

УДК 532.59: 534.1

## АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

И. Н. Солдатов, Н. В. Ключева

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
603022 Нижний Новгород, Россия  
E-mails: igorsldtv@yandex.ru, natali.kl01@gmail.com

Исследованы азимутальные гироскопические волны во флотирующей жидкости, образующей центрифугированный слой на твердой стенке цилиндрической полости ротора. Найдено точное решение линеаризованной гидродинамической задачи с неклассическим граничным условием на свободной поверхности. Получено дисперсионное уравнение. Исследовано влияние инерционной поверхности жидкости на устойчивость квазитвердотельного вращения центрифугированного слоя.

**Ключевые слова:** флотирующая вязкая жидкость, азимутальные инерционные (гироскопические) волны в центрифуге, дисперсионное уравнение.

DOI: 10.15372/PMTF20210211

**Введение.** Роторные системы используются для очистки газов и жидкостей, разделения многокомпонентных смесей, каскады из высокооборотистых центрифуг применяются для разделения изотопов. Поскольку центрифужные машины имеют большой потенциал, можно предположить, что при более широком использовании высокочистых веществ их востребованность будет увеличиваться. Волновые движения в газе или жидкости, содержащихся в полости ротора, оказывают влияние на процессы разделения, седиментации-флотации и устойчивость ротора. В роторе, частично заполненном жидкостью, резонансное возбуждение волн является основной причиной его неустойчивости [1, 2]. Волновые процессы в газовых центрифугах аналитически исследовались в работах [3, 4], в жидкостных — в работах [2, 5–7]. Результаты экспериментальных и численных исследований волновых процессов во вращающихся контейнерах представлены в работах [8–14].

Под влиянием центробежных и архимедовых сил мелкие частицы, взвешенные в жидкости, частично заполняющей полость высокооборотистой центрифуги, быстро оседают на стенках полости или (при меньшей, чем у жидкости, плотности) образуют на поверхности пленку из плавающих частиц. Для описания волновых движений центрифугированного слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью, в которую включены частицы твердого вещества, пренебрежимо мало взаимодействующие друг с другом, в работе [15] предложена модель, являющаяся обобщением на случай вихревых волновых движений с диссипацией модели идеальной жидкости с инерционной поверхностью (модели флотирующей жидко-

сти) [16]. Потенциальные движения идеальной флотирующей жидкости рассматривались также в работах [17–22] и др.

Термин “инерционная поверхность” введен в работе [16], в которой исследовалось влияние сплошного ковра из мелкой крошки льда в арктических морях на поверхностные волны. В [16–22] рассматривалась идеальная несжимаемая жидкость бесконечной или конечной глубины, ограниченная свободной поверхностью, на которой плавают весомые частицы, не взаимодействующие друг с другом. (В [18] рассматривалась двухслойная жидкость с инерционной границей раздела, но это отличие не является принципиальным.) Кинематическое условие на поверхности такое же, как в теории жидкостей с обычной свободной поверхностью, а динамическое условие выводится из второго закона Ньютона:

$$\rho_s \Delta S (\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}) = \mathbf{n} (p - p_0) \Delta S + \mathbf{g} \rho_s \Delta S,$$

где  $\rho_s$  — поверхностная плотность;  $\Delta S$  — площадь малого элемента свободной поверхности  $S(t, z, x, y) = z - \eta(t, x, y) = 0$ ;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ ;  $p$  — давление в жидкости под свободной поверхностью;  $p_0$  — давление над поверхностью;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения. Поскольку в работах [16–22] рассматривались только потенциальные движения  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ , с использованием интеграла Бернулли динамическое условие после некоторых преобразований можно записать в виде

$$\rho_s \frac{\partial}{\partial n} \left( \Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) + \Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g\eta + g\rho_s (1 + \eta_y^2 + \eta_x^2)^{-1/2} \Big|_{z=\eta} = F(x, t),$$

где плотность жидкости принята равной единице, функция  $F(x, t)$  включает давление  $p_0$  и константу интеграла Бернулли.

В роторных системах, в которых на поверхности центрифугированного слоя жидкости часто наблюдается флотация легких частиц, движение жидкости нельзя считать потенциальным. Заметим также, что учет вязкости необходим для более точного описания динамики жидкости и устойчивости [2] этих технических устройств, включающих разнообразные сепараторы, центрифуги, жидкостные автобалансирующие устройства. В работе [15] предложена модель для описания вихревого движения вязкой жидкости с инерционной поверхностью. В этой модели динамическое условие выводится с учетом вязкости из второго закона Ньютона, который в неинерциальной системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , принимает вид

$$\rho_s \Delta S \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\Omega \times \mathbf{r})^2 - 2\mathbf{v} \times \Omega \right) = p_a \mathbf{n} \Delta S + \sigma_n \Delta S$$

( $\sigma_n = -p\mathbf{n} + 2\mu(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{v} + \mu[\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{v}]$  — вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ ;  $\mu = \rho\nu$  — динамическая вязкость). При больших волновых деформациях поверхности учитывается изменение поверхностной плотности  $\rho_s = \rho_s^0 q^{-1/2}$  ( $q$  — детерминант метрического тензора;  $\rho_s^0$  — поверхностная плотность невозмущенной инерционной поверхности). При этом не учитывается влияние силы тяжести, которая на несколько порядков меньше центробежной силы  $\Omega^2 r \gg g$ . Преобразования динамического условия на поверхности к более удобному виду проведены в [15]. Ниже динамическое условие записывается в преобразованном виде.

В работе [15] рассматривалось распространение гироскопических волн во флотирующей вязкой жидкости, образующей центрифугированный слой на стенке быстровращающегося кругового цилиндра, случай чисто азимутальных волн в [15] не рассматривался. Между тем такое движение жидкости нельзя получить путем предельного перехода  $k \rightarrow 0$  ( $k$  — осевое волновое число) из решения, описывающего волну, распространяющуюся вдоль оси вращения. Распространение азимутальных волн в идеальной жидкости рассматривалось в линейной постановке в работах [23, 24]. В [25] построено приближенное решение путем

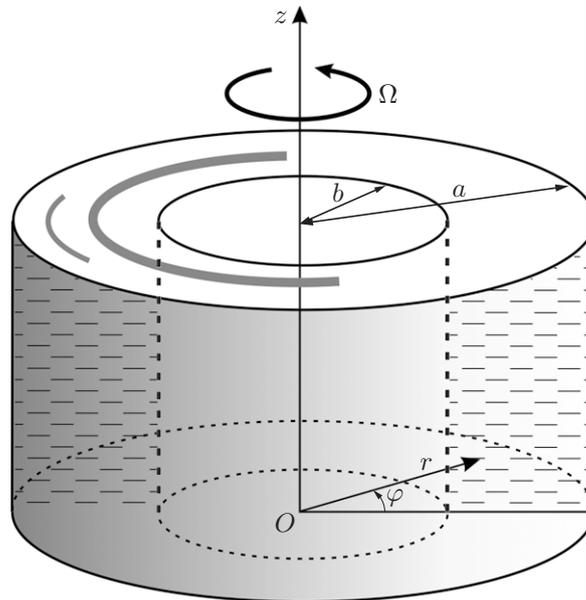


Рис. 1. Схема невозмущенного центрифугированного слоя жидкости с инерционной поверхностью (штриховые линии)

сшивки нелинейного решения — аналога трохоидаальных волн Герстнера на цилиндрической свободной поверхности — с известным линейным решением вдали от поверхности. Как и в [23, 24], в [25] влияние вязкости не учитывалось. Вязкость оказывает двойственное влияние на устойчивость стационарного движения жидкости в центрифугах [12]: в основном она играет стабилизирующую роль, однако в некоторых случаях — дестабилизирующую. Дестабилизирующее влияние при определенных условиях может проявляться при использовании неклассического граничного условия, учитывающего наличие на свободной поверхности малых частиц, имеющих массу [15].

**Основные уравнения.** Рассмотрим несжимаемую вязкую жидкость, образующую в невозмущенном состоянии центрифугированный слой толщиной  $a - b$  на стенке бесконечного цилиндра с круговым сечением радиусом  $a$ , быстро вращающегося вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 1). Влиянием силы тяжести пренебрегаем, полагая, что скорость вращения велика ( $\Omega^2 a/g \gg 1$ ). Введем связанную с твердым цилиндром вращающуюся цилиндрическую систему координат  $Or\varphi z$  с осью  $z$ , коллинеарной вектору угловой скорости  $\Omega$ . На свободной поверхности слоя легкие и мелкие флотирующие частицы образуют тонкую пленку с плотностью вещества  $\rho_s = \text{const}$  в невозмущенном состоянии.

Движение несжимаемой вязкой жидкости в выбранной системе координат описывается уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p - \frac{\rho}{2} (\Omega \times \mathbf{r})^2 \right) + 2\mathbf{v} \times \Omega + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор;  $p$ ,  $\rho$  — давление и плотность жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Обозначим через  $h(t, \varphi, z)$  отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенного положения  $r = b$  при стационарном вращении жидкости как твердого тела. Тогда уравнение возмущенной свободной поверхности принимает вид

$$F(t, r, \varphi, z) = r - b - h(t, \varphi, z) = 0,$$

а кинематическое граничное условие — вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u - \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} - w \frac{\partial h}{\partial z}$$

( $u, v, w$  — радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты вектора скорости  $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ ).

Динамическое граничное условие на свободной инерционной поверхности имеет вид [15]

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s}{\sqrt{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \right) |\nabla F| = \\ = (p_a - p) \nabla F + 2\mu (\nabla F \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu \nabla F \times \text{rot } \mathbf{v}, \end{aligned}$$

где  $q = (1 + 2h/b - (h_\varphi^2 + h^2)/b^2)(1 + h_z^2) - (h_\varphi h_z)^2/b^2$  — детерминант метрического тензора;  $h_\varphi = \partial h / \partial \varphi$ ;  $h_z = \partial h / \partial z$ ;  $\nabla F = (1, -r^{-1} \partial h / \partial \varphi, -\partial h / \partial z)$ ;  $p_a$  — давление в воздушной полости.

Граничными условиями на твердой стенке  $r = a$  являются условия прилипания

$$\mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Линеаризуем уравнения и перейдем к безразмерным переменным  $r' = r/a$ ,  $z' = z/a$ ,  $t' = t\Omega$ ,  $\delta = b/a$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\Omega a)$ ,  $h' = h/a$ ,  $p' = p/(\rho\Omega^2 a^2)$ ,  $P = \rho_s/(\rho a)$ ,  $E = \nu/(\Omega a^2)$  ( $E$  — число Экмана). После линеаризации и обезразмеривания уравнения движения и граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2\mathbf{v} \times \mathbf{n}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad r = 1; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}, \quad r = \delta; \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + 2Ee, \quad e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad \mathbf{n}_z = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{|\boldsymbol{\Omega}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

$$\mathbf{T} = \left[ \delta h + P \left( 2h + \frac{\partial u}{\partial t} - 2v \right), P \left( 2u - \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial t} \right), P \left( -\delta \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right]$$

( $I$  — единичная матрица).

В случае невязкой жидкости граничные условия на инерционной поверхности значительно упрощаются:

$$P \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 2v \right) = -p - (2P + \delta)h, \quad \frac{\partial h}{\partial t} - u = 0, \quad r = \delta. \quad (5)$$

**Азимутальные инерционные волны.** Рассмотрим распространение инфинитезимальных азимутальных гармонических волн  $\sim e^{-irt+im\varphi}$  ( $\tau = \omega/\Omega$ ;  $\omega$  — циклическая (размерная) частота) в центрифугированном слое вязкой однородной жидкости с инерционной свободной поверхностью. Заметим, что с использованием соотношения  $h = iu/\tau$  функцию  $h(t, \varphi)$  можно исключить из граничных условий (4) на свободной поверхности  $r = \delta$ .

Система уравнений (2), которую при рассмотрении азимутальных гармонических волн можно записать в виде

$$-i\tau u - 2v = -\frac{\partial p}{\partial r} + E \left( \Delta u - \frac{2im}{r^2} v - \frac{u}{r^2} \right),$$

$$-i\tau v + 2u = -\frac{im}{r} p + E \left( \Delta v + \frac{2im}{r^2} u - \frac{v}{r^2} \right), \quad (6)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

допускает точное решение [7, 15]

$$u_b = \left( iC_1 \frac{H_m^{(2)}(\kappa r)}{r} + iC_2 \frac{H_m^{(1)}(\kappa r)}{r} \right) e^{-i\tau t + im\varphi},$$

$$v_b = \left[ C_1 \left( m^{-1} \kappa H_{m+1}^{(2)}(\kappa r) - \frac{H_m^{(2)}(\kappa r)}{r} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left( m^{-1} \kappa H_{m+1}^{(1)}(\kappa r) - \frac{H_m^{(1)}(\kappa r)}{r} \right) \right] e^{-i\tau t + im\varphi}, \quad (7)$$

$$p_b = -2m^{-1} (C_1 H_m^{(2)}(\kappa r) + C_2 H_m^{(1)}(\kappa r)) e^{-i\tau t + im\varphi}$$

( $\kappa = \sqrt{-i\tau/E}$ ,  $\text{Im } \kappa > 0$ ). Решение (7) можно проверить прямой подстановкой. Заметим, что система (6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для амплитуды  $\hat{u}(r)$  радиальной скорости  $u = \hat{u}(r) e^{-i\tau t + im\varphi}$ :

$$\left( Er^4 \frac{d^4}{dr^4} + 6Er^3 \frac{d^3}{dr^3} + (-i\tau r^4 - 2Em^2 r^2 + 5Er^2) \frac{d^2}{dr^2} + \right. \\ \left. + (-3i\tau r^3 - Er(2m^2 + 1)) \frac{d}{dr} - i\tau r^2(1 - m^2) + E + Em^2(m^2 - 2) \right) \hat{u} = 0, \quad (8)$$

что упрощает эту проверку.

Решение (7) для малых значений числа Экмана  $E$ , характерных для роторных систем, описывает пограничные слои на твердой стенке и на свободной поверхности, но не охватывает крупномасштабное движение жидкости. Полное решение уравнения (8), очевидно, описывает крупномасштабное движение, однако лучше найти решение другим способом. Нетрудно показать, что в случае азимутальной волны крупномасштабное поле скоростей удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{v}_l = 0. \quad (9)$$

Действительно, из выражения (9) получаем  $\text{rot rot } \mathbf{v}_l = 0$ , следовательно, решение уравнения (9) удовлетворяет уравнениям (5), если выполняется условие

$$\nabla p_l = -i\tau \mathbf{v}_l + 2[\mathbf{v}_l, \mathbf{e}_z]. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) будем искать в форме

$$\mathbf{v}_l = -\text{rot} (\psi(r) e^{im\varphi} \mathbf{e}_z) e^{-i\tau t},$$

решение векторного уравнения (9) сводим к скалярному уравнению для  $\psi(r)$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет следующие решения:

— при  $m = 0$

$$\psi = C_3 \ln r + C_4; \quad (12)$$

— при  $m \neq 0$

$$\psi = -im^{-1} (C_3 r^m + C_4 r^{-m}). \quad (13)$$

Решение (12) не представляет интереса, поскольку при осесимметричном волновом движении не возникают силы и моменты сил, влияющие на устойчивость ротора, содержащего жидкость. Из решения (13) нетрудно получить выражения для компонент поля скоростей

$$u_l = (C_3 r^{m-1} + C_4 r^{-m-1}) e^{-i\tau t + im\varphi}, \quad v_l = (iC_3 r^{m-1} - iC_4 r^{-m-1}) e^{-i\tau t + im\varphi}. \quad (14)$$

Из условия (10) следует выражение для давления

$$p_l = (im^{-1} r^m (2 - \tau) C_3 + im^{-1} r^{-m} (2 + \tau) C_4) e^{-i\tau t + im\varphi}.$$

Полное решение является суперпозицией полученных решений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_l, \quad p = p_b + p_l. \quad (15)$$

Из соотношений (15), учитывая (7), (14) и опуская множитель  $e^{-i\tau t + im\varphi}$ , получаем выражения для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} = & C_1 \frac{i}{r} \left( \frac{(m-1)H_m^{(2)}(\chi r)}{r} - \chi H_{m+1}^{(2)}(\chi r) \right) + \\ & + C_2 \frac{i}{r} \left( \frac{(m-1)H_m^{(1)}(\chi r)}{r} - \chi H_{m+1}^{(1)}(\chi r) \right) + C_3 \frac{m-1}{r^{2-m}} - C_4 \frac{m+1}{r^{m+2}}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} = & C_1 \frac{i}{mr^2} (H_m^{(2)}(\chi r)(m^2 - m - \chi^2 r^2) - \chi r H_{m+1}^{(2)}(\chi r)) + \\ & + C_2 \frac{i}{mr^2} (H_m^{(1)}(\chi r)(m^2 - m - \chi^2 r^2) - \chi r H_{m+1}^{(1)}(\chi r)) + \\ & + iC_3(m-1)r^{m-2} + iC_4(m+1)r^{-m-2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (15) в граничные условия (3), (4), из которых предварительно исключена величина  $h$ , с использованием (7), (14) и выражения для производных  $\partial u/\partial r$ ,  $\partial v/\partial r$  из формул (16), (17) с помощью подстановки  $h = iu/\tau$  и  $w = 0$  находим

$$\begin{aligned} & iC_1 H_m^{(2)}(\chi) + iC_2 H_m^{(1)}(\chi) + C_3 + C_4 = 0, \\ & C_1(m^{-1} \chi H_{m+1}^{(2)}(\chi) - H_m^{(2)}(\chi)) + C_2(m^{-1} \chi H_{m+1}^{(1)}(\chi) - H_m^{(1)}(\chi)) + iC_3 - iC_4 = 0, \\ & C_1 \left[ \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{\tau} - 2iE \frac{m-1}{\delta^2} + P \frac{2\tau^{-1} - \tau - 2}{\delta} \right) H_m^{(2)}(\chi\delta) - 2\chi \left( i \frac{E}{\delta} - \frac{P}{m} \right) H_{m+1}^{(2)}(\chi\delta) \right] + \\ & + C_2 \left[ \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{\tau} - 2iE \frac{m-1}{\delta^2} + P \frac{2\tau^{-1} - \tau - 2}{\delta} \right) H_m^{(1)}(\chi\delta) - 2\chi \left( i \frac{E}{\delta} - \frac{P}{m} \right) H_{m+1}^{(1)}(\chi\delta) \right] + \\ & + C_3 \left[ i \frac{\tau^2 - 2\tau - m}{\tau m} \delta^m - 2E(m-1)\delta^{m-2} + iP(\tau + 2 - 2\tau^{-1})\delta^{m-1} \right] + \\ & + C_4 \left[ -i \frac{\tau^2 + 2\tau + m}{\tau m} \delta^{-m} + 2E(m+1)\delta^{-m-2} + iP(\tau - 2 - 2\tau^{-1})\delta^{-m-1} \right] = 0, \\ & C_1 \left\{ \left[ E \frac{\chi^2 m^{-1} \delta^2 - 2m + 2}{\delta^2} - iP \frac{\tau + 2 + m\tau^{-1}}{\delta} \right] H_m^{(2)}(\chi\delta) - \chi \left( \frac{2E}{\delta} - iP\tau \right) \frac{H_{m+1}^{(2)}(\chi\delta)}{m} \right\} + \\ & + C_2 \left\{ \left[ E \frac{\chi^2 m^{-1} \delta^2 - 2m + 2}{\delta^2} - iP \frac{\tau + 2 + m\tau^{-1}}{\delta} \right] H_m^{(1)}(\chi\delta) - \chi \left( \frac{2E}{\delta} - iP\tau \right) \frac{H_{m+1}^{(1)}(\chi\delta)}{m} \right\} + \\ & + C_3 \left[ \frac{2iE(m-1)}{\delta} - P \left( \tau + 2 + \frac{m}{\tau} \right) \right] \delta^{m-1} + C_4 \left[ \frac{2iE(m+1)}{\delta} + P \left( \tau + 2 - \frac{m}{\tau} \right) \right] \delta^{-m-1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после подстановки решения в граничные условия получаем линейную алгебраическую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $C_1, \dots, C_4$ . Из равенства нулю определителя этой системы следует уравнение для определения безразмерных частот возбуждения азимутальных волн в зависимости от азимутального волнового числа  $m$  и параметров  $\delta$ ,  $P$ ,  $E$  (ввиду громоздкости это уравнение опускается).

Рассмотрим случай, когда вязкость жидкости не учитывается. Из соотношений (6) при  $E = 0$  и уравнения несжимаемости получаем уравнение для радиальной компоненты  $u$  азимутальной гармонической волны

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - m^2)u = 0,$$

которое имеет решение

$$u = (C_1 r^{m-1} + C_2 r^{-m-1}) e^{-i\tau t + im\varphi}. \quad (18)$$

Азимутальная компонента  $v$  и давление  $p$  определяются через величину  $u$ :

$$v = \frac{i}{m} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} + u \right), \quad p = \frac{ir}{m} (2u - i\tau v). \quad (19)$$

Заметим, что найденное решение совпадает с крупномасштабной частью (13) решения задачи об азимутальной волне в вязкой жидкости.

Используя (19), граничное условие для невязкой жидкости на инерционной поверхности (5) преобразуем к выражению, содержащему только радиальную компоненту  $u$ :

$$\frac{\delta}{m} \left( \frac{\delta}{m} \tau - 2P \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left[ \left( \frac{1}{m^2} \tau + \frac{2}{m} + \tau^{-1} \right) \delta - P \left( \tau + \frac{2}{m} - 2\tau^{-1} \right) \right] u = 0. \quad (20)$$

После подстановки решения (18) в выражение (20) и в граничное условие на внутренней поверхности цилиндра  $u|_{r=1} = 0$  из условия разрешимости получаем

$$\tau_j = [(1 + \delta^{2m})\delta + m(1 - \delta^{2m})P]^{-1} [(1 - \delta^{2m})\delta + m(1 + \delta^{2m})P + (-1)^j \sqrt{(m(1 - \delta^{4m}) + (1 - \delta^{2m})^2)\delta^2 + ((1 - 4m^{-1})\delta^{2m} - 2)\delta^{2m+1}P}], \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

В случае классического граничного условия на свободной поверхности невязкой жидкости ( $P = 0$ ) выражение (21) принимает вид

$$\tau_j = \frac{1 - \delta^{2m} + (-1)^j \sqrt{m(1 - \delta^{4m}) + (1 - \delta^{2m})^2}}{1 + \delta^{2m}}. \quad (22)$$

На рис. 2 приведены зависимости  $\tau_c$  от  $\delta$ , полученные по формулам (21), (22) для значений азимутального волнового числа  $m = 1, 5, 10$ . Видно, что влияние инерционной поверхности увеличивается при увеличении азимутального волнового числа.

**Устойчивость азимутальных волн.** Умножим уравнение (2) на комплексно-сопряженный вектор  $\mathbf{v}^* = \hat{\mathbf{v}}^*(r) e^{i\tau^* t - im\varphi}$ , причем циклическую частоту  $\tau = \tau_r + i\tau_i$  будем полагать комплексной. Получаем

$$-i\tau \mathbf{v} \mathbf{v}^* = (\nabla \cdot \sigma) \mathbf{v}^* + 2(\mathbf{v} \times \mathbf{n}_z) \mathbf{v}^* \quad (23)$$

(знак “\*” обозначает комплексное сопряжение и транспонирование для векторных величин). Преобразуем второй член в правой части уравнения (18) к виду

$$(\nabla \cdot \sigma) \mathbf{v}^* = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{v}^*) - 2E e e^*,$$

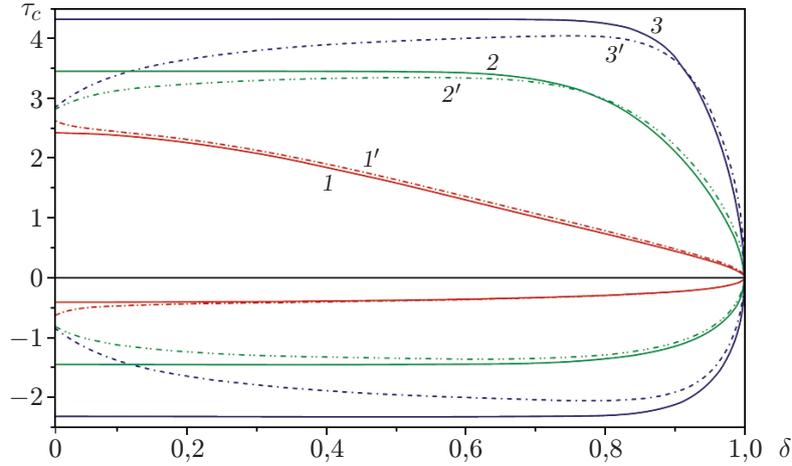


Рис. 2. Зависимости частоты  $\tau_c$  от параметра  $\delta$  при различных значениях азимутального волнового числа и параметра  $P$ :

1-3 —  $P = 0$ , 1'-3' —  $P = 0,2$ ; 1, 1' —  $m = 1$ , 2, 2' —  $m = 5$ , 3, 3' —  $m = 10$

где  $ee^* = e_{rr}e_{rr}^* + e_{r\varphi}e_{r\varphi}^* + e_{\varphi\varphi}e_{\varphi\varphi}^*$ ;  $e_{rr}$ ,  $e_{r\varphi}$ ,  $e_{\varphi\varphi}$  — компоненты тензора скоростей деформаций  $e$ . Проинтегрируем (23) по площади сечения  $S$ , перпендикулярного цилиндрической полости, занимаемой жидкостью:

$$-i\tau \int_S \mathbf{v}\mathbf{v}^* dS = \int_S (\nabla \cdot (\sigma\mathbf{v}^*)) dS - 2 \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^*) \mathbf{n}_z dS - 2E \int_S ee^* dS. \quad (24)$$

Рассматриваемая площадь ограничена двумя кривыми: кривой, образованной свободной поверхностью  $r = \delta$  центрифугированного слоя, и внутренней окружностью жесткого цилиндра  $r = 1$ . Преобразуем первый интеграл в правой части (24) из интеграла по площади в сумму двух интегралов по ограничивающим кривым. Интеграл по окружности  $r = 1$  равен нулю в силу граничного условия прилипания (1). Интеграл по окружности  $r = \delta$  не равен нулю. Запишем (24) в виде

$$-i\tau \int_S \mathbf{v}\mathbf{v}^* dS = \int_{r=\delta} \sigma \mathbf{n}_e \mathbf{v}^* \delta d\varphi - 2 \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^*) \mathbf{n}_z dS - 2E \int_S ee^* dS, \quad (25)$$

где  $\mathbf{n}_e$  — единичный вектор внешней нормали ( $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}$  на свободной поверхности). Заметим, что второй член в правой части (25)

$$\int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^*) \mathbf{n}_z dS = \int_S (uv^* - vu^*) dS = \int_S (uv^* - (uv^*)^*) dS$$

является чисто мнимой величиной.

Проведя простые преобразования, первое слагаемое в правой части (25) представим в виде суммы трех интегралов

$$\begin{aligned} \int_{r=\delta} \sigma \mathbf{n}_e \mathbf{v}^* \delta d\varphi = & -i \int_{r=\delta} [\tau^*(\delta + 2P)hh^* - P\tau\mathbf{v}\mathbf{v}^*] \delta d\varphi - \\ & - 2P \int_{r=\delta} [uv^* - (uv^*)^*] \delta d\varphi + iP \int_{r=\delta} hmv^* \delta d\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Последний член в правой части (26) преобразуем к виду

$$iP \int_{r=\delta} hmv^* \delta d\varphi = -2\pi Pm\delta \frac{\tau^*}{|\tau|^2} uv^*|_{r=\delta}. \quad (27)$$

После некоторых преобразований уравнения (26) с использованием (27) и выделения действительной части получаем выражение

$$\begin{aligned} \tau_i \left[ \left( \int_S \mathbf{v}\mathbf{v}^* dS + 2\pi\delta[(\delta + 2P)h(\delta)h^*(\delta) + P\mathbf{v}(\delta)\mathbf{v}^*(\delta)] \right) + P \frac{2\pi m\delta}{|\tau|^2} \operatorname{Im} [u(\delta)v^*(\delta)] \right] = \\ = -2E \int_S ee^* dS + \tau_r P \frac{2\pi m\delta}{|\tau|^2} \operatorname{Re} [u(\delta)v^*(\delta)], \quad (28) \end{aligned}$$

где  $\tau_r = \operatorname{Re}(\tau)$ ,  $\tau_i = \operatorname{Im}(\tau)$  — действительная и мнимая части безразмерной частоты  $\tau$ .

В случае использования классических граничных условий  $P = 0$  уравнение (28) сводится к соотношению

$$\tau_i \left\{ \int_S \mathbf{v}\mathbf{v}^* dS + 2\pi\delta^2 h(\delta)h^*(\delta) \right\} = -2E \int_S ee^* dS. \quad (29)$$

Правая часть уравнения (29) может принимать только отрицательные значения, а в левой части все члены в фигурных скобках принимают только положительные значения, откуда следует, что  $\tau_i < 0$ . Это означает, что в случае справедливости исходных предположений о малости силы тяжести по сравнению с центробежной силой  $\Omega^2 a/g \gg 1$  и пренебрежимо малом влиянии поверхностного натяжения при отсутствии флотирующих частиц на свободной поверхности твердотельное вращение вязкой однородной несжимаемой жидкости в цилиндрической полости ротора устойчиво при любых значениях параметров  $m$ ,  $\delta$ ,  $E$  относительно малых возмущений в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

В случае жидкости с инерционной поверхностью уравнение (28) вследствие наличия в нем членов, содержащих величины  $u(\delta)v^*(\delta)$ , не позволяет столь же просто, как уравнение (29), определить знак  $\tau_i$ . Однако ниже показано, что это можно сделать, причем без вычисления дисперсионных зависимостей  $\tau = \tau(m, \delta, E, P)$ .

Ограничимся рассмотрением случая малых чисел Экмана (например, для приложений характерны значения  $E = 10^{-6} \div 10^{-4}$ ), которым соответствует большое значение параметра завихренности  $\varkappa$  при всех значениях  $\tau$ , исключая очень малую окрестность нуля. Заметим, что параметр  $P$  также является малым. Не учитывая очень тонкий центрифугированный слой, в котором невозможно выделить пограничные слои вблизи стенки и поверхности (они перекрываются или непосредственно продолжают друг друга), выражение для радиальной скорости  $u$  на свободной поверхности можно записать в виде суммы трех слагаемых

$$u(\delta) = \sum_{j=1}^3 \tilde{u}_j|_{r=\delta}, \quad (30)$$

где  $\tilde{u}_1 = iC_2 r^{-1} H_m^{(1)}(\varkappa r)$ ;  $\tilde{u}_2 = C_3 r^{m-1}$ ;  $\tilde{u}_3 = C_4 r^{-m-1}$ ; общий множитель  $e^{-i\tau t + im\varphi}$  опущен. В формуле (30) пренебрегается членом, описывающим пограничный слой вблизи стенки цилиндра, в силу его экспоненциально малого влияния на радиальную скорость  $u(\delta)$  на свободной поверхности. С использованием  $\tilde{u}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и соотношения  $H_{m+1}^{(1)}(\varkappa\delta)/H_m^{(1)}(\varkappa\delta) \approx -i$ , справедливого при малых значениях  $E$ , запишем выражения для  $v$ ,  $\partial u/\partial r$ ,  $\partial v/\partial r$ ,  $p$  на свободной поверхности  $r = \delta$ :

$$\begin{aligned}
v(\delta) &= iu(\delta) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \tilde{u}_j, & \frac{\partial u}{\partial r} &= \sum_{j=1}^3 \beta_j \tilde{u}_j, \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= i(m-1)\delta^{-1}u(\delta) + \sum_{j=1}^3 \gamma_j \tilde{u}_j, & p(\delta) &= \sum_{j=1}^3 \eta_j \tilde{u}_j, \\
\alpha_1 &= -m^{-1}\varkappa\delta, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= -2i, \\
\beta_1 &= (m-1)\delta^{-1} + i\varkappa, & \beta_2 &= (m-1)\delta^{-1}, & \beta_3 &= (m+1)\delta^{-1}, \\
\gamma_1 &\approx \varkappa(2+m^{-1}) - im^{-1}\varkappa^2\delta, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= -2im\delta^{-1}, \\
\eta_1 &= 2im^{-1}\delta, & \eta_2 &= i(2-\tau)\delta, & \eta_3 &= i(2+\tau)\delta.
\end{aligned} \tag{31}$$

Подставляя (31) в граничные условия на свободной поверхности  $r = \delta$  и в уравнение несжимаемости, получаем

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^3 \eta_j \tilde{u}_j + 2E \sum_{j=1}^3 \beta_j \tilde{u}_j &= i\delta\tau^{-1}u + P\left(i(2\tau^{-1} - \tau - 2)u - 2\sum_{j=1}^3 \alpha_j \tilde{u}_j\right), \\
E\left(2i(m-1)\delta^{-1}u + \sum_{j=1}^3 (\gamma_j - \alpha_j\delta^{-1})\tilde{u}_j\right) &= P\left((2 + m\tau^{-1} + \tau)u - i\tau \sum_{j=1}^3 \alpha_j \tilde{u}_j\right), \\
\sum_{j=1}^3 (\beta_j + im\delta^{-1}\alpha_j)\tilde{u}_j &= (m-1)\delta^{-1}u.
\end{aligned} \tag{32}$$

Рассматривая формулы (32) как систему уравнений относительно  $\tilde{u}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), можно выразить  $\tilde{u}_j$  через  $u$ . Учитывая только старшие члены, выражения для  $\tilde{u}_j$  запишем в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= -\frac{i[\tau^2(3m+1)(m-1) - 2\tau m(m-2) + 6\tau + (m-1)^2]\delta^2 + 2\tau m(m-1)^2}{\tau^2\delta^2[2(m-m\tau+1)\delta^2 + im(m-1)]}Eu + o(E)u, \\
\tilde{u}_2 &= \frac{(-1+i)[(3m^2-2m-1)(m(\tau-2)\delta^2+2) - 2im(3m^3+m^2-3m-1)]}{m\sqrt{2\tau}\delta[2(m-\tau m+1)\delta^2 + im(m-1)]}E^{3/2}u + \\
&\quad + o(E^{3/2})u, \\
\tilde{u}_3 &= \frac{-(m-1)(\tau^2-2\tau-1)\delta^2}{2\tau[2(m-\tau m+1)\delta^2 + im(m-1)]}u + o(1)u.
\end{aligned} \tag{33}$$

Используя (33), азимутальную компоненту скорости  $v(\delta)$  на свободной поверхности можно выразить через  $u(\delta)$ :

$$v(\delta) = i\left(1 + \frac{(m-1)(\tau^2-2\tau-1)\delta^2}{\tau[2(m-\tau m+1)\delta^2 + im(m-1)]}\right)u(\delta) + o(1)u(\delta)$$

и вычислить произведение  $u(\delta)v^*(\delta)$ , входящее в формулу (28):

$$u(\delta)v^*(\delta) \approx -i\left(1 + \frac{(m-1)(\tau^{*2}-2\tau^*-1)\delta^2}{\tau^*[2(m-\tau^*m+1)\delta^2 - im(m-1)]}\right)u(\delta)u^*(\delta). \tag{34}$$

Запишем выражение (34), выделив действительную и мнимую части:

$$u(\delta)v^*(\delta) \approx \frac{1}{\zeta\zeta^*} \{[\xi_1(\tau_r) + \xi_2(\tau_r, \tau_i)] + i[\xi_3(\tau_r) + \xi_4(\tau_r, \tau_i)]\}u(\delta)u^*(\delta),$$

где

$$\begin{aligned}\zeta &= \tau^*[2(m - \tau^*m + 1)\delta^2 - im(m - 1)], \\ \xi_1(\tau_r) &= m(m - 1)(\tau_r^3 - 2\tau_r^2 - \tau_r)\delta^2, \\ \xi_2(\tau_r) &= (m - 1)\delta^2[2(m - 1)\delta^2\tau_i\tau_r^2 + m(m - 1)\tau_i^2\tau_r + 4m\tau_i\tau_r + \\ &\quad + 2(m - 1)\delta^2\tau_i^3 - 2m(m - 1)\tau_i^2 - 2m\delta^2\tau_i], \\ \xi_3(\tau_r) &= -2\delta^4[m(m + 1)\tau_r^4 - (m^2 + 6m + 1)\tau_r^3 + (m + 4)(m + 2)\tau_r^2 + \\ &\quad + 2^{-1}m^2(m - 1)^2\delta^{-4}\tau_r^2 - (m^2 - 1)\tau_r], \\ \xi_4(\tau_r) &= -\delta^2[4m(m + 1)\tau_i^2\tau_r^2 + m(3m^2 - 2m - 1)\tau_i\tau_r^2 - 2(m^2 + 6m + 1)\delta^2\tau_i^2\tau_r + \\ &\quad + 2m(m + 1)\delta^2\tau_i^4 - m(3m^2 - 2m - 1)\tau_i^3 - 2(m^2 - 5m - 4)\delta^2\tau_i^2 + \\ &\quad + m(m - 1)^2(m\delta^{-2}\tau_i^2 + \tau_i)].\end{aligned}$$

Как указывалось выше, течение вязкой жидкости является устойчивым при  $P = 0$ . При увеличении  $P$  могут возникнуть условия для перехода от устойчивого течения, когда все волновые возмущения затухают ( $\tau_i < 0$ ), к неустойчивому, когда некоторые возмущения могут увеличиваться ( $\tau_i > 0$ ). Переход от одного состояния к другому обусловлен пересечением прямой  $\tau_i = 0$  на комплексной плоскости  $\tau = \tau_r + i\tau_i$ . Для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:  $\xi_3 < 0$  и последний член в левой части соотношения (28) по абсолютной величине равен сумме первых трех либо  $\tau_r\xi_1 > 0$  и последний член в правой части (28) по абсолютной величине равен первому члену.

Переменная  $\xi_3$  принимает отрицательные значения в интервале  $0 < \tau_r < \tau_\omega(\delta, m)$  ( $m \neq 1$ ), где  $\tau_\omega(\delta, m)$  — корень уравнения  $\xi_3(\tau_r) = 0$ . Переменная  $\tau_r\xi_1$  принимает положительные значения при  $\tau_r < 1 - \sqrt{2}$  и  $\tau_r > 1 + \sqrt{2}$  ( $m \neq 1$ ). Таким образом, неустойчивость может развиваться в диапазонах частот  $0 < \tau_r < \tau_\omega(\delta, m)$ ,  $\tau_r < 1 - \sqrt{2}$  и  $\tau_r > 1 + \sqrt{2}$ , но лишь для азимутальных мод при  $m \geq 2$ . Для инженерных приложений очень важно, что в случае  $m = 1$  азимутальная мода остается устойчивой при любом значении  $P$ . В потере устойчивости самого ротора, частично заполненного вязкой жидкостью, основную роль играет действующая на стенки ротора гидродинамическая сила, обусловленная первой азимутальной модой  $m = 1$  [2].

**Заключение.** В работе выведены уравнения, описывающие азимутальные волновые движения вращающейся вязкой жидкости, частично заполняющей полый круговой цилиндрический ротор и в режиме стационарного вращения образующей центрифугированный слой на внутренней поверхности. Получено и исследовано дисперсионное уравнение для азимутальных волн во флотирующей жидкости без учета вязкости. Показано, что инерционная свободная поверхность центрифугированного слоя вязкой жидкости может оказывать дестабилизирующее влияние на моды с азимутальным волновым числом  $m \geq 2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Derendyaev N. V., Vostroukhov A. V., Soldatov I. N. Stability and Andronov — Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2006. V. 73, N 4. P. 580–589.
2. Дерендяев Н. В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2014.
3. Ерофеев В. И., Солдатов И. Н. Акустические волны во вращающемся идеальном газе // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 5. С. 642–647.
4. Bogovalov S. V., Kislov V. A., Tronin I. V. Waves in strong centrifugal fields: dissipative gas // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 2019. V. 33, N 1. P. 21–35.

5. **Гринспен Х.** Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
6. **Копачевский Н. Д.** Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. М.: Наука, 1989.
7. **Солдатов И. Н.** Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 15–20.
8. **Kobine J. J.** Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder // J. Fluid Mech. 1995. V. 303. P. 233–252.
9. **Manasseh R.** Nonlinear behaviour of contained inertia waves // J. Fluid Mech. 1996. V. 315. P. 151–173.
10. **Hosoi A. E., Mahadevan L.** Axial instability of a free-surface front in a partially filled horizontal rotating cylinder // Phys. Fluids. 1999. V. 315, N 1. P. 97–106.
11. **Ashmore J., Hosoi A. E., Stone H. A.** The effect of surface tension on rimming flows in a partially filled rotating cylinder // J. Fluid Mech. 2003. V. 479. P. 65–98.
12. **Coppola G., Semeraro O.** Interfacial instability of two rotating viscous immiscible fluids in a cylinder // Phys. Fluids. 2011. V. 23. 064105.
13. **Kozlov N. V., Kozlova A. N., Shuvalova D. A.** Dynamics of immiscible liquids in a rotating horizontal cylinder // Phys. Fluids. 2016. V. 28. 112102.
14. **Wen Yang, Delbende I., Fraigneau Y., Witkowski L. M.** Axisymmetric rotating flow with free surface in a cylindrical tank // J. Fluid Mech. 2019. V. 861. P. 796–814.
15. **Солдатов И. Н., Ключева Н. В.** Волны в центрифугированном слое вращающейся вязкой жидкости с инерционной поверхностью // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 6. С. 3–17.
16. **Petters A. S.** The effect of a floating mat on water waves // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3, N 4. P. 319–354.
17. **Mandal B. N.** Water waves generated by disturbance at an inertial surface // Appl. Sci. Res. 1988. V. 5, N 1. P. 67–73.
18. **Dhillon H., Mandal B. N.** Cauchy — Poisson problem for a two-layer fluid with an inertial surface // J. Marine Sci. Appl. 2013. V. 12. P. 21–30.
19. **Габов С. А.** О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. № 10. С. 1507–1519.
20. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1990. Т. 28. С. 3–86.
21. **Габов С. А., Тверской М. Б.** О вычислении параметров установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 2. С. 109–118.
22. **Логинов Б. В., Карпова С. А.** Вычисление периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости // Вестн. Сам. гос. ун-та. 1997. № 3. С. 69–80.
23. **Philips O. M.** Centrifugal waves // J. Fluid Mech. 1960. V. 7, N 3. P. 340–352.
24. **Сунь Цао.** О волнах на поверхности жидкости под действием центробежной силы // ПМТФ. 1960. № 3. С. 90–96.
25. **Абрашкин А. А.** Нелинейные азимутальные волны в центрифуге // ПМТФ. 1984. № 3. С. 86–89.

*Поступила в редакцию 11/IX 2019 г.,  
после доработки — 13/VII 2020 г.  
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.*