

МОДЕЛЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТЕКУЧЕСТИ

Ю. Н. Работнов

(Москва)

Изучение зависимостей между напряжениями и деформациями у металлов при высоких скоростях деформирования ведется уже давно, однако, до сих пор не существует достаточно надежной и общепринятой теории, которая бы описывала поведение материала в этих условиях. При исследовании распространения упруго-пластических волн некоторые авторы исходят из предположения о существовании динамической диаграммы деформирования, мало чувствительной к изменению скорости в определенном диапазоне. Другие авторы вводят в определяющие уравнения производные по времени от напряжений и деформаций. Трудности нахождения истинных закономерностей динамического деформирования металлов заключаются в том, что экспериментальные данные дают основания лишь для косвенных суждений, так как постановка чистого эксперимента оказывается, как правило, невозможной. Практически при любой схеме динамического эксперимента на опыте реализуется некоторое сложное явление, которое может быть проанализировано только в том случае, если определяющие уравнения предполагаются известными. Таким образом, эксперимент может в лучшем случае подтвердить или опровергнуть некоторые заранее принятые предположения.

Многочисленные экспериментальные работы посвящены определению тех или иных механических характеристик материала — предела прочности, предела текучести и других в зависимости от скорости деформации. Но указание величины скорости деформации скорее характеризует диапазон условий, в которых определялась та или иная характеристика, нежели фиксирует значение определяющего параметра, которым скорость может и не быть. Поэтому при разработке вопросов динамики упруго-пластических сред исследователи неизбежно пользуются некоторыми простейшими моделями, допускающими формулировку и решение определенных механических задач.

1. Характерной особенностью поведения малоуглеродистых сталей в условиях динамики является так называемое запаздывание текучести. Если приложить к образцу напряжение  $\sigma$ , превышающее статический предел текучести, то, как оказывается, деформация образца будет упругой в течение некоторого времени  $\tau$  ( $\sigma$ ), называемого временем запаздывания. Существуют физические теории (Коттрелл), объясняющие этот эффект тем, что в углеродистой стали дислокации окружаются облаком растворенных атомов и при данном напряжении  $\sigma$  нужно некоторое время для того, чтобы дислокации вырвались из облака [1-3]. Согласно этим теориям, условие наступления текучести может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^t \varphi(\sigma, T) d\tau = 1 \quad (1.1)$$

Пока условие (1.1) еще не выполнено, деформация связана с напряжением по закону Гука, в момент выполнения этого условия наступает текучесть. Полагая  $\sigma = \text{const}$  в (1.1),  $t = \tau$ , получим величину времени запаздывания  $\tau$ :

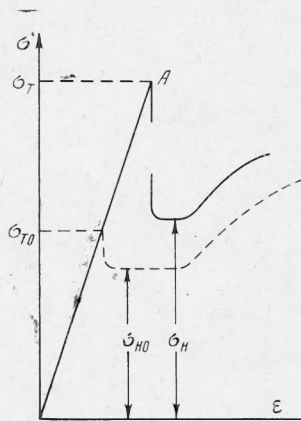
$$\tau = \frac{\tau_0}{\varphi(\sigma, T)} \quad (1.2)$$

Опыты по определению времени запаздывания в зависимости от действующего напряжения позволяют найти функцию  $\varphi(\sigma, T)$ .

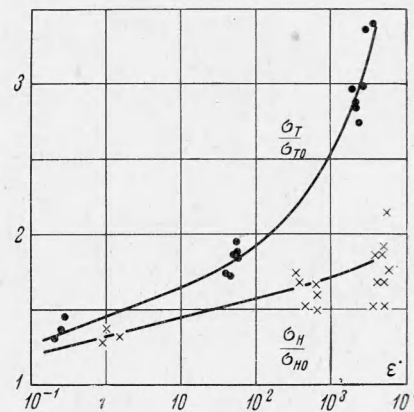
Другая схема опыта заключается в том, что растяжение или сжатие образца производится с постоянной скоростью деформации  $\dot{\varepsilon}$ . В упругой области при этом напряжение также изменяется с постоянной скоростью  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$  и закон Гука остается справедливым до тех пор, пока напряжение не достигнет величины  $\sigma_T$ , зависящей от скорости нагружения и называемой верхним пределом текучести. По формуле (1.1) получаем

$$\sigma_T = \Phi^{-1}(\dot{\sigma}, \tau_0), \quad \Phi(\xi) = \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \quad (1.3)$$

Принцип суммирования времен запаздывания, лежащий в основе уравнения (1.1), неоднократно подвергался экспериментальной проверке. Так, в работе [4] сравнивалось определение времен запаздывания при двух описанных выше схемах испытания и при испытании нагрузкой, меняющейся во времени по синусоидальному закону.



Фиг. 1



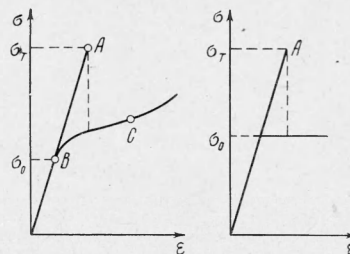
Фиг. 2

Диаграмма растяжения углеродистой стали при постоянной высокой скорости деформирования схематически изображена на фиг. 1, здесь же пунктиром показана статическая диаграмма с зубом текучести. Построение динамической диаграммы вполне надежно в области упругих деформаций и существующие методы [5,6] позволяют действительно определить динамический верхний предел текучести в зависимости от скорости нагружения, которая может быть удержана постоянной. Регистрация падающего от точки A участка диаграммы фактически невозможна, в пластической области при существующих методах испытаний скорость деформации оказывается переменной и отличной от скорости деформации в упругой области, поэтому начальный участок кривой пластического деформирования надежным считаться не может.

Более того, пластическая деформация малоуглеродистой стали на площадке текучести, как известно, в высокой степени неравномерна, значительные пластические деформации локализуются при этом в относительно небольших объемах и отнесение пластического сопротивления к средней скорости деформации на выбранной базе измерения может носить лишь условный характер. Тем не менее, можно сделать некоторое заключение о характере зависимости нижнего предела текучести от скорости деформации. Эта зависимость оказывается значительно более слабой, чем для верхнего предела текучести. На фиг. 2 по данным Ю. А. Беляева построены графики зависимости отношений  $\sigma_T / \sigma_{T0}$  и  $\sigma_H / \sigma_{H0}$  от скорости деформации для стали 3 при комнатной температуре. Следует заметить, что если  $\sigma_H$  действительно может рассматриваться как функция скорости деформации (если сделать некоторые предположения о структуре определяющих уравнений в пластической области), величина  $\sigma_T$  зависит от истории нагружения в упругой области и может рассматриваться как функция скорости только при испытаниях с постоянной скоростью. Поэтому сравнение скоростной зависимости  $\sigma_T$  и  $\sigma_H$  является скорее качественным. Аналогичные данные о более слабой зависимости  $\sigma_H$  от

скорости приводятся в работе [7]. Отмеченный факт дает основание для построения следующей модели, приближенно описывающей динамические свойства материалов типа малоуглеродистой стали. Предполагается, что существует не зависящая от скорости диаграмма деформирования  $\sigma = f(\epsilon)$  (фиг. 3), за которую в первом приближении можно принять статическую диаграмму растяжения (без зуба текучести). Эта диаграмма имеет упругий участок  $\sigma < \sigma_0$ . При динамическом нагружении предел текучести повышается в соответствии с условием (1.1) до величины  $\sigma_T$  (точка А). Если деформация в точке А удерживается постоянной, после достижения точки А напряжение внезапно падает до величины, соответствующей этой деформации на статической кривой  $\sigma = f(\epsilon_A)$ . Если в точке упругого участка, бесконечно близкой к точке А слева, произведена разгрузка, то при повторном деформировании запаздывания уже не будет и зависимость  $\sigma - \epsilon$  следует статической диаграмме.

Термин «статическая диаграмма» в отношении зависимости  $\sigma = f(\epsilon)$  употреблен здесь в условном смысле. В действительности, эта зависимость должна содержать в себе скорость. Относительно слабый характер этой зависимости позволяет принимать ее соответствующей средней скорости процесса, например, если скорости достаточно велики, как это бывает в волновых задачах, пользоваться «динамической» диаграммой подобно тому, как это делается в теории распространения упруго-пластических волн Кармана — Рахматуллина. Для задач неволнового характера можно сделать следующий шаг и принять за диаграмму  $\sigma = f(\epsilon)$  диаграмму идеальной пластичности, как это показано на фиг. 3, б. Тогда  $\sigma_H = \text{const}$ . Если имеются данные о зависимости нижнего предела текучести от скорости, то можно представить себе следующую процедуру расчета. Сначала производится расчет при условии, что  $\sigma_0$  равно статическому пределу текучести, находится распределение скоростей и по средним значениям скоростей находится уточненное значение  $\sigma_0$ . Отсутствие надежных экспериментальных данных о скоростной зависимости  $\sigma_0$  и принципиальная трудность получения таких данных заставляет рекомендовать принимать в качестве  $\sigma_0$  статический предел текучести.



Фиг. 3

2. Описанная выше схема нуждается в уточнениях, для внесения которых не располагаем экспериментальными данными, однако, эти уточнения необходимо оговорить.

1. После того как дислокации вырвались из облаков растворенных атомов, последние начинают мигрировать к дислокациям в их новых положениях и через некоторое время вокруг них вновь образуется блокирующая атмосфера. При малых нагрузках и больших временах запаздывания этот эффект должен учитываться [2]. По-видимому, он будет особенно существен тогда, когда изучается запаздывание текучести при вибрационных нагрузках.

2. До настоящего времени отсутствуют какие-либо данные о запаздывании текучести в условиях сложного напряженного состояния. Все экспериментальные работы относятся либо к сжатию (большая часть), либо к растяжению. Однако по литературным данным нельзя даже сделать заключения о том, что характеристики запаздывания при растяжении и сжатии одинаковы, так как систематические данные по одному и тому же материалу для этих двух видов испытаний нигде не приводятся. Соображения, положенные в основу дислокационных теорий запаздывания, позволяют предположить, что в монокристалле время запаздывания, так же как и величина пластической деформации, определяется касательным напряжением в соответствующей системе скольжения. Поэтому естественно считать, что при сложном напряженном состоянии сохраняет силу уравнение (1.1), в котором величина  $\sigma$  заменяется наибольшим касательным напряжением  $\tau_{\max}$  или же интенсивностью напряжений  $\sigma_i$ . Из этой гипотезы следует, в частности, что характеристики запаздывания при растяжении и сжатии одинаковы.

3. Остается неясным вопрос о том, как нужно применять уравнение (1.1) для знакопеременных нагрузок. Отправляясь от схемы Котрелла, можно предположить, что частичное освобождение дислокаций из облаков растворенных атомов в одном направлении не облегчает их движения в противоположном направлении. Поэтому будем считать, что условие (1.1) справедливо лишь для напряжений одного знака, при реверсировании нагрузки время запаздывания отсчитывается от того момента, когда напряжение изменило знак и функция  $\varphi$  зависит от абсолютной величины напряжения  $\varphi = \varphi(|\sigma|, T)$ .

Некоторыми авторами предлагались из теоретических соображений разные выражения для функции  $\varphi(\sigma, T)$ , фигурирующей в условии (1.1), как-то:

$$\varphi = (|\sigma| / \sigma_*)^n \quad (2.1)$$

$$\varphi = \begin{cases} a (|\sigma| / \sigma_0 - 1)^n & (\sigma > \sigma_0) \\ 0 & (\sigma < \sigma_0) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi = K \exp(|\sigma| / \sigma_{**}) \quad (2.3)$$

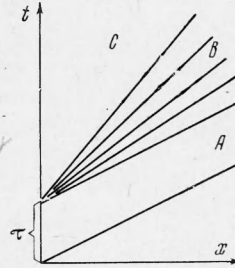
Соотношение (2.1) было получено Йокобори [8] и Кемпбеллом [9] из уравнения Котрелла. Наличие константы  $\tau_0$  в уравнении (1.1) позволяет выбрать  $\sigma_*$  по произволу, например положить  $\sigma_* = \sigma_0$ . Очевидно, что уравнение (2.1) не пригодно для напряжений, близких к  $\sigma_0$ , так как оно дает конечное время запаздывания при  $\sigma = \sigma_0$ , однако это обстоятельство не препятствует практическому использованию уравнения. Уравнение (2.3) (см., например, [9]) также не применимо для малых напряжений, свободным от внутренних противоречий оказывается только уравнение (2.2). Фигурирующие в (2.1) — (2.3) коэффициенты являются функциями температуры. Для показателя  $n$  в (2.1) была получена теоретическая зависимость, а именно  $n = \text{const } T^{-1}$ , однако эта зависимость справедлива лишь для определенного диапазона температур [10]. Будем смотреть на различные формулы, определяющие функцию  $\varphi(\sigma, T)$ , как на эмпирические соотношения, аппроксимирующие опытные данные в определенном диапазоне параметров. При этом оказывается невозможным отдать предпочтение, например, степенной зависимости (2.1) перед экспоненциальной. При значительном разбросе опытных точек та и другая аппроксимации оказываются равноценными. Положение оказывается совершенно аналогичным тому, которое встречается в теории ползучести, где различные аппроксимации закона ползучести дают примерно одинаковые результаты и при выборе формы определяющего закона следует руководствоваться соображениями удобства. Из этих соображений в дальнейшем будем пользоваться степенным законом запаздывания (2.1).

Следует заметить, что фактическое определение констант  $\tau_0$  и  $n$  (или  $\sigma_*$  при фиксированном  $\tau_0$ ) требует проведения обширной программы тщательно поставленных экспериментов. Эти константы зависят в большой степени от химического состава, величины зерна и других факторов. Состояние вопроса об определении этих констант изложено в работе [10].

3. Выясним картину распространения упруго-пластических волн в среде с запаздыванием. Предположим, что концу бесконечно длинного стержня сообщена скорость  $v$ . Тогда по стержню распространяется прямая упругая волна с напряжением  $\sigma = Ev / c$ , где  $c$  — скорость распространения продольных волн. Этому напряжению соответствует время запаздывания  $\tau$ , определяемое по формуле (1.2). Когда передний фронт волны пройдет расстояние  $ct$ , на конце напряжение упадет до величины  $\sigma_0$ , при отсутствии упрочнения критическая скорость равна нулю и на конце



произойдет отрыв. Если диаграмма  $\sigma = f(\epsilon)$  соответствует упрочняющему материалу, картина распространения волн оказывается следующей (фиг. 4). В области *A* распространяется прямая упругая волна, несущая напряжение  $\sigma_T$  на длине  $ct$ , за ней идет волна разгрузки, которая также является упругой волной, так как расстояние ее от переднего фронта постоянно и равно  $ct$ . В области *B* возникает центрированный пучок упруго-пластических волн, в области *C* распространяются волны с постоянной скоростью, при этом скорости движения частиц постоянны и равны  $v$ , деформация  $\epsilon'$  и напряжение  $\sigma'$  также постоянны и определяются обычным способом по диаграмме  $\sigma = f(\epsilon)$  в зависимости от скорости  $v$  (точка *C* на диаграмме). Напряжения и деформации на характеристиках центрированного пучка соответствуют участку *BC* диаграммы  $\sigma = f(\epsilon)$  и за фронтом разгрузки (граница областей *A* и *B*) напряжение равно статическому пределу текучести  $\sigma_0$ . Легко убедиться в том, что всякое предположение о появлении неупругой деформации за фронтом разгрузки приводит к невыполнению кинематических и динамических условий. Таким образом, картина распространения упруго-пластических волн при наличии запаздывания оказывается такой же, как и без запаздывания, только со сдвигом по времени на величину  $\tau$ . Для стержня конечной длины отражение головной волны, несущей напряжение верхнего предела текучести, может оказать существенное влияние на процесс распространения упруго-пластических волн.



Фиг. 4

Предположение о независимости диаграммы  $\sigma = f(\epsilon)$  от скорости при рассмотрении волновых задач не обязательно. Можно принять, например, что после достижения верхнего предела текучести поведение материала описывается некоторым определяющим уравнением, содержащим производные  $\sigma'$  и  $\epsilon'$ , как это сделано в работе [11]. Тогда после разгрузки, следующей за волной запаздывания, распространение пластических волн будет описываться по схеме Соколовского — Мальверна.

4. Рассмотрим задачу о действии равномерного давления, внезапно созданного внутри сферической полости в неограниченном теле, материал которого будем считать идеально упруго-пластическим с запаздыванием. Если предположить материал несжимаемым, упругие волны в нем распространяться не будут, распространяется лишь волна сильного разрыва, отделяющая пластическую область от упругой. Положим  $\xi = r/a$ , где  $r$  — текущий радиус,  $a$  — радиус сферической полости. Уравнение движения будет следующим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} - \frac{2(\sigma_\theta - \sigma_r)}{\xi} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

Из уравнения несжимаемости  $(\partial u / \partial \xi + 2u / \xi) = 0$  следует:

$$u = a \frac{w}{\xi^2}, \quad \epsilon_\theta = \frac{w}{\xi^3}, \quad \epsilon_r = -\frac{2w}{\xi^3}, \quad w = w(t) \quad (4.2)$$

Здесь безразмерное время  $t$  отнесено к характерному времени  $t_* = a/c$ ,  $c$  — скорость волны сдвига.

В упругой области по закону Гука

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\mu (\epsilon_\theta - \epsilon_r) = 6\mu w / \xi^3$$

Внося это выражение, а также выражение для  $u$  в уравнение движения (4.1) и интегрируя его при условии  $\sigma_r(\infty) = 0$ , получим

$$\sigma_r = -\mu \left( \frac{4w}{\xi^3} + \frac{w''}{\xi} \right) \quad (4.3)$$

При  $t < t_1$  вся среда находится в упругом состоянии, уравнение движения получается из (4.3), если принять при  $\xi = 1$ ,  $\sigma_r = -q(t)$ , таким образом:

$$w'' + 4w = q/\mu \quad (4.4)$$

Обозначив через  $w_1(t)$  интеграл уравнения (4.4), удовлетворяющий нулевым начальным условиям, находим  $w = w_1(t)$  ( $t \leq t_1$ ).

В пластическом состоянии выполняется условие пластичности  $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0$ . Внося это выражение в уравнение движения и интегрируя его с учетом граничного условия  $\sigma_r(1) = -q(t)$ , находим

$$\sigma_r = 2\sigma_0 \ln \xi - \mu w'' (1 - \xi) / \xi - q \quad (4.5)$$

Обозначим радиус раздела упругой и пластической области через  $x$ . Вследствие условия несжимаемости скорость на границе раздела непрерывна, поэтому радиальное напряжение  $\sigma_r$  также непрерывно, из (4.3) и (4.5) следует:

$$w'' + 4 \frac{w}{x^3} + \frac{2\sigma_0}{\mu} \ln x = \frac{q}{\mu} \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) содержит две неизвестные функции  $w(t)$  и  $x(t)$ . Второе соотношение между ними получается из условия (1.1), которое преобразуется в равенство на границе раздела. При  $\xi = x$  в упругой области  $\sigma_\theta - \sigma_r = 6\mu w/x$ , следовательно, условие (1.1) принимает вид

$$\int_0^t \left( \frac{6\mu w}{\sigma_0 x^3} \right)^n dt = \frac{\tau_0 c}{a} = \tau_* \quad (4.7)$$

Вводим теперь следующие обозначения:

$$y = \frac{6\mu w}{\sigma_0}, \quad x^3 = z, \quad p = \frac{3q}{\sigma_0}$$

Окончательно система уравнений переписется следующим образом:

$$y'' + \frac{4y}{z} + 4 \ln z = 2p, \quad z^n = 1 + \frac{1}{\tau_*} \int_{t_1}^t y^n dt \quad (4.8)$$

В упругом состоянии при  $t < t_1$  в первом уравнении нужно положить  $z = 1$ , тогда решение его при начальном условии  $y(0) = y'(0) = 0$  определяется функцией  $y_1$ . Условие начала текучести будет

$$1 = \frac{1}{\tau_*} \int_0^{t_1} y_1^n dt \quad (4.9)$$

При  $t > t_1$  функции  $y(t)$  и  $z(t)$  определяются как результат решения системы (4.8), второе уравнение этой системы получено из (4.7) с учетом (4.9). Начальные условия при этом будут следующие: при  $t = t_1$ ,  $z = 1$ ,  $y = y_1(t_1)$ ,  $y' = y_1'(t_1)$ . Очевидно, что фактическое получение решения возможно только в результате применения численных методов.

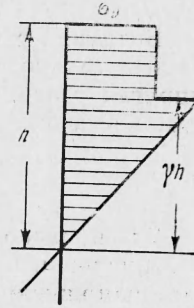
5. Обратимся теперь к задаче о чистом изгибе стержня призматического сечения из идеально упруго-пластического материала с запаздыванием

текучести. Для простоты примем сечение прямоугольным с высотой  $2h$  и шириной  $b$ . В упругом состоянии распределение напряжений по сечению линейно, если напряжение в крайней точке превышает статический предел текучести  $\sigma_0$ , по истечении времени  $t_1$  это напряжение падает до величины  $\sigma_0$ , и граница разгрузки движется по направлению к нейтральной оси. Эпюра распределения напряжений по сечению изображена на фиг. 5. Полагая  $\varepsilon = \kappa y / h$ , найдем следующее соотношение, связывающее изгибающий момент, кривизну и параметр  $\gamma$ , определяющий положение упруго-пластической границы

$$M = bh^2\sigma_0 \left[ \frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_0} \gamma^3 \kappa + 1 - \gamma^2 \right] \quad (5.1)$$

На границе упругой области  $\sigma = E\kappa\gamma$ , подставляя в условие (1.1) при степенном законе запаздывания, получаем

$$\int_0^t \left( \frac{E\kappa\gamma}{\sigma_0} \right)^n dt = \tau_0$$



Фиг. 5

Это условие относится к фиксированной точке сечения, поэтому в нем нужно считать  $\gamma$  постоянным. Перепишем его следующим образом:

$$\gamma^n \int_0^t \kappa^n dt = \tau_1, \quad \tau_1 = \left( \frac{\sigma_0}{E} \right)^n \tau_0 \quad (5.2)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$bh^2\sigma_0 = M_T, \quad M / M_T = m, \quad 2E / 3\sigma_0 = p$$

Тогда уравнение (5.1) запишется так:

$$m = p\gamma^3\kappa + 1 - \gamma^2 \quad (5.3)$$

*a. Деформирование с постоянной скоростью.* Положим  $\kappa = \alpha t$ . Из условия (5.2) получаем

$$\gamma^n \alpha^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \tau_1 \quad (5.4)$$

Полагая  $\gamma = 1$ , в (5.4) находим из него время  $t_1$ , соответствующее началу текучести в крайней точке. При этом кривизна

$$\kappa_1 = [(n+1)\alpha\tau_1]^{1/(n+1)}$$

Исключая из (5.4) время, получим

$$\gamma = \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{(n+1)/n} \quad (5.5)$$

Внося найденное выражение  $\gamma$  в формулу (5.3), находим соотношение между изгибающим моментом и кривизной

$$m = m_1 \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{2+3/n} + 1 - \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{2+2/n} \quad (5.6)$$

Здесь  $m_1 = p\kappa_1$  — максимальный изгибающий момент при  $t = t_1$ . Так как  $n$  велико, эту формулу можно заменить следующей приближенной:

$$m = (m_1 - 1) \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^2 + 1$$

Здесь показатель  $n$  фигурирует только в выражении величины  $m_1$ , пропорциональной  $\alpha^{1/(n+1)}$ .

б. Изгиб под действием постоянного момента. Полагая  $m = \text{const}$ , из (5.3) получаем

$$\kappa = \frac{m-1+\gamma^2}{p\gamma^3} \quad (5.7)$$

Величина  $\gamma$  убывает от  $\gamma = 1$  до  $\gamma = \gamma_1$ , граница раздела может двигаться только по направлению к нейтральной оси, иначе происходит упругая разгрузка, следовательно, остановка движения происходит тогда, когда  $d\kappa/d\gamma = 0$ . Из (5.7) находим

$$\frac{d\kappa}{d\gamma} = \frac{1}{p\gamma^4} (3 - 3m - \gamma^2)$$

Эта производная отрицательна при  $\gamma = 1$ , если  $m > 2/3$ , только при этом условии начинается движение. Действительно, при  $m = 2/3$  наибольшее напряжение равно  $\sigma_0$ . Требуя, чтобы при  $\gamma = \gamma_1$  было  $d\kappa/d\gamma = 0$ , найдем

$$\gamma_1 = \sqrt{3(1-m)} \quad (5.8)$$

Дифференцируя условие запаздывания (5.2) и заменяя в полученном соотношении величину  $\kappa$  ее выражением (5.7), получим следующее дифференциальное уравнение для  $\gamma(t)$ :

$$\left(\frac{m-1+\gamma^2}{p\gamma^3}\right)^n = -n\tau_1\dot{\gamma}\gamma^{-(n+1)}$$

Отсюда время движения границы пластичности

$$t = n \left(\frac{3}{2}\right)^n \tau_0 \int_{\gamma_1}^{\gamma} \frac{\gamma^{2n-1} d\gamma}{(m-1+\gamma^2)^n} \quad (5.9)$$

Если  $2/3 < m \leq 1$ , нижний предел интеграла  $\gamma_1$  определяется соотношением (5.8). При  $m > 1$  приложенный момент больше предельного статического момента, и в формуле (5.9) нужно принять  $\gamma_1 = 0$ . Тогда время, в течение которого стержень сохраняет несущую способность, будет определяться следующим образом. Время  $t_1$  до начала текучести найдется из условия (5.2), в котором нужно принять  $\kappa = \text{const} = m/p$ . Получаем  $t_1 = (3/2)^n \tau_0 m^{-n}$ . Потеря несущей способности произойдет в момент  $t_1 + t_2$ , причем  $t_2$  определяется формулой (5.9). Как легко убедиться

$$\frac{1}{2} < \frac{t_2}{t_1} < \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m-1}\right)^n \quad (6.0)$$

и с увеличением  $m$  отношение  $t_2/t_1$  стремится к  $1/2$ .

6. Анализ последнего примера убеждает нас в том, что время сохранения несущей способности не зависит от модуля упругости. Переходя к пределу при  $E \rightarrow \infty$ , получаем схему жестко-пластического тела с запаздыванием текучести, деформации которого равны нулю до момента исчерпания несущей способности. Однако, рассматривая жесткое тело как упругое со сколь угодно большим модулем упругости, естественно предположить, что в жестком состоянии распределение напряжений будет таким же, как в упругом теле, так как при заданных нагрузках оно не зависит от модуля. При этом в уравнениях движения сохраняются только те инерционные члены, которые соответствуют движению тела как целого. В обычном жестко-пластическом анализе вопрос о распределении на-



пряжений в частях тела, предполагаемых жесткими, не представляет интереса, поскольку расположение пластических зон определяется возможностью последующего движения. При учете запаздывания существенную роль играет история напряженного состояния, начиная с момента приложения нагрузки.

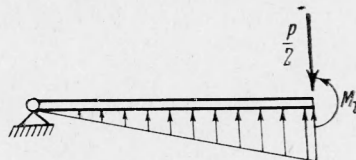
Проиллюстрируем эти соображения на простом примере жестко-пластической балки с запаздыванием текучести. Будем записывать условие наступления текучести при изгибе следующим образом:

$$\int_0^t m^n dt = \tau_2 \quad (6.1)$$

Согласно предыдущему, это условие является условием текучести в крайней зоне сечения балки. При этом несущая способность будет исчерпана только тогда, когда сечение представляет собой идеальный двутавр. Тем не менее, сохраним условие (6.1) в качестве приближенного условия для любой формы поперечного сечения, считая, по-прежнему,  $m = M / M_T$ , где  $M_T$  — предельный момент, и  $\tau_2 = \tau_0 (\sigma_0 W / M_T)^n$ ,  $W$  — момент сопротивления сечения.

Рассмотрим балку длиной  $2l$ , расположенную на двух опорах и нагруженную посередине силой  $P$ , изменяющейся со временем по линейному закону. Положим  $P l / 2 M_T = p = p' t$  и будем записывать условие (6.1) в виде

$$\int_0^p m^n dp = p' t_2 \quad (6.2)$$



Фиг. 6

Пока балка остается жесткой наибольший изгибающий момент в среднем сечении  $m = p$ . При  $p = p_1$  в этом сечении образуется пластический шарнир. Из (6.2) следует:

$$p_1^{n+1} = (n + 1) p' t_2 \quad (6.3)$$

После образования пластического шарнира каждая половина балки будет вращаться около опоры. На фиг. 6 изображены действующие на нее силы, включая распределенные по линейному закону силы инерции. Пологая  $\xi = x / l$ , найдем следующее выражение для изгибающего момента:

$$m = -1/2 [(p - 3) \xi - (p - 1) \xi^3] \quad (6.4)$$

Обозначим через  $p_0(\xi)$  значение параметра нагрузки, при котором изгибающий момент в сечении с координатой  $\xi$  обращается в нуль. При  $p > p_0$  момент в этом сечении отрицателен и при исследовании возможности запаздывания текучести следует учитывать только ту часть истории, которая начинается от момента, соответствующего  $p = p_0$ . Условие (6.2) после подстановки выражения (6.4) и учета (6.3) дает

$$\int_{p_0}^p \left[ p \frac{\xi - \xi^3}{2} - \frac{3\xi - \xi^3}{2} \right]^n dp = \frac{P_1^{n+1}}{n + 1}$$

Отсюда

$$p = \frac{3 - \xi^2}{1 - \xi^2} + p_1 \left[ \frac{\xi(1 - \xi^2)}{2} \right]^{-n / (n+1)} \quad (6.5)$$

При больших  $n$  можно принять  $n / (n + 1) \approx 1$ , поэтому уравнение (6.5) заменяется более простым

$$\bar{p} = \frac{3 - \xi^2}{1 - \xi^2} + \frac{2p_1}{\xi(1 - \xi^2)} \quad (6.6)$$

Теперь можно найти то сечение, в котором раньше всего наступит текучесть. Полагая  $dp/d\xi = 0$ , получим следующее уравнение:

$$2\xi^3 - p_1(1 - 3\xi^2) = 0 \quad (6.7)$$

При отсутствии запаздывания  $p_1 = 1$ ,  $\xi = 1/2$  и по формуле (6.6),  $p = 9$ . Если  $p_1 > 1$ , действительный корень уравнения (6.7) находится в интервале

$$1/2 < \xi < 1/\sqrt{3}$$

Приведенный пример показывает, что учет запаздывания может изменить схему расположения пластических шарниров при использовании жестко-пластической модели.

Поступила 14 XI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cottrell A. H. Effect of Solute Atoms on the Behaviour of Dislocations, Rep. of the Bristol Conference on Strength of Solids. Phys. Soc., London, 1948.
2. Cottrell A. H., Bilby B. A. Dislocation Theory of Yielding and Strain Aging of Iron. Proc. Phys. Soc., London, 1949, Ser. A., vol. 62, p. 49—62.
3. Fisher J. C. Application of Cottrell's Theory of Yielding to delayed Yield in Steel, Trans. Amer. Soc. Metals, 1955, vol. 47, p. 451—462.
4. Vigness J., Krafft J. M., Smith R. C. Effect of Loading History Upon the Yield Strength of a Plain Carbon Steel. Confer. Properties of Materials at High Rates of Strain. Proc. Inst. Mech. Engrs., London, 1957, p. 138—146.
5. Волошенко-Климовицкий Ю. Я. Динамический предел текучести. М., «Наука», 1965.
6. Волошенко-Климовицкий Ю. Я., Беляев Ю. А., Мельшанов А. Ф. Аппаратура для испытаний материалов при высоких скоростях нагружения. Заводск. лабор., 1967, № 8, стр. 1016—1019.
7. Warnock F. W. and Taylor D. B. C. Yield Phenomena of a Medium Carbon Steel under Dynamic Loading. Proc. Inst. Mech. Engrs., 1949, vol. 161, p. 165—175.
8. Yokobori T. Delayed Yield and Strain Rate and Temperature Dependence of Yield Point of Iron. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 5, p. 593—594.
9. Campbell J. D., Doby J. Delayed Yield and Other Dynamic Loading Phenomena in a Medium-Carbon Steel. Proc. Confer. on the Properties, of Materials at High Rates of Strain, Inst. Mech. Engrs., London, 1957, p. 214—220.
10. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ), ПМТФ, 1968, № 3.
11. Kelly J. M. Strain Rate Sensitivity and Yield Point Behavior in Mild Steel Internat. J. Solids and Structures, 1967, vol. 3, No. 4, p. 521—533.