

4. К. Е. Губкин. Канд. дисс., ИХФ АН СССР, 1961.
5. П. Ф. Коротков. ПМТФ, 1961, 3.
6. М. А. Садовский. В сб. «Физика взрыва», № 1, М., Изд-во АН СССР, 1952.
7. А. И. Соколик, А. И. Станиловский. ПНТПО № П—57/29/8, филиал ВИНТИ, 1957.
8. Р. И. Солоухин. Ударные волны и детонация в газах. М., «Физматгиз», 1963.
9. Brian J. Greenland, J. D. Knowles. Quarry Manag. J., 1970, 54, 10.

УДК 535+621.375.82

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ АБЕЛЯ ПРИ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

В. В. Пикалов, Н. Г. Преображенский
(Новосибирск)

1. Развитие импульсных голографических методов исследования плазмы и нагретых газов открывает много новых интересных возможностей для изучения взрывных явлений. Это относится, в частности, и к классической газодинамической задаче о точечном взрыве [1, 2], ряд аспектов которой диктует необходимость постановки целой серии уточняющих экспериментов [3—5].

Весьма важным элементом обработки интерферограмм, снятых как на стадии существования плазмы, так и в те интервалы времени, когда по газу движется лишь сравнительно слабая ударная волна, является переход от набега фазы световой волны $\Phi(x)$, суммируемого вдоль выбранного луча зрения, к радиальному распределению плотности основного компонента среды $\rho(r)$. Как известно, эти функции связаны друг с другом интегральным соотношением

$$\Phi(x) = \frac{4\pi k}{\lambda} \int_x^R \frac{[\rho(r) - \rho(R)] r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (1.1)$$

где λ — длина волны и k — постоянная (например, константа Гладстона — Дэйла). Выражение (1.1) есть хорошо известное уравнение Абеля, формальное решение которого нетрудно записать. Однако присутствие в этом решении производной $\Phi'(x)$ может привести в реальной ситуации к столь большой потере точности, что беспредметным окажется сам голографический эксперимент, например типа описанного в работах [3] или [5]. В самом деле, как показывают простые оценки [6], даже при оптимальном выборе отсчетного дискретного шага погрешность в измерении $\Phi(x=0)$, равная $\pm 2\%$, дает ошибку в определении плотности $\pm 40\%$. В таких условиях уже трудно или вообще невозможно выделить роль вязкости, теплопроводности, излучения, химических реакций в динамике взрывного процесса. Конечно, следует оговориться, что оценки в [6] относятся к случаю, когда решение уравнения (1.1) находится без применения какой-либо регуляризационной процедуры. Однако именно в отношении регуляризации и сохраняется, пожалуй, наиболее существенный пробел в исследованиях по голографической интерферометрии взрыва. Нижеследующие расчеты ставят своей основной целью по возможности заполнить данный пробел.

2. Переходя к безразмерным аргументам, запишем уравнение Абеля в виде

$$2 \int_u^1 \frac{\varphi(v) v dv}{\sqrt{v^2 - u^2}} = f(u). \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения обычно представляют в одной из следующих форм:

$$\varphi(v) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{f'(u) du}{\sqrt{u^2 - v^2}} \\ -\frac{1}{\pi v} \frac{d}{dv} \int_v^1 \frac{f(u) u du}{\sqrt{u^2 - v^2}} \end{cases} \quad v, u \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Функции f (входные данные) и φ (восстанавливаемое распределение) можно рассматривать как n -компонентные векторы, а уравнение (2.1) представить в операторном (матричном) виде:

$$f = K\varphi. \quad (2.3)$$

Будем в дальнейшем для краткости называть прямыми методами нахождения функции $\varphi(v)$ такие, которые основаны либо на непосредственном обращении матрицы (K):

$$\varphi = K^{-1}f, \quad (2.4)$$

либо на расчетах по одной из формул (2.2) с использованием методов, предложенных в работах [7, 8]. Методы, описанные в [7, 8], обычно относят к числу наиболее последовательных и они достаточно часто используются в приложениях.

Сравнение методов решения уравнения Абеля с неточно заданной правой частью производилось с помощью модельных функций. В одном случае исходной считалась функция $f(u)$, а $\varphi(v)$ вычислялась согласно (2.2), в другом, наоборот, в качестве исходной выбиралась $\varphi(u)$, а $f(u)$ находилась в соответствии с (2.1):

$$\left. \begin{aligned} f(u) &= au^6 + bu^4 - (a + b + 1)u^2 + 1; \\ \varphi(v) &= \frac{2}{15\pi} \sqrt{1 - v^2} [-24av^4 - (12a + 20b)v^2 + 6a + 5b + 15]; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(v) &= cv^4 + dv^3 + ev^2 + gv + h; \\ f(u) &= \sqrt{1 - u^2} \left[\frac{16}{15}cu^4 + \left(\frac{8}{15}c + \frac{3}{4}d + \frac{4}{3}e \right)u^2 + \frac{2}{5}c + \frac{d}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}e + g + 2h \right] + \left(\frac{3}{8}du^4 + gu^2 \right) \ln(1 + \sqrt{1 - u^2}) - \\ &\quad - \frac{3}{8}du^4 \ln(1 - \sqrt{1 - u^2}) - gu^2 \ln u. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Варьируя коэффициенты в формулах (2.5) и (2.6), можно охватить весьма широкий класс кривых, представляющих интерес как с точки зрения задач спектроскопии плазмы, так и голографической интерферометрии возмущенных областей газа. Кроме того, полагая в (2.5) $a = -6$ и $b = 8$, приходим к частному случаю, непосредственно рассмотренному в [7, 8]. Рассматривался также случай $a = -3$, $b = 3$. Что касается выражений (2.6), то три следующих случая

$$c = 1, d = 0, e = -2, g = 0, h = 1;$$

$$c=17, d=-32, e=14, g=0, h=1;$$

$$c=16, d=-32, e=16, g=0, h=0,$$

соответствуют кривым, выбранным для анализа в [9].

Первый этап решения уравнения (2.1) заключается в его алгебраизации, которая неизбежно содержит в себе определенную погрешность, характеризуемую величиной

$$\beta = \frac{K\varphi_0 - f_0}{f_0} \cdot 100\%, \quad (2.7)$$

При этом φ_0 и f_0 — какая-либо пара кривых из (2.5) и (2.6). Изучались следующие способы алгебраизации (с последующим интегрированием):

1) аппроксимация $\varphi(v)$ в уравнении (2.1) на отрезках $[v_i, v_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, n$:

а) кусочно-постоянной функцией

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} [\varphi(v_i) + \varphi(v_{i+1})];$$

б) линейной функцией

$$\varphi(v) = a_i v + b_i;$$

в) квадратным трехчленом (парабола)

$$\varphi(v) = a_i v^2 + b_i v + c_i;$$

2) методы, изложенные в работах [7, 8].

Результаты сравнения этих способов алгебраизации для исходной функции

$$\varphi(v) = 17v^4 - 32v^3 + 14v^2 + 1, \quad (2.8)$$

приведены на рис. 1, а. Видно, что наибольшую точность во всей области значений аргумента обеспечивают метод Боккастена [7] и параболическая аппроксимация; в периферийной зоне ($v > 0,9$) точность последней несколько выше.

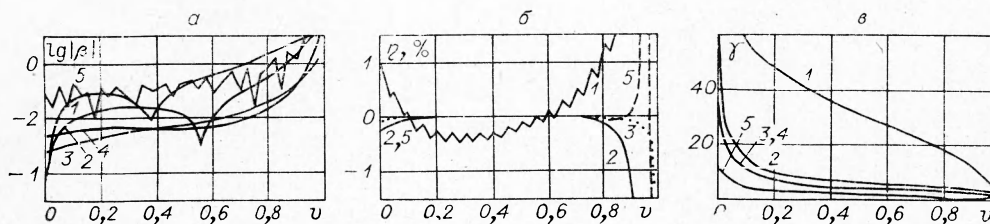


Рис. 1. Характеристики прямых методов абелевой инверсии.

а) ошибка алгебраизации β в %; б) смещение метода η в %; в) коэффициент усиления γ при кусочно-постоянной (1), линейной (2) и параболической (3) аппроксимациях, а также при использовании методов Боккастена (4) и Ларькиной (5).

В качестве характеристик решения уравнения (2.1) (или 2.2)) были выбраны:

коэффициент усиления ошибки

$$\gamma = \frac{\omega(v)}{\kappa(u)}, \quad (2.9)$$

где $\omega(v) = \frac{\sigma(v)}{\varphi_0(v)}$, $\sigma^2(v)$ — дисперсия восстановленной функции, $\kappa(v)$ — коэффициент вариации входных данных;

ошибка метода (смещение) [18]

$$\eta = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Phi_0} \cdot 100\%, \quad (2.10)$$

где Φ_1 — восстановленная функция для точной правой части $f_0(u)$; передача ошибки правой части

$$\xi = \frac{\Phi - \Phi_1}{\Phi_0} \cdot 100\%, \quad (2.11)$$

где Φ — восстановленная функция для математического эксперимента с коэффициентом вариации $\kappa(u)$.

Здесь следует заметить, что на окончательный результат абелевой инверсии влияет ряд факторов. Представляется существенным выделить ошибки алгебраизации уравнений (2.1) или (2.2), ошибки, обусловленные особенностями того или иного численного метода решения уравнения (2.3) или на вызванные «шумом» во входных данных. С этой целью и введены величины η и ξ . В работах [7, 10, 11], посвященных анализу точности различных способов решения уравнения Абеля, оценивалось лишь смещение метода и совершенно не исследовалось влияние «шума» в $f(u)$. При введении в $f(u)$ случайных добавок, сделанных в работах [12—14], не был, однако, выделен их вклад в суммарную ошибку.

Приведем основные результаты исследования прямых методов решения уравнения Абеля. На рис. 1, б, в показаны смещения η и коэффициенты усиления ошибки γ для этих методов; передача ошибки эксперимента, задаваемой коэффициентом вариации в 3%, для некоторых значений v иллюстрируется данными таблицы. Из рис. 1, б и таблицы видно, что аппроксимация неизвестной функции $\psi(v)$ в формуле (2.1) квадратным трехчленом дает примерно те же результаты, что и аппроксимация функции $f(u)$ в формуле (2.2) полиномом третьей степени (схема Боккастена [7]). Включение в схему сглаживания входного «шума» по методу наименьших квадратов [8] значительно уменьшает передачу ошибки (исключая область $0,9 < v < 1$), хотя смещение η как для малых значений v , так и для $v > 0,9$ при этом несколько возрастает. Коэффициент усиления ошибки γ при использовании процедуры [8] оказывается наименьшим (см. рис. 1, в).

3. Как уже отмечалось выше, следующая из формул (2.2) необходимость численного дифференцирования экспериментальной функции делает задачу неустойчивой относительно погрешностей измерения $f(u)$. В последние годы интенсивно разрабатываются методы решения некорректных (точнее — условно-корректных [15]), задач, позволяющие априорным сужением класса функций, в котором отыскивается решение, существенно уменьшить влияние погрешностей входных данных $f(u)$ на точность определения $\varphi(v)$ [16—18].

В силу специфики рассматриваемой задачи наиболее естественным следует считать вероятностный способ задания априорной информации и поэтому для решения (2.1) был использован метод статистической

регуляризации [19—21]. Отметим, что в качестве такой априорной информации чаще всего используется предположение о «достаточной» гладкости искомой функции, т. е. о существовании у нее производных, вплоть до m -го порядка (обычно ограничиваются значением $m=2$). Кроме того, считаются известными из эксперимента характеристики

Передача ошибки прямыми методами
(ξ , в процентах)

v	Вид аппроксимации			Из [7]	Из [8]
	кусочно-постоянная	линейная	параболическая		
0,000	-646,9	-256,6	-121,4	122,4	-20,7
0,500	-34,1	-1,1	-0,5	-0,4	0,7
0,975	-1,9	-1,4	-0,5	0,4	24,7

входного «шума» (дисперсия S_i^2 или матрица ошибок $W_{ij} = S_i^{-2} \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера).

Введем симметричную, неотрицательную и в общем случае q -кратно вырожденную матрицу (Ω) таким образом, чтобы соответствующая ей квадратичная форма являлась нормой производной функции $\varphi(v)$ m -го порядка:

$$(\varphi, \hat{\Omega}\varphi) = \int \left| \frac{d^m \varphi(v)}{dv^m} \right|^2 dv. \quad (3.1)$$

Решение задачи ищем в статистическом ансамбле гладких функций с параметром гладкости α [20], который характеризуется априорной плотностью вероятности

$$P_\alpha(\varphi) = C_\alpha \alpha^{(n-q)/2} \exp \left\{ -\frac{r\alpha}{2} (\varphi, \hat{\Omega}\varphi) \right\}, \quad (3.2)$$

где C_α — нормировочная константа. Здесь не касаемся деталей алгоритма решения (см. работы 20—22), окончательный вид которого дается формулой

$$\varphi = (K + WK + \alpha\hat{\Omega})^{-1} K^+ Wf. \quad (3.3)$$

Дисперсия восстановленной функции, необходимая для подсчета коэффициента усиления ошибки γ (формула (2.9)), определяется как диагональный элемент корреляционной матрицы

$$\sigma_i^2 = (K + WK + \alpha\hat{\Omega})_{ii}^{-1}. \quad (3.4)$$

В выражениях (3.3) и (3.4) (K^+) — транспонированная матрица.

Решение (3.3) находилось итерациями по α , причем на l -ом шаге

$$\alpha_l = \frac{n}{(\varphi^{(l-1)}, \hat{\Omega}\varphi^{(l-1)}),} \quad (3.5)$$

а за нулевое приближение $\varphi^{(0)}$ принимается исходный вектор f . Решение заканчивалось с прекращением изменений α , для чего, как правило, было достаточно 6—7 итераций. Для сравнения отметим, что предложенная недавно Келлером [23] итерационная процедура решения уравнения Абеля со сглаживанием исходных данных требует свыше 100 итераций.

Метод статистической регуляризации изучался при изменении а) вида аппроксимации подинтегральной функции при алгебраизации уравнения Абеля; б) степени гладкости искомой функции, т. е. порядка производной m в (3.1); в) числа разбиений n отрезка интегрирования на «зоны».

На рис. 2 показаны характерные результаты восстановления модельной функции

$$\varphi(v) = 17v^4 - 32v^3 + 14v^2 + 1, \quad (3.6)$$

имеющей «провал» на оси симметрии. Соответствующая ей функция

$$f(u) = \frac{8}{15} \sqrt{1-u^2} (34u^4 + 7u^2 + 4) + 12u^4 \ln \frac{1 - \sqrt{1-u^2}}{1 + \sqrt{1-u^2}} \quad (3.7)$$

была отягощена нормально распределенной ошибкой в 3%, причем выборка случайных чисел была такой же, как и при исследовании прямых методов решения. Легко видеть, что с помощью метода статистической регуляризации восстановление $\varphi(v)$ производится лучше, нежели наиболее точным из прямых методов [8] (для регуляризации использовалась матрица из [8]).

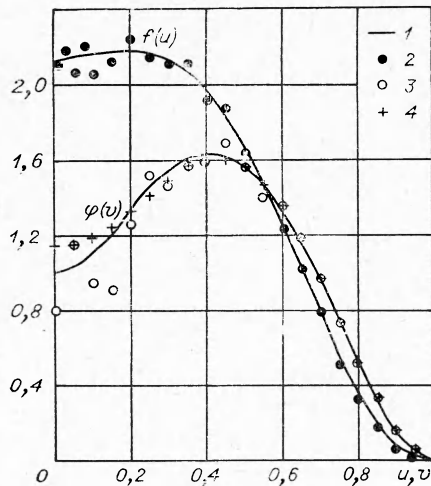


Рис. 2. «Экспериментальная» функция $f(u)$ и результаты восстановления $\varphi(v)$. 1 — точные значения функции; 2 — наброс на $f(u)$ ошибки в 3%; 3 — метод [8]; 4 — метод статистической регуляризации.

также, что по сравнению с лучшими прямыми методами статистическая регуляризация ведет, как правило, к большим значениям η , что существенно прежде всего для кривых с несколькими экстремумами. Этот результат согласуется с выводом работы [24], в которой восстанавливалось распределение частиц дисперсной системы по размерам с помощью индикатрисы рассеяния. Обсуждаемые в [24] рекомендации по более эффективному использованию априорной информации об искомом решении следует считать справедливыми и в рассматриваемой задаче.

На рис. 5, а отчетливо выражено уменьшение передачи ошибки с введением ограничения на производные по сравнению со случаем, когда ограниченной считается только функция. В целом наиболее существенным оказывается ограничение, накладываемое на вторую производную; добавочные условия, ограничивающие саму функцию и ее первую производную, фактически не вносят изменений в решение.

Сравнение рис. 1, в и 3, в показывает, что коэффициент усиления ошибки γ для процедуры статистической регуляризации значительно меньше, чем для рассмотренных выше прямых методов. Особенно от-

Величины γ , η и ξ , соответствующие выбору той же пары функций (3.6) и (3.7), приводятся на рис. 3—5. Использовались и другие комбинации коэффициентов в формулах (2.5) и (2.6). На основании большой серии расчетов можно заключить, что коэффициент усиления ошибки γ и смещение метода η слабо зависят от вида избранной аппроксимации. Зависимость γ от числа разбиений на «зоны» и от ограничений на негладкость функции, напротив, достаточно сильна. Наименьший коэффициент усиления ошибки был получен при $n=40$, $m=2$ и параболической аппроксимации на отрезках функции $\varphi(v)$.

Смещения η практически мало отличаются в случаях $m=1$ и $m=2$: параболическая аппроксимация предпочтительна, особенно в интервале $0,9 \leq v \leq 1$. Расчеты показали

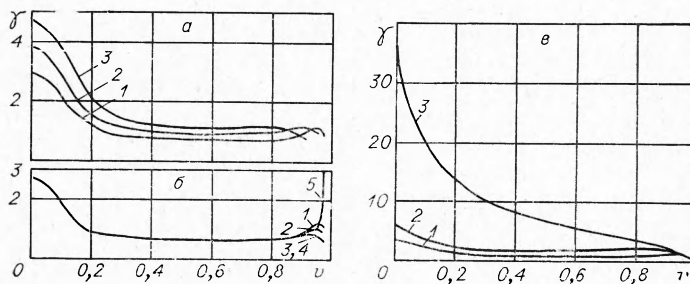


Рис. 3. Коэффициент усиления ошибки γ метода статистической регуляризации.

а) влияние числа «зон»: $n=40$ (1), 20 (2) и 10 (3); линейная аппроксимация, $m=2$; б) влияние способа аппроксимации (нумерация кривых соответствует рис. 1, в), $n=40$, $m=2$; в) влияние ограничений на негладкость, $m=2$ (1), 1 (2), 0 (3); линейная аппроксимация, $n=40$.

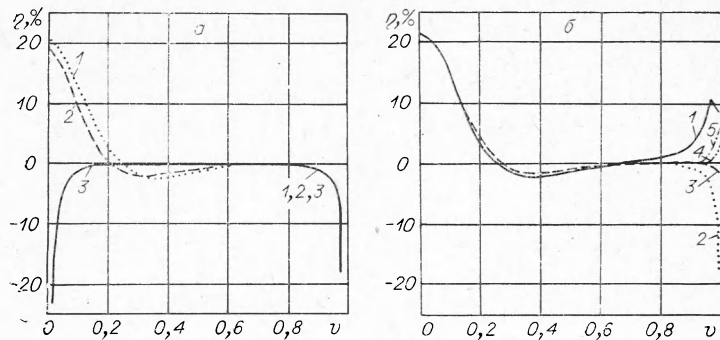


Рис. 4. Смещение η в методе статистической регуляризации.
 а) влияние ограничений на негладкость (обозначения соответствуют рис. 3, в); б) влияние способа аппроксимации (обозначения соответствуют рис. 1, в). $n=40$, $m=2$.

четливо это проявляется на примере сопоставления факторов передачи ошибки ξ при пересчете одной и той же экспериментальной выборки разными методами (см. таблицу и рис. 5, б). Например, при $\nu=0$ в методе статистической регуляризации влияние «шума» входных данных сказывается в три раза слабее, чем в методе [8].

4. Сформулируем основные выводы из проделанных расчетов.

1. Процедура обращения уравнения Абеля с использованием метода статистической регуляризации вполне эффективна и пригодна для восстановления достаточно сложных распределений, встречающихся при обработке интерференционных голограмм, а также спектральных характеристик плазмы.

2. Среди всех рассмотренных методов процедура статистической регуляризации обеспечивает наименьший коэффициент усиления экспериментальной ошибки измерения. Встречающееся иногда нежелательное смещение, сопряженное с этой процедурой, указывает на необходимость более полного учета априорной информации о наличии у восстанавливаемой функции экстремумов.

3. Применительно к интегральному уравнению Абеля оптимальными для регуляризации оказываются следующие условия:

а) выбор искомого решения из статистического ансамбля функций с ограниченной второй производной;

б) использование параболической аппроксимации функции при алгебраизации уравнения (2.1);

в) разбиение интервала интегрирования на число «зон» порядка 40.

4. Метод статистической регуляризации можно уверенно рекомендовать для обработки интерференционных импульсных голограмм областей горячего газа при точечном взрыве, которые соответствуют наиболее трудно фиксируемому переходным участкам от модели Седова — Тэйлора [2] к моделям Сакураи [25] и Коробейникова [1, 26].

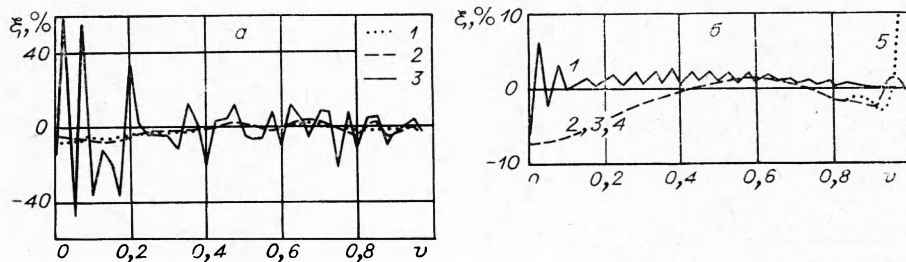


Рис. 5. Передача ошибки эксперимента ξ в методе статистической регуляризации (параметры и нумерация кривых те же, аналогичны рис. 4).

В связи с этим нуждаются в пересмотре данные нескольких работ (см. [5] и содержащиеся там ссылки), в которых инверсия уравнения Абеля (1.1) была выполнена по схемам, явно неадекватным задаче.

Авторы признательны Р. И. Солоухину за поддержку работы и Б. З. Тамбовцеву за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
3/III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Коробейников, Н. С. Мельникова, Е. В. Рязанов. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
2. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 7-е. М., «Наука», 1972.
3. И. И. Комиссарова, Г. В. Островская, Л. Л. Шапиро. ЖТФ, 1968, 38.
4. Г. В. Островская, А. Н. Зайдель. УФН, 1973, III, 579.
5. A. H. Guenther, W. K. Pendleton a. o. Opt. and Laser Technol., 1973, 2, 20.
6. Е. П. Миронов, М. И. Пергамент и др. В сб. «Диагностика плазмы». Под ред. С. Ю. Лукьянова, вып. 3. М., Атомиздат, 1973, с. 128.
7. K. Voskasteen. J. Opt. Soc. Amer., 1961, 51, 948.
8. Л. Т. Ларькина. В сб. «Применение плазматрона в спектроскопии». Фрунзе, «Илим», 1970, с. 17.
9. M. Kock, J. Richter. Ann. Phys (DDR), 1969, 24, 30.
10. O. Nestor, H. Olsen. SIAM Rev., 1960, 2, 200.
11. В. А. Емельянов, Г. П. Жаврид. ИФЖ, 1962, 5, 64.
12. W. Вагг. J. Opt. Soc. Amer., 1962, 52, 885.
13. Н. Н. Литвинова. Вестн. ЛГУ, сер. физ. хим., 1972, 16, 3, 37.
14. И. Д. Кулагин, Л. М. Сорокин, Э. А. Дубровская. Опт. и спектр., 1972, 32, 865.
15. М. М. Лаврентьев. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, изд. НГУ, 1973.
16. А. Н. Тихонов. Докл. АН СССР, 1963, 151, 501; 1963, 153, 42.
17. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич. УФН, 1970, 102, 345.
18. В. Я. Арсенин. О методах решения некорректно поставленных задачах. М., изд. МИФИ, 1973.
19. В. Ф. Турчин. Ж. вычисл. матем. и мат. физики, 1967, 7, 1270; 1968, 8, 230.
20. В. Ф. Турчин, В. З. Нозик. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 1969, 5, 29.
21. Н. Г. Преображенский, Б. З. Тамбовцев. Опт. и спектр., 1973, 35, 946.
22. В. В. Пикалов, Н. Г. Преображенский, Б. З. Тамбовцев. В сб. «Аэродинамические исследования», вып. 2. Новосибирск, 1973, с. 35.
23. R. Keller. X-th Conf. Phenom. Ion. Gases, Contrib papers, Oxford, 1971, p. 395.
24. К. С. Шифрин, В. Ф. Турчин и др. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 1972, 8, 1268.
25. A. Sakurai. J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, 622.
26. В. П. Коробейников. Докл. АН СССР, 1956, 109, 271; 1957, 113, 1006.