psi_2\rangle_2$	$\langle 3k^3\dot\varkappa_2\rangle_3$
$\langle\varphi_1\rangle_1$	0	0	0	0	0	0	$-\langle\dot\varphi_1\rangle_1$	0	$-3\langle k^3\dot\varphi_1\rangle_1$	0	$-\langle\varphi_1\psi_2\rangle_2$	$\langle\varphi_1\varkappa_2\rangle_3$
$\langle\psi_1\rangle_1$	0	0	0	0	0	0	$-\langle\dot\psi_1\rangle_2$	0	$-3\langle k^3\dot\psi_2\rangle_2$	$\langle\varphi_2\psi_1\rangle_2$	0	0
$\langle\varkappa_1\rangle_1$	0	0	0	0	0	0	$-\langle\dot\varkappa_1\rangle_3$	0	$-3\langle k^3\dot\varkappa_1\rangle_3$	$-\langle\varphi_2\varkappa_1\rangle_3$	0	0

Таблица 2

Действие группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} L_9$ на базис подалгебры

Aut	$\bar{\boldsymbol p}$	$\bar{\boldsymbol q}$	$\bar x^7$	$\bar x^8$	$\bar\varphi$	$\bar\psi$	$\bar\varkappa$
$A_1A_2A_3$	$\boldsymbol p + \boldsymbol t\times\boldsymbol q + \boldsymbol t x^9$	$\boldsymbol q$	x^7	x^8	φ	ψ	$\varkappa$
$A_4A_5A_6$	$S(\boldsymbol s)\,\boldsymbol p$	$S(\boldsymbol s)\,\boldsymbol q$	x^7	x^8	φ	ψ	$\varkappa$
A_7	$\boldsymbol p$	$\boldsymbol q$	$x^7+3t_7x^9$	x^8	$\varphi(k^3+t_7)$	$\psi(k^3+t_7)$	$\varkappa(k^3+t_7)$
A_8	$\boldsymbol p$	$\boldsymbol q$	x^7	$x^8+t_8x^9$	φ	ψ	$\varkappa$
A_9	$t_9^{-1}\boldsymbol p$	$\boldsymbol q$	$t_9^{-3}x^7$	$t_9^{-2}x^8$	$\varphi(t_9^3k^3)$	$\psi(t_9^3k^3)$	$\varkappa(t_9^3k^3)$

Бесконечномерная часть $\operatorname{Aut} L$ порождается автоморфизмами $\operatorname{Aut} L_\infty$, действующими только на координаты подалгебры L_∞. Нетривиальное действие этих автоморфизмов задается формулами

$$A_{10}(\sigma): \qquad \bar\varphi = \varphi(k^3) - (x^7 + 3x^9k^3)\dot\sigma(k^3), \quad \bar\psi = \psi(k^3)\,\mathrm{e}^{-\sigma(k^3)}, \quad \bar\varkappa = \varkappa(k^3)\,\mathrm{e}^{\sigma(k^3)},$$

$$A_{11}(\tau): \qquad \bar\psi = \psi(k^3) + \tau(k^3)\varphi(k^3) - (x^7 + 3x^9k^3)\dot\tau(k^3),$$

$$A_{12}(\delta): \qquad \bar\varkappa = \varkappa(k^3) + \delta(k^3)\varphi(k^3) - (x^7 + 3x^9k^3)\dot\delta(k^3),$$

где $\sigma(k^3)$, $\tau(k^3)$, $\delta(k^3)$ — произвольные функции.

4.2. *Оптимальная система подалгебр для конечномерной части.* Для построения оптимальной системы подалгебр ΘL алгебры Ли L применим двухшаговый алгоритм, предложенный Л. В. Овсянниковым [18]. Основным является разложение $L = L_9 \dot\oplus L_\infty$ в полупрямую сумму идеала L_∞ и подалгебры L_9. В свою очередь, композиционный ряд идеалов подалгебры L_9 имеет вид

$$\{0\} \subset \{X_1, X_2, X_3\} \subset \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\} \subset$$
$$\subset \{X_1, X_2, \dots, X_7\} \subset \{X_1, X_2, \dots, X_8\} \subset L_9.$$

Для каждого включения композиционного ряда возможно разложение L_9 в полупрямую сумму идеала и подалгебры. Для построения оптимальной системы подалгебр ΘL проведем классификацию подалгебр конечномерной части $L_9 \subset L$.

Представим алгебру Ли L_9 в виде полупрямой суммы идеала и подалгебры: $L_9 = Q\dot{\oplus}P$. Выберем в этом разложении идеал $Q = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ и подалгебру $P = \{X_7, X_8, X_9\}$. В свою очередь, для идеала Q применим разложение $Q = J\dot{\oplus}N$, где $J = \{X_1, X_2, X_3\}$ — идеал; $N = \{X_4, X_5, X_6\}$ — подалгебра. Будем поочередно применять двухшаговый алгоритм для каждого из этих разложений.

На первом шаге алгоритма строится оптимальная система подалгебр ΘJ подалгебры J. Представителем размерности 3 является сама подалгебра $J = J_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$. В силу абелевости J внутренние автоморфизмы алгебры J действуют тривиально, поэтому оптимальная система ΘJ также состоит из трех двумерных представителей: $J_2 = \{\alpha X_1 + X_2, \beta X_1 + X_3\}$, $J_3 = \{X_1, \alpha X_2 + X_3\}$, $J_4 = \{X_1, X_2\}$, одного одномерного $J_5 = \{\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3\}$ с $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 1$ и нулевой подалгебры $J_6 = \{0\}$.

Построим оптимальную систему подалгебр ΘN. Представителем размерности 3 является сама рассматриваемая подалгебра Ли $N_1 = \{X_4, X_5, X_6\}$. Двумерных подалгебр алгебра N не содержит. В качестве единственной одномерной подалгебры может быть выбрана подалгебра $\{X_4\}$.

Таким образом, оптимальная система подалгебр ΘN содержит следующие представители:

$$N_1 = \{X_4, X_5, X_6\}, \qquad N_2 = \{X_4\}, \qquad N_3 = \{0\}.$$

На следующем шаге строятся оптимальные системы $Q = J\dot{\oplus}N$. Для рассматриваемой задачи ограничимся вычислением представителей размерности не более двух.

Общая матрица подалгебры $Q_{ij} \subset Q$ представляется в виде

$$Q_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} * & N_j \\ \hline J_i & 0 \end{array}\right). \tag{10}$$

Здесь блокам J_i и N_j соответствуют какие-либо из подалгебр построенных выше оптимальных систем, блоку “$*$” — произвольная матрица размерности $\dim N_j \times \dim J_i$. Поскольку внутренние автоморфизмы, порождаемые операторами идеала J, действуют тривиально на столбцы матрицы, соответствующие координатам подалгебры N, столбцы матрицы Q_{ij} справа от вертикальной линии не подлежат изменению. В то же время столбцы слева от вертикальной линии можно дополнительно упрощать за счет преобразований базиса (действующих по строкам матрицы) и внутренних автоморфизмов алгебры Q, принадлежащих стабилизатору подалгебры N_j (действующих по столбцам).

Поскольку в данной работе исследуются подалгебры размерности не более двух, возможные сочетания элементов J_i и N_j ограничены суммарной размерностью этих элементов. Двумерных подалгебр алгебра N не имеет. Одномерная подалгебра N_2 сочетается с блоками J_5 и J_6. Наконец, нуль-мерная подалгебра N_3 сопрягается с вариантами J_2–J_5 блока J_i. При этом блоки J_i могут быть дополнительно упрощены за счет автоморфизмов, порождаемых операторами из N, т. е. вращениями.

После рассмотрения всех возможных вариантов и упрощения блоков J_i и “$*$” за счет преобразований базиса и внутренних автоморфизмов получаем оптимальную систему подалгебр размерности 1 и 2 для алгебры Q:

$$\{X_1, X_4\}, \quad \{X_1, X_2\}, \quad \{X_1\}, \quad \{\alpha X_1 + X_4\}.$$

Далее надстроим оптимальную систему $\Theta_2 Q$ до оптимальной системы $\Theta_2 K$, где $K = \{X_1, \ldots, X_8\}$. Отметим, что K представляется в виде прямой суммы идеала Q и центра $\{X_7, X_8\}$: $K = Q \oplus \{X_7, X_8\}$. Это означает, что автоморфизмы, порождаемые каждым из двух слагаемых, действуют тривиально на другое слагаемое. Следовательно, в блочном представлении матрицы координат подалгебры, аналогичном (10), неопределенным

Таблица 3

Оптимальная система подалгебр размерности не выше двух $\Theta_2 L_9$ для алгебры L_9

dim	Базис	dim	Базис
2	$\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8, X_4+\gamma X_7+\delta X_8\}$	2	$\{X_7, X_8\}$, $\{X_1, \alpha X_4+X_9\}$
	$\alpha^2+\gamma^2+\lvert\beta\rvert^3+\lvert\delta\rvert^3=1$		$\{X_4, X_9\}$, $\{X_7, \alpha X_4+X_9\}$
	$\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8, X_2+\gamma X_7+\delta X_8\}$		$\{X_8, \alpha X_4+X_9\}$
	$\alpha^2+\gamma^2+\lvert\beta\rvert^3+\lvert\delta\rvert^3=1$		
	$\{\alpha X_1+X_4+\beta X_7, \gamma X_7+X_8\}$	1	$\{\alpha X_1+X_4+\beta X_7+\gamma X_8\}$
	$\lvert\alpha\rvert^3+\lvert\beta\rvert+\lvert\gamma\rvert=1$		$\alpha^6+\lvert\beta\rvert^3+\gamma^2=1$
	$\{\alpha X_1+X_4+\beta X_8, X_7\}$		$\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8\}$
	$\alpha^2+\lvert\beta\rvert=1$		$\alpha^2+\lvert\beta\rvert^3=1$
	$\{X_1+\alpha X_7, \beta X_7+X_8\}$		$\{X_4\}$
	$\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert=1$		$\{X_1\}$
	$\{X_1+\alpha X_8, X_7\}$		$\{X_7+X_8\}$
	$\{X_1, X_4\}$, $\{X_1, X_2\}$		$\{X_7\}$
	$\{X_4, X_7\}$, $\{X_4, X_8\}$		$\{X_8\}$
	$\{X_1, X_8\}$, $\{X_1, X_7\}$		$\{\alpha X_4+X_9\}$

остается только блок “$*$”, в то время как остальные блоки выбираются из оптимальных систем соответствующих подалгебр. Помещая в правый верхний блок матрицы координат одну из подалгебр $\Theta_2 Q$ и проверяя условия подалгебры, обнаружим, что они будут выполнены при произвольных координатах x^7 и x^8 в подматрице “$*$” для всех подалгебр. Таким образом, в оптимальную систему $\Theta_2 K$ войдут следующие подалгебры:

$$\begin{gathered}\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8,\ X_4+\gamma X_7+\delta X_8\}, \quad \{X_1+\alpha X_7+\beta X_8,\ X_2+\gamma X_7+\delta X_8\},\\ \{\alpha X_1+X_4+\beta X_7,\ \gamma X_7+X_8\}, \quad \{X_1+\alpha X_7,\ \beta X_7+X_8\}, \quad \{X_1+\alpha X_8, X_7\},\\ \{X_7,\ X_8\}, \quad \{\alpha X_1+X_4+\beta X_8,\ X_7\}, \quad \{X_1+\alpha X_7+\beta X_8\},\\ \{\alpha X_1+X_4+\beta X_7+\gamma X_8\}, \quad \{\alpha X_7+\beta X_8;\ |\alpha|+|\beta|=1\}.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь α, β, γ, δ — произвольные параметры, при каждом выборе которых получаются неэквивалентные подалгебры.

Наконец, расширим полученную оптимальную систему до полной оптимальной системы подалгебр размерности не выше двух для конечномерной алгебры Ли L_9. Для этого используем разложение $L_9 = K\dot{\oplus}\{X_9\}$ в полупрямую сумму идеала K и одномерной подалгебры $\{X_9\}$.

Автоморфизм A_9 также позволяет действовать растяжением на координаты x^i, $i = 1,\dots,8$, что дает возможность выбрать определенным образом произвольные параметры в подалгебрах (11). Расширение одномерных подалгебр (11) одномерным оператором, содержащим ненулевую координату при X_9, проверка условий подалгебры и использование внутренних автоморфизмов приводят к следующим четырем подалгебрам:

$$\{X_1,\ \alpha X_4+X_9\}, \quad \{X_4,\ \alpha X_1+X_9\}, \quad \{X_7,\ \alpha X_4+X_9\}, \quad \{X_8,\ \alpha X_4+X_9\}. \tag{12}$$

Специализация свободных параметров в (11) с помощью автоморфизма A_9 вместе с подалгебрами (12) дает оптимальную систему одномерных и двумерных подалгебр $\Theta_2 L_9$, приведенную в табл. 3.

4.3. *Подалгебры размерности 1.* Рассматриваемая алгебра L имеет следующую структуру: $L = L_9\dot{\oplus}L_\infty$. Здесь бесконечномерная часть L_∞ является идеалом в L, а L_9 — подалгеброй. Оптимальная система одномерных и двумерных подалгебр для L_9 представлена в табл. 3. Одномерные подалгебры полной алгебры L получаются дополнением одномерных и нуль-мерной подалгебр.

Разобьем одномерные подалгебры в табл. 3 на содержащие операторы X_7 и X_9 и не содержащие их.

Дополнение одномерной подалгебры, не содержащей операторы X_7 и X_9, происходит следующим образом. Обозначим базисный оператор такой подалгебры через H. Расширение подалгебры $\{H\}$ за счет идеала L_∞ имеет вид

$$\{H + \langle\varphi\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2 + \langle\varkappa\rangle_3\}.$$

Предположим, что $\varphi \neq 0$. Автоморфизмами $A_{11}(\tau)$ и $A_{12}(\delta)$ при $\tau = -\psi/\varphi$ и $\delta = -\varkappa/\varphi$ можно обратить в нуль функции ψ и $\varkappa$. Таким образом, получаем набор одномерных подалгебр $\{H + \langle\varphi\rangle_1\}$.

Заметим, что в силу автоморфизмов A_7 и A_9 функции $\varphi(k^3)$, отличающиеся друг от друга сдвигом или растяжением аргумента k^3, являются эквивалентными. Здесь и далее будем считать, что входящие в базис подалгебр произвольные функции определены с точностью до эквивалентности, задаваемой сдвигом и растяжением аргумента k^3.

Пусть $\varphi = 0$. Базис такой подалгебры может быть упрощен только в результате действия автоморфизма A_{10}, с помощью которого одну из ненулевых функций ψ или $\varkappa$ можно сделать равной единице. Представителем оптимальной системы является

$$\{H + \langle\psi\rangle_2 + \langle\varkappa\rangle_3\}, \qquad (|\psi| - 1)(|\varkappa| - 1) = 0.$$

Рассмотрим одномерные подалгебры, содержащие в базисе оператор X_7. Обозначим базис такой подалгебры через $X_7 + H$. Тогда ее расширение имеет вид

$$\{X_7 + H + \langle\varphi\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2 + \langle\varkappa\rangle_3\}.$$

Применение автоморфизма $A_{10}(\sigma)$ с функцией $\sigma(k^3)$, удовлетворяющей уравнению $\varphi - \dot\sigma = 0$, позволяет обратить в нуль функцию φ. При этом изменятся функции ψ и $\varkappa$ (далее они обозначаются теми же буквами). Применение автоморфизмов $A_{11}(\tau)$ и $A_{12}(\delta)$ с функциями $\tau(k^3)$ и $\delta(k^3)$, удовлетворяющими уравнениям $\psi = \dot\tau$ и $\varkappa = \dot\tau$, позволяет обратить в нуль функции ψ и $\varkappa$. В этом случае расширение одномерной подалгебры тривиально.

Наконец, рассмотрим одномерные подалгебры, содержащие в базисе оператор X_9. Обозначим их базис через $\{X_9 + H\}$, где H — некоторый оператор. В результате дополнения идеалом L_∞ получаем

$$\{X_9 + H + \langle\varphi\rangle_1 + \langle\psi\rangle_2 + \langle\varkappa\rangle_3\}.$$

Применение автоморфизма $A_{10}(\sigma)$ с функцией $\sigma(k^3)$, удовлетворяющей уравнению $\varphi = 3k^3\dot\sigma$, позволяет обратить в нуль функцию φ. Далее, применяя автоморфизмы $A_{11}(\tau)$ и $A_{12}(\delta)$ с подходящими функциями $\tau(k^3)$ и $\delta(k^3)$, можно обратить в нуль функции ψ и $\varkappa$. Функции τ и δ находятся из уравнений $\psi = 3k^3\dot\tau$ и $\varkappa = 3k^3\dot\tau$. Таким образом, и в этом случае расширение на L_∞ тривиально.

4.4. *Подалгебры размерности 2.* Двумерные подалгебры алгебры L получаются либо дополнением базисных операторов двумерных подалгебр из $\Theta_2 L_9$, либо расширением одномерных и нуль-мерной подалгебр. Рассмотрим каждый из этих случаев.

4.5. *Дополнение двумерных подалгебр.* Ниже проводятся дополнения двумерных подалгебр.

Подалгебры, не содержащие X_7 и X_9. Запишем двумерную подалгебру в общем виде

$$\{H_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\},$$

где $\{H_1, H_2\}$ — одна из двумерных подалгебр, представленных в табл. 3. Здесь и далее операторы H_1 и H_2 не содержат операторов X_7 и X_9. Заметим, что в этом случае операторы H_1 и H_2 всегда коммутируют: $[H_1, H_2] = 0$.

Проверим выполнение условия подалгебры

$$[H_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3, H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] =$$
$$= -\langle\varphi_1\psi_2\rangle_2 + \langle\varphi_1\varkappa_2\rangle_3 + \langle\varphi_2\psi_1\rangle_2 - \langle\varphi_2\varkappa_1\rangle_3 = \langle\varphi_2\psi_1 - \varphi_1\psi_2\rangle_2 + \langle\varphi_1\varkappa_2 - \varphi_2\varkappa_1\rangle_3.$$

Полученный оператор должен линейно выражаться через базисные операторы подалгебры. Это возможно только в случае выполнения условий подалгебры

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = 0, \qquad \varphi_2\varkappa_1 - \varphi_1\varkappa_2 = 0.$$

Предположим, что $\varphi_1\varphi_2 \neq 0$. Из последних соотношений получаем $\psi_i = f(k^3)\varphi_i$ и $\varkappa_i = g(k^3)\varphi_i$, $i = 1, 2$, где f, g — некоторые функции. Последовательное применение автоморфизмов $A_{11}(-f)$ и $A_{12}(-g)$ позволяет обратить в нуль функции ψ и $\varkappa$.

В случае если одна из функций φ_1 или φ_2 равна нулю, а другая отлична от нуля, в силу условий подалгебры обращаются в нуль функции ψ_i и $\varkappa_i$ с номером i, соответствующим нулевой функции φ_i, в то время как функции ψ_j и $\varkappa_j$ с $j \neq i$ обращаются в нуль действием автоморфизмов A_{11} и A_{12}. Оптимальная система подалгебр пополняется следующим представителем:

$$\{H_1 + \langle\varphi_1\rangle_1, H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1\}.$$

В случае если $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, условия подалгебры выполнены, а автоморфизмы A_{11} и A_{12} действуют тривиально. В то же время автоморфизм A_{10} позволяет умножать функции ψ_i на произвольную функцию и одновременно делить $\varkappa_i$ на тот же множитель. Таким образом, оптимальная система подалгебр пополняется следующим представителем:

$$\{H_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3, H_2 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\} \qquad (|\psi_1| + |\psi_2| - 1)(|\varkappa_1| + |\varkappa_2| - 1) = 0.$$

Подалгебры, содержащие X_7. Базис подалгебры имеет следующий вид:

$$\{X_7 + H_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \alpha X_7 + H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\}.$$

Здесь константа α может быть равна нулю, в случае если только один из базисных операторов содержит X_7.

Применение автоморфизмов $A_{10}(\sigma)$, $A_{11}(\tau)$ и $A_{12}(\delta)$ с подходящими функциями $\sigma(k^3)$, $\tau(k^3)$, $\delta(k^3)$ позволяет обратить в нуль функции φ_1, ψ_1, $\varkappa_1$. При этом функции φ_2, ψ_2, $\varkappa_2$ изменяются, но для них сохраняются прежние обозначения. Из условия подалгебры следует

$$[X_7 + H_1,\ \alpha X_7 + H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] = \langle\dot{\varphi}_2\rangle_1 + \langle\dot{\psi}_2\rangle_2 + \langle\dot{\varkappa}_2\rangle_3.$$

В силу условия подалгебры последнее выражение должно обратиться в нуль, т. е. функции φ_2, ψ_2, $\varkappa_2$ являются константами. В случае $\varphi_2 \neq 0$, действуя автоморфизмами $A_{11}(\tau)$, $A_{12}(\delta)$ с $\tau = -\psi_2/\varphi_2$ и $\delta = -\varkappa_2/\varphi_2$, можно обратить в нуль ψ_2 и $\varkappa_2$. Оптимальная система расширяется подалгеброй

$$\{X_7 + H_1,\ \alpha X_7 + H_2 + \langle C\rangle_1\}.$$

В случае нулевой константы φ_2 на константы ψ_2 и $\varkappa_2$ можно подействовать растяжением $A_{10}(\sigma)$ с постоянной функцией σ. Оптимальная система расширяется представителем

$$\{X_7 + H_1,\ \alpha X_7 + H_2 + \langle C_1\rangle_2 + \langle C_2\rangle_3\}, \qquad C_1C_2 = 1.$$

Подалгебры, содержащие оператор X_9. В общем виде данная двумерная подалгебра представляется следующим образом:

$$\{X_9 + H_1 + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\}.$$

Операторы H_1 и H_2 не содержат X_7 и X_9.

Последовательное применение автоморфизмов $A_{10}(\sigma)$, $A_{11}(\tau)$ и $A_{12}(\delta)$ позволяет обратить в нуль функции φ_1, ψ_1, $\varkappa_1$. Проверим выполнение условия подалгебры

$$[X_9 + H_1,\ H_2 + \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] = [X_9, H_2] + 3\langle k^3\dot\varphi_2\rangle_1 + 3\langle k^3\dot\psi_1\rangle_2 + 3\langle k^3\dot\varkappa_1\rangle_3.$$

Запись условий подалгебры зависит от значения коммутатора $[X_9, H_2]$. При $H_2 = X_1$ получаем

$$3k^3\dot\varphi_2 = -\varphi_2, \qquad 3k^3\dot\psi_2 = -\psi_2, \qquad 3k^3\dot\varkappa_2 = -\varkappa_2.$$

Интегрируя эти соотношения, находим $\varphi_2 = C_1(k^3)^{-1/3}$, $\psi_2 = C_2(k^3)^{-1/3}$, $\varkappa_2 = C_3(k^3)^{-1/3}$, где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы. При $C_1 \neq 0$ действие автоморфизмов A_{11}, A_{12} позволяет обратить в нуль константы C_2 и C_3. Оптимальная система пополняется представителем

$$\{\alpha X_4 + X_9,\ X_1 + \langle C(k^3)^{-1/3}\rangle_1\}.$$

В случае $C_1 = 0$ имеется возможность действовать только автоморфизмом A_{10} с постоянным аргументом. В оптимальную систему добавляется подалгебра

$$\{\alpha X_4 + X_9,\ X_1 + \langle C_1(k^3)^{-1/3}\rangle_2 + \langle C_2(k^3)^{-1/3}\rangle_3\}, \qquad C_2C_3 = 1.$$

При $H_2 = X_4$ из условий подалгебры следует, что функции φ_2, ψ_2 и $\varkappa_2$ являются постоянными. В этом случае, как и выше, получаем два представителя оптимальной системы:

$$\{X_9, X_4 + \langle C\rangle_1\}, \qquad \{X_9, X_4 + \langle C_2\rangle_2 + \langle C_3\rangle_3\}, \qquad C_2C_3 = 1.$$

Анализ случаев $H_2 = X_7$ и $H_2 = X_8$ проводится аналогично. В результате получаем следующие представители:

$$\{\alpha X_4 + X_9, X_7 + \langle C(k^3)^{-1}\rangle_1\}, \quad \{\alpha X_4 + X_9, X_7 + \langle C_2(k^3)^{-1}\rangle_2 + \langle C_3(k^3)^{-1}\rangle_3\}, \quad C_2C_3 = 1,$$

$$\{\alpha X_4 + X_9, X_8 + \langle C(k^3)^{-2/3}\rangle_1\}, \quad \{\alpha X_4 + X_9, X_8 + \langle C_2(k^3)^{-2/3}\rangle_2 + \langle C_3(k^3)^{-2/3}\rangle_3\}, \quad C_2C_3 = 1.$$

4.6. *Дополнение одномерных подалгебр.* Ниже проводится расширение одномерных подалгебр.

Подалгебры, не содержащие в базисе операторы X_7 и X_9. Предположим, что базис подалгебры имеет вид

$$\{H + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\},$$

где оператор H не содержит X_7 и X_9. В случае $\varphi_2 \neq 0$, действуя автоморфизмами A_{11}, A_{12}, можно обратить в нуль функции ψ_2 и $\varkappa_2$. Проверим условия подалгебры

$$[H + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1] = \langle\psi_1\varphi_2\rangle_2 - \langle\varkappa_1\varphi_2\rangle_3.$$

Полученный оператор должен обратиться в нуль, следовательно, $\psi_1 = \varkappa_1 = 0$. В оптимальную систему добавляется подалгебра

$$\{H + \langle\varphi_1\rangle_1,\ \langle\varphi_2\rangle_1\}.$$

В случае $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_1 \neq 0$ можно обратить в нуль функции ψ_1 и $\varkappa_1$. В результате проверки условий подалгебры получаем

$$[H + \langle\varphi_1\rangle_1,\ \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] = -\langle\varphi_1\psi_2\rangle_2 + \langle\varphi_1\varkappa_2\rangle_3.$$

Из условий подалгебры следуют равенства

$$-\varphi_1\psi_2 = C\psi_2, \qquad \varphi_1\varkappa_2 = C\varkappa_2$$

с некоторой константой C. Поскольку ψ_2 и $\varkappa_2$ одновременно не могут быть равны нулю, данные равенства могут выполняться, только если $\varphi_1 = C_1$, $\psi_2\varkappa_2 = 0$. Действуя дополнительно автоморфизмом A_{10}, получаем следующие представители:

$$\{H + \langle C\rangle_1,\ \langle 1\rangle_2\}, \qquad \{H + \langle C\rangle_1,\ \langle 1\rangle_3\}.$$

Наконец, при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ получаем подалгебру

$$\{H + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\}, \qquad (|\psi_1| + |\psi_2| - 1)(|\varkappa_1| + |\varkappa_2| - 1) = 0.$$

Подалгебры, содержащие в базисе оператор X_7. Запишем базис подалгебры в виде

$$\{X_7 + H + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\},$$

где H не содержит операторы X_7 и X_9. Последовательно применяя автоморфизмы A_{10}, A_{11}, A_{12}, можно обратить в нуль функции φ_1, ψ_1, $\varkappa_1$. Проверим выполнение условий подалгебры

$$[X_7 + H,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] = \langle\dot\varphi_2\rangle_1 + \langle\dot\psi_2\rangle_2 + \langle\dot\varkappa_2\rangle_3.$$

Из условий подалгебры следуют равенства

$$\dot\varphi_2 = C\varphi_2, \qquad \dot\psi_2 = C\psi_2, \qquad \dot\varkappa_2 = C\varkappa_2.$$

В результате получаем следующую подалгебру в оптимальной системе:

$$\{X_7 + H,\ \langle C_1\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_1 + \langle C_2\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_2 + \langle C_3\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_3\}.$$

Подалгебры, содержащие в базисе оператор X_9. Запишем базис подалгебры в виде

$$\{X_9 + H + \langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\},$$

где H не содержит операторы X_7 и X_9. Последовательно применяя автоморфизмы A_{10}, A_{11}, A_{12}, можно обратить в нуль функции φ_1, ψ_1, $\varkappa_1$. Проверим выполнение условий подалгебры

$$[X_9 + H,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3] = 3\langle k^3\dot\varphi_2\rangle_1 + 3\langle k^3\dot\psi_2\rangle_2 + 3\langle k^3\dot\varkappa_2\rangle_3.$$

Из условий подалгебры следуют равенства

$$k^3\dot\varphi_2 = C\varphi_2, \qquad k^3\dot\psi_2 = C\psi_2, \qquad k^3\dot\varkappa_2 = C\varkappa_2.$$

В результате получаем следующую подалгебру в оптимальной системе:

$$\{X_9 + H,\ \langle C_1(k^3)^\alpha\rangle_1 + \langle C_2(k^3)^\alpha\rangle_2 + \langle C_3(k^3)^\alpha\rangle_3\}.$$

4.7. *Дополнение нуль-мерной подалгебры.* Запишем базис двумерного расширения нуль-мерной подалгебры в виде

$$\{\langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1 + \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\}.$$

В случае $\varphi_2 \neq 0$, действуя автоморфизмами A_{11}, A_{12}, можно обратить в нуль функции ψ_2 и $\varkappa_2$. Проверим выполнение условий подалгебры

$$[\langle\varphi_1\rangle_1 + \langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\varphi_2\rangle_1] = \langle\psi_1\varphi_2\rangle_2 - \langle\varkappa_1\varphi_2\rangle_3.$$

В случае $\varphi_1 \neq 0$ полученный оператор должен обращаться в нуль, следовательно, $\psi_1 = \varkappa_1 = 0$. В оптимальную систему добавляется подалгебра

$$\{\langle\varphi_1\rangle_1,\ \langle\varphi_2\rangle_1\}.$$

В случае $\varphi_1 = 0$ получаем условия подалгебры в виде

$$\psi_1\varphi_2 = C\psi_1, \qquad -\varkappa_1\varphi_2 = C\varkappa_1.$$

Поскольку функции ψ_1 и $\varkappa_1$ одновременно не равны нулю, $\varphi_2 = C$, $\psi_1\varkappa_1 = 0$. В результате действия автоморфизма A_{10} получаем следующие представители оптимальной системы:

$$\{\langle 1\rangle_1, \langle 1\rangle_2\}, \qquad \{\langle 1\rangle_1, \langle 1\rangle_3\}.$$

Наконец, в случае $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ получаем подалгебру

$$\{\langle\psi_1\rangle_2 + \langle\varkappa_1\rangle_3,\ \langle\psi_2\rangle_2 + \langle\varkappa_2\rangle_3\} \qquad (|\psi_1| + |\psi_2| - 1)(|\varkappa_1| + |\varkappa_2| - 1) = 0.$$

4.8. *Оптимальная система подалгебр* $\Theta_2 L$. Результаты вычисления оптимальной системы подалгебр приведены в табл. 4. В первом столбце указана размерность подалгебры, во втором — подалгебра из ΘL_9, расширяемая до представителя из полной оптимальной системы. В последнем столбце приведено расширение подалгебры до полной подалгебры из L. Базисные операторы каждой подалгебры в последнем столбце включают операторы из второго столбца, записанные с использованием шаблонных операторов H или H_1, H_2 по правилам, указанным выше.

5. Пример точного решения. Построим точное решение на примере подалгебры $\{\alpha X_4 + X_9, X_1 + \langle\beta(k^3)^{-1/3}\rangle_1; \beta \neq 0\}$. Представления инвариантного решения для компонент искомого вектора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$ и функции P имеют следующий вид:

$$x^1(\boldsymbol{k}) = \beta^{-1}\sqrt[3]{k^3}\,\ln k^1 + c_1(\lambda), \quad x^2(\boldsymbol{k}) = \sqrt[3]{k^3}\,c_2(\lambda)\cos\left((\alpha/3)\ln k^3 - c_3(\lambda)\right),$$
$$x^3(\boldsymbol{k}) = \sqrt[3]{k^3}\,c_2(\lambda)\sin\left((\alpha/3)\ln k^3 - c_3(\lambda)\right), \qquad P = (k^3)^{2/3}c_4(\lambda), \qquad \lambda = k^1k^2, \tag{13}$$

где $c_1(\lambda)$, …, $c_4(\lambda)$ — неизвестные функции. После подстановки (13) в систему уравнений (9) получаем

$$c_1'(\lambda) + \lambda c_1''(\lambda) = 0,$$

откуда следует уравнение

$$c_1 = C_1\ln\lambda + C_2$$

с произвольными константами C_1 и C_2. Выполним замену $\mu = \ln\lambda$, $c^2(\lambda) = \sqrt{u(\mu)\lambda}$, $c^3(\lambda) = v(\mu)$, $c^4(\lambda) = w(\mu)$. Подставляя представления (13) в уравнение (9) с учетом выполненных замен, получаем

$$-3\beta u'(\mu)^2 + u(\mu)^2(3\beta + 8w(\mu)v'(\mu) - 12\beta v'(\mu)^2 + 4\alpha w'(\mu)) + 6\beta u(\mu)(u'(\mu) + u''(\mu)) = 0,$$
$$-u'(\mu)(w(\mu) - 3\beta v'(\mu)) + u(\mu)(-w(\mu) + w'(\mu)) + 3\beta(v'(\mu) + v''(\mu)) = 0, \tag{14}$$
$$-6\beta + \alpha u'(\mu) + u(\mu)(\alpha + 2v'(\mu)) = 0.$$

Из последнего уравнения системы и его производной находим первую и вторую производные функции $v(\mu)$:

$$v'(\mu) = \frac{6\beta - \alpha u(\mu) - \alpha u'(\mu)}{2u(\mu)}, \qquad v''(\mu) = \frac{-6\beta u'(\mu) + \alpha u'(\mu)^2 - \alpha u(\mu)u''(\mu)}{2u(\mu)^2}.$$

Подставляя $v'(\mu)$, $v''(\mu)$ во второе и третье уравнения системы (14), имеем

$$-3\beta(\alpha(u'(\mu) + u(\mu)) - 6\beta)^2 - 3\beta u'(\mu)^2 - 4u(\mu)w(\mu)(\alpha(u'(\mu) + u(\mu)) - 6\beta) +$$
$$+ 6\beta u(\mu)(u''(\mu) + u'(\mu)) + 3\beta u(\mu)^2 + 4\alpha u(\mu)^2 w'(\mu) = 0, \tag{15}$$
$$-3\beta(6\beta - \alpha u''(\mu)) + 2u'(\mu)(3\alpha\beta + w(\mu)) + u(\mu)(-3\alpha\beta + 2w'(\mu) - 2w(\mu)) = 0.$$

Из второго уравнения системы (15) находим $w'(\mu)$ и подставляем в первое. В результате находим

$$36\beta^2 - (\alpha^2 + 1)(u'(\mu)^2 - u(\mu)^2) + 12\alpha\beta u'(\mu) +$$
$$+ 2u(\mu)((\alpha^2 + 1)(u''(\mu) + u'(\mu)) + 4w(\mu)) = 0. \tag{16}$$

Таблица 4

Оптимальная система подалгебр размерности не выше двух $\Theta_2 L$ для полной алгебры L

dim	Базис	Расширение до полной алгебры
2	$\{X_1+\alpha X_8, X_4+\beta X_8\}$; $\vert\alpha\vert+\vert\beta\vert=1$, $\{X_1+\alpha X_8, X_2+\beta X_8\}$; $\vert\alpha\vert+\vert\beta\vert=1$, $\{X_1+X_4, X_8\}$, $\{X_1, X_4\}$, $\{X_1, X_2\}$, $\{X_1, X_8\}$, $\{X_4, X_8\}$	$\{H_1+\langle\varphi_1\rangle_1, H_2+\langle\varphi_2\rangle_1\}$, $\{H_1+\langle\psi_1\rangle_2+\langle\varkappa_1\rangle_3, H_2+\langle\psi_2\rangle_2+\langle\varkappa_2\rangle_3\}$; $(\vert\psi_1\vert+\vert\psi_2\vert-1)((\vert\varkappa_1\vert+\vert\varkappa_2\vert-1))=0$
	$\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8, X_4+\gamma X_7+\delta X_8\}$; $\vert\alpha\vert+\vert\gamma\vert=1$, $\{X_1+\alpha X_7+\beta X_8, X_2+\gamma X_7+\delta X_8\}$; $\vert\alpha\vert+\vert\gamma\vert=1$, $\{\alpha X_1+X_4+\beta X_7, \gamma X_7+X_8\}$; $\vert\beta\vert+\vert\gamma\vert=1$, $\{\alpha X_1+X_4+\beta X_8, X_7\}$; $\alpha^2+\vert\beta\vert=1$, $\{X_1+\alpha X_7, \beta X_7+X_8\}$; $\vert\alpha\vert+\vert\beta\vert=1$, $\{X_7, X_8\}$, $\{X_1+\alpha X_8, X_7\}$, $\{X_4, X_7\}$, $\{X_1, X_7\}$	$\{X_7+H_1, \alpha X_7+H_2+\langle C\rangle_1\}$, $\{X_7+H_1, \alpha X_7+H_2+\langle C_1\rangle_2+\langle C_2\rangle_3\}$; $C_1C_2=1$
	$\{X_1, \alpha X_4+X_9\}$, $\{X_4, X_9\}$, $\{X_7, \alpha X_4+X_9\}$, $\{X_8, \alpha X_4+X_9\}$	$\{\alpha X_4+X_9, X_1+\langle C(k^3)^{-1/3}\rangle_1\}$, $\{\alpha X_4+X_9, X_1+\langle C_1(k^3)^{-1/3}\rangle_2+\langle C_2(k^3)^{-1/3}\rangle_3\}$; $C_1C_2=1$, $\{X_9, X_4+\langle C\rangle_1\}$, $\{X_9, X_4+\langle C_2\rangle_2+\langle C_3\rangle_3\}$, $C_1C_2=1$, $\{\alpha X_4+X_9, X_7+\langle C(k^3)^{-1}\rangle_1\}$, $\{\alpha X_4+X_9, X_7+\langle C_1(k^3)^{-1}\rangle_2+\langle C_2(k^3)^{-1}\rangle_3\}$; $C_1C_2=1$, $\{\alpha X_4+X_9, X_8+\langle C(k^3)^{-2/3}\rangle_1\}$, $\{\alpha X_4+X_9, X_8+\langle C_1(k^3)^{-2/3}\rangle_2+\langle C_2(k^3)^{-2/3}\rangle_3\}$; $C_1C_2=1$
1	$\{\alpha X_1+X_4+\beta X_8\}$; $\vert\alpha\vert^3+\vert\beta\vert=1$, $\{X_1+X_8\}$, $\{X_1\}$, $\{X_4\}$, $\{X_8\}$	$\{H+\langle\varphi_1\rangle_1, \langle\varphi_2\rangle_1\}$, $\{H+\langle C\rangle_1, \langle 1\rangle_2\}$, $\{H+\langle C\rangle_1, \langle 1\rangle_3\}$, $\{H+\langle\psi_1\rangle_2+\langle\varkappa_1\rangle_3, \langle\psi_2\rangle_2+\langle\varkappa_2\rangle_3\}$, $(\vert\psi_1\vert+\vert\psi_2\vert-1)(\vert\varkappa_1\vert+\vert\varkappa_2\vert-1)=0$
	$\{\alpha X_1+X_4+X_7+\beta X_8\}$, $\{X_1+X_7+\alpha X_8\}$, $\{X_7+X_8\}$, $\{X_7\}$	$\{X_7+H, \langle C_1\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_1+\langle C_2\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_2+\langle C_3\,\mathrm{e}^{Ck^3}\rangle_3\}$
	$\{\alpha X_4+X_9\}$	$\{X_9+H, \langle C_1(k^3)^\alpha\rangle_1+\langle C_2(k^3)^\alpha\rangle_2+\langle C_3(k^3)^\alpha\rangle_3\}$
0		$\{\langle\varphi_1\rangle_1, \langle\varphi_2\rangle_1\}$, $\{\langle 1\rangle_1, \langle 1\rangle_2\}$, $\{\langle 1\rangle_1, \langle 1\rangle_3\}$, $\{\langle\psi_1\rangle_2+\langle\varkappa_1\rangle_3, \langle\psi_2\rangle_2+\langle\varkappa_2\rangle_3\}$; $(\vert\psi_1\vert+\vert\psi_2\vert-1)(\vert\varkappa_1\vert+\vert\varkappa_2\vert-1)=0$

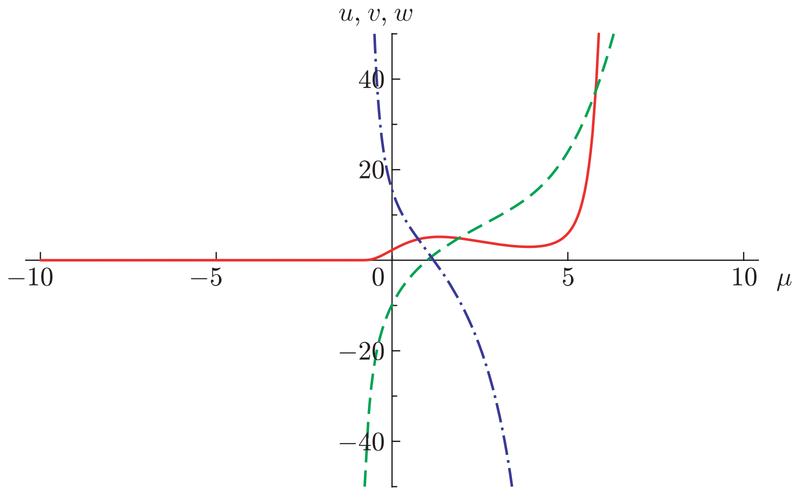

Рис. 1. Решение уравнений (14) для функций u (сплошная линия), v (штриховая) и w (штрихпунктирная линия)

Решив данное уравнение относительно $w(\mu)$ и подставив полученное выражение во второе уравнение системы (15), получаем уравнение для функции $u(\mu)$:

$$-2(\alpha^2+1)u(\mu)u'''(\mu)+u''(\mu)(4(\alpha^2+1)u'(\mu)-24\alpha\beta)-2(\alpha^2+1)u'(\mu)^3/u(\mu)+ \\ +u'(\mu)^2(\alpha^2+24\alpha\beta/u(\mu)+1)+2u'(\mu)(-6\alpha\beta+(\alpha^2+1)u(\mu)-36\beta^2/u(\mu))+ \\ +(\alpha^2+1)u(\mu)^2-12\alpha\beta u(\mu)+36\beta^2=0. \quad (17)$$

Уравнение (17) решается численно с помощью пакета Wolfram Mathematica. В качестве начальных данных выберем $u(\mu_0)=u_0$, $u'(\mu_0)=u_1$, $w(\mu_0)=w_0$. Тогда значение $u''(\mu_0)$ вычисляется из уравнения (16). Далее находим оставшиеся функции $v(\mu)$, $w(\mu)$, подставив найденные значения функции $u(\mu)$ в полученные выше представления функций $v(\mu)$, $w(\mu)$ через производные функции $u(\mu)$. Графики функций $u(\mu)$, $v(\mu)$, $w(\mu)$ при $\alpha=-10$, $\beta=1$ и начальных данных $u_0=5$, $u_1=1$, $w_0=2$, $v_0=0$, $\mu_0=1$ приведены на рис. 1.

Возвращаясь к физическим переменным, можно описать поведение магнитных линий и линий тока для полученного решения. На рис. 2 представлены линия тока и магнитная линия при $k^3=4$. Другие магнитные силовые линии и линии тока частиц для этого решения имеют подобный вид.

Полученное решение моделирует истечение электропроводной среды из вихреисточника в трехмерное пространство. При этом, варьируя параметр k^3, можно получать линии тока и магнитные линии, расположенные на различном расстоянии от оси вихреисточника. При изменении константы C_1 изменяется шаг спиралевидных линий тока: при больших значениях C_1 шаг увеличивается. При больших значениях константы β и $C_1=0$ траектории становятся практически плоскими.

Заключение. В работе исследованы групповые свойства системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной в естественной криволинейной системе координат, в которой линии тока и магнитные силовые линии играют роль координатных кривых. Найдены допускаемая системой группа и алгебра Ли преобразований симметрии. Получены оптимальные системы подалгебр размерностей 1 и 2. Для отдельной подалгебры найдено точное инвариантное решение ранга 1.

Проведенное исследование основано на применении аппарата группового анализа, теории групп Ли и теории бесконечномерной группы симметрий дифференциальных уравне-

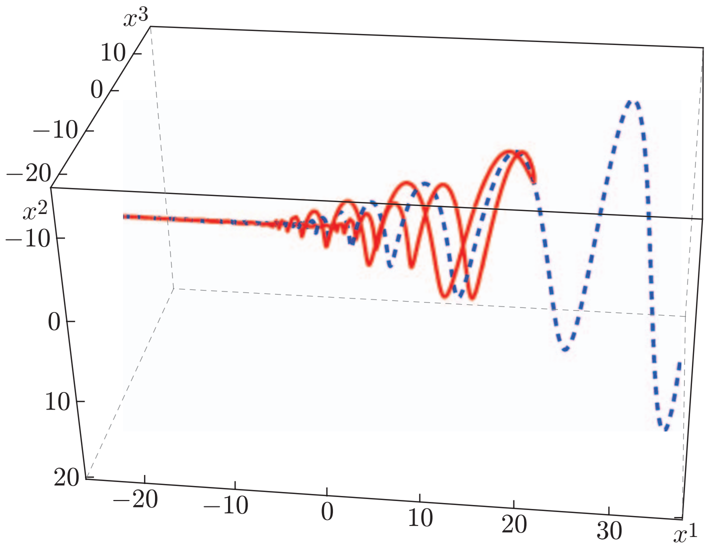

Рис. 2. Линия тока (штриховая линия) и магнитная силовая линия (сплошная), соответствующие решению на рис. 1 при $C_1 = 5$

ний. В силу нелинейности исходных уравнений аналитическое интегрирование получаемых уравнений редуцированной системы было невозможно. В этом случае проводился численный расчет решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica. Приведенный в работе пример точного решения представляет интерес с физической точки зрения, поскольку описывает трехмерное завихренное течение проводящей жидкости типа вихреисточника.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богоявленский О. И.** Точные глобальные равновесия плазмы // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, вып. 3. С. 63–102.
2. **Golovin S. V.** Analytical description of stationary ideal MHD flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 901–905.
3. **Newcomb W. A.** Lagrangian and hamiltonian methods in magnetohydrodynamics // Nuclear Fusion. (Supplement). 1962. Pt 2. P. 451–463.
4. **Golovin S. V., Krutikov M. K.** Complete classification of stationary flows with constant total pressure of ideal incompressible infinitely conducting fluid // J. Phys. A. Math. Theor. 2012. V. 45. 235501.
5. **Головин С. В., Дудник М. Н.** Нестационарные течения с постоянным полным давлением, описываемые уравнениями идеальной магнитогидродинамики // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 53–67.
6. **Golovin S. V.** Natural curvilinear coordinates for ideal MHD equations. Non-stationary flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 283–290.
7. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
9. **Fuchs J. C., Richter E. W.** Similarity solutions for the two-dimensional non-stationary ideal MHD equations // J. Phys. A. Math. General. 1987. V. 20, N 11. P. 3135–3157.
10. **Grundland A. M., Lalague L.** Lie subgroups of symmetry groups of fluid dynamics and magnetohydrodynamics equations // Canad. J. Phys. 1995. V. 73. P. 463–477.

11. **Webb G. M., Zank G. P., Kaghashvili E. Kh., Ratkiewicz R. E.** Magnetohydrodynamic waves in non-uniform flows II: stress-energy tensors, conservation laws and Lie symmetries // J. Plasma Phys. 2005. V. 71, N 6. P. 811–857.
12. **Webb G.** Magnetohydrodynamics and fluid dynamics: Action principles and conservation laws. Heidelberg: Springer, 2018. (Lecture Notes Phys.; V. 946).
13. **Байкин А. Н., Головин С. В.** Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой электропроводной жидкости // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 33–44.
14. **Яворский Н. И.** Спонтанное возникновение вращения в точном решении магнитогидродинамических уравнений для течения между двумя неподвижными непроницаемыми дисками // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 72–79.
15. **Куликовский А. Г.** Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. М.: Логос, 2005.
16. **Elsässer W. M.** The hydromagnetic equations // Phys. Rev. 1950. V. 79, N 1. P. 183.
17. **Шутц Б.** Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984.
18. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. АН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.

Поступила в редакцию 29/X 2018 г.,
после доработки — 29/X 2018 г.
Принята к публикации 29/X 2018 г.