

нии несжимаемой жидкости от решения, учитывающего сжимаемость газа, возрастает, если учитывать зависимость λ и μ от температуры при сохранении постоянства плотности ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Dijkstra D., Van Heijst G. J. F. The flow between two finite rotating disks enclosed a cylinder // J. Fluid Mech. — 1983. — V. 128. — P. 123.
2. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. — М.: Наука, 1984.

Поступила 6/II 1986 г.

УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. Б. Лебедев, В. М. Фомичев

(Москва)

В настоящее время имеется достаточно большое количество работ (см., например, [1, 2]) как теоретического, так и экспериментального характера, в которых рассматривается влияние охлаждения или нагрева поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход к турбулентности.

Исследования сводились к выяснению влияния температурного фактора, т. е. отношения температуры поверхности к температуре на внешней границе пограничного слоя при неизменных их величинах. Хорошо известно, что для газа нагревание поверхности приводит к уменьшению, а охлаждение — к увеличению критических чисел Рейнольдса. Последнее свойство может быть использовано для искусственной ламинаризации пограничного слоя.

Однако в практических приложениях часто встречаются условия, в которых существуют значительные градиенты температуры вдоль поверхности. Приближенный теоретический анализ показывает, что такие градиенты температуры существенно влияют на характеристики стационарного пограничного слоя: профили скорости, температуры и т. д. Поэтому надо ожидать, что неравномерность распределения температуры поверхности в значительной мере скажется и на устойчивости течения. Для газа таких исследований не проводилось, за исключением [3], где рассматривалось влияние нагрева передней кромки пластины на устойчивость пограничного слоя.

Ниже показано, что при неизменном суммарном тепловом потоке точка потери устойчивости может смещаться как вверх, так и вниз по течению в зависимости от вида распределения температуры поверхности. Отсюда вытекает исключительно важный с точки зрения проблемы управления пограничным слоем и, в частности, проблемы ламинаризации вывод — путем соответствующего выбора распределения температуры можно получить дополнительное увеличение длины ламинарного обтекания.

1. Постановка задачи. Рассматривается устойчивость плоского дозвукового пограничного слоя при неравномерном распределении температуры поверхности. В качестве математической модели примем систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности, уравнений Навье — Стокса и уравнения энергии в пренебрежении вязкой диссипацией:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right], \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ D/Dt &= \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y. \end{aligned}$$

Предполагается, что газ подчиняется уравнению состояния совершенного

газа. Граничные условия:

$$(1.2a) \quad \begin{aligned} u = 0, \quad T = T_w, \quad v = 0 \quad (y = 0), \\ u \rightarrow u_e, \quad T \rightarrow T_e \quad (y \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Температуру поверхности зададим в виде

$$(1.2b) \quad T_w = T_e + T_1 \xi^n.$$

Здесь $\xi = x/L$; x, y — продольная и поперечная координаты; u, v — соответствующие им компоненты скорости; p — давление; T, ρ — температура и плотность газа; c_p — его теплоемкость; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; индексами w, e отмечены значения параметров на поверхности и во внешнем потоке.

Линеаризуя систему (1.1), получим уравнения, описывающие развитие возмущений в пограничном слое. Используя очевидное предположение о малости длины волны собственного возмущения (волны Толлмина—Шлихтинга) λ_0 по сравнению с характерной длиной изменения температуры, которая соизмерима с размером поверхности L , можно в приближении плоскопараллельного пограничного слоя [1, 2] представить возмущение функции тока в виде плоской волны $\varphi(y) \exp(i\alpha(x - ct))$, где $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока.

Для удобства дальнейшего анализа введем новую независимую переменную

$$\eta = \left(\frac{u_e}{x v_e} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy$$

(далее штрих будет означать производную по этой переменной). Известно, что в координатах ξ, η уравнения стационарного пограничного слоя при определенных условиях (пограничные слои типа Фокнера — Скэн) допускают автомодельные решения.

Линеаризованные уравнения могут быть записаны в виде одного

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (u - c)(\varphi'' - \alpha^2 \psi^2 \varphi) - \varphi u'' - \frac{\gamma}{i\alpha \text{Re}} \left(\frac{\varphi^{IV}}{\psi} - 2\alpha^2 \psi \varphi'' + \alpha^4 \psi^3 \varphi \right) = \\ = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} \left\{ \varphi^{III} \left[2 \left(\frac{\gamma}{\psi} \right)' - \chi \frac{\gamma}{\psi} \right] + \varphi'' \left[\left(\frac{\gamma'}{\psi} \right) - 2\chi \left(\frac{\gamma}{\psi} \right)' - \frac{\gamma}{\psi} \chi' \right] - \right. \\ \left. - \alpha^2 \varphi' (\gamma \psi' + 2\psi \gamma') + \alpha^2 \psi \varphi \left[\chi (\gamma \chi - \gamma') + \gamma'' - \frac{\gamma}{\psi} \psi'' \right] \right\} + \chi \varphi' (u - c) - \chi \varphi u', \end{aligned}$$

где α, c — волновое число и фазовая скорость возмущения; $\psi = T/T_e$; $\chi = \psi'/\psi$; $\gamma = \mu/\mu_e$; u — скорость основного течения; Re — число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения. Поскольку пограничный слой предполагается существенно дозвуковым, возмущениями температуры и физических свойств газа пренебрегаем [1]. Граничные условия:

$$(1.4) \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad (\eta = 0), \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \varphi' \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty).$$

Заметим, что при $\psi = 1$ (1.3) переходит в известное уравнение Орра — Зоммерфельда.

Следовательно, рассматриваемая задача свелась к нахождению собственных значений (1.3) с однородными граничными условиями (1.4). Для ее решения необходимо определить коэффициенты (1.3), которые содержат распределения скорости, температуры и вязкости по толщине пограничного слоя, а также их производные по координате η .

Таким образом, необходимо знать характеристики основного течения, которые определяются из уравнений температурного пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

с граничными условиями

$$u = 0, v = 0, T = T_w = T_e + T_1 \xi^n \quad (y = 0), \\ u \rightarrow u_e, T \rightarrow T_e \quad (y \rightarrow \infty).$$

В автомодельных переменных ξ, η эта краевая задача примет вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (K f'') + \frac{m+1}{2} f f'' + m(\psi - f'^2) = 0,$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} (K \Theta') + \frac{m+1}{2} f \Theta' + n(1 - \Theta) f' = 0; \\ (1.6) \quad f = 0, f' = 0, \Theta = 0 \quad (\eta = 0), \\ f' \rightarrow 1, \Theta \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty).$$

Здесь $K = \mu \rho / \mu_e \rho_e$; $m = \frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}$; $f = \int_0^\eta \frac{u}{u_e} d\eta$; $\Theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}$; $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$ —

число Прандтля.

2. Предварительный качественный анализ. Прежде чем перейти к численному решению краевых задач (1.5), (1.6) и (1.3), (1.4), приведем некоторые качественные рассуждения относительно характера влияния неравномерности температуры поверхности на устойчивость пограничного слоя. Известно, что это влияние сказывается в первую очередь через изменение профиля скорости основного течения.

Сравним эти профили при постоянной температуре поверхности и ее степенном распределении (1.2б). Рассмотрим пограничный слой на плоской пластине ($m = 0$) при $K = 1$. Для анализа удобно перейти к обычной безразмерной координате $z = \eta + T_1 \xi^n \int_0^\eta (1 - \Theta) d\eta$ и сравнить значения z и z_0 для двух различных профилей скорости при фиксированном ее значении. Здесь $z = y/\delta_*$, а индекс 0 отвечает постоянной температуре поверхности.

Для этого сравнения необходимо знать функции $\Theta(\eta)$ и $\Theta_0(\eta)$. Определим их вид в адекватных условиях, т. е. потребуем равенства суммарных по длине пластины тепловых потоков для различных распределений температуры поверхности. Как отмечалось выше, в этом случае можно судить о том, какое из распределений наиболее благоприятно с точки зрения устойчивости

$$\int_0^1 \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w d\xi = \int_0^1 \left(\lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w d\xi.$$

Это условие определяет связь между T_{10} и T_1 :

$$T_{10} = T_1 B, \quad B = \frac{1}{1 + 2n} \frac{\Theta'_w}{\Theta'_{0w}}.$$

Вводя новую функцию

$$Q(\xi, \eta) = (1 - \Theta)\xi^n - (1 - \Theta_0)B,$$

получим искомую разность в виде

$$z - z_0 = T_1 \int_0^\eta Q d\eta,$$

причем функция Q удовлетворяет краевой задаче

$$Q'' + \frac{\text{Pr}}{2} f Q' - n \text{Pr} Q f' = 0,$$

$$Q_w = \xi^n - B \quad (\eta = 0),$$

$$Q \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty).$$

Из анализа ее решения вытекает, что для всех $\eta \geq 0$ при $Q_w > 0$ функция $Q > 0$, а при $Q_w < 0$ $Q < 0$.

Таким образом, на основании проведенного анализа сделаем выводы. При охлаждении поверхности ($T_1 < 0$) и ее нагреве ($T_1 > 0$) возможны два противоположных по характеру эффекта влияния неравномерности температуры поверхности на устойчивость пограничного слоя в зависимости от знака и величины ее градиента: когда $T_1 < 0$, $n > 0$, устойчивость повышается, а при $n < 0$ понижается; когда $T_1 > 0$, $n > 0$, устойчивость понижается, а при $n < 0$ повышается.

3. Результаты численных расчетов. Приведем теперь результаты расчетов на ЭВМ устойчивости ламинарных пограничных слоев, иллюстрирующие сделанный выше вывод. Задача на собственные значения (1.3), (1.4) решалась методом ортогонализации [4, 5]. Необходимые коэффициенты определялись из решения краевой задачи (1.5), (1.6).

Результаты расчетов представлены в виде кривых нейтральной устойчивости $F = F(\text{Re})$, где $F = \omega v_c / u_c^2$, и зависимостей коэффициентов пространственного нарастания возмущений $\alpha_i(F)$ при фиксированных Re . Полагалось $K = 1$, $\text{Pr} = 0,72$. Как при охлаждении поверхности пластины, так и при ее нагревании выбиралось два вида распределения температуры: линейное ($n = 1$) и степенное ($n = -0,4$). На всех рисунках 1 — равномерная температура поверхности, 2 — неравномерная.

Охлаждение поверхности.

1. Рис. 1 ($n = 1$, $T_1 = -0,5$, $\text{Re} = 10^5$). Видно, что область неустойчивых частот значительно сужается. Минимальное критическое $\text{Re}_* = 4 \cdot 10^4$, в то время как при равномерном охлаждении $\text{Re}_* = 1,5 \cdot 10^3$. Это означает, что минимальная длина ламинарного участка возрастает почти на три порядка. При более низких значениях F отличие не столь велико, но все же очень значительно. Так, при $F = 2 \cdot 10^{-7}$ длина, отвечающая началу нарастания возмущений при неравномерном охлаждении, увеличивается почти в 2,5 раза. Аналогичное стабилизирующее влияние неравномерность распределения температуры поверхности оказывает и на коэффициент пространственного нарастания α_i . Видно, что при выбранном Re он уменьшается почти в 3 раза.

2. Рис. 2 ($n = -0,4$, $T_1 = -0,1$, $\text{Re} = 10^5$). В отличие от предшествующего случая наблюдается уменьшение устойчивости и увеличение коэффициента α_i . Минимальное значение $\text{Re}_* \approx 600$ против $\text{Re}_* \approx 900$ при

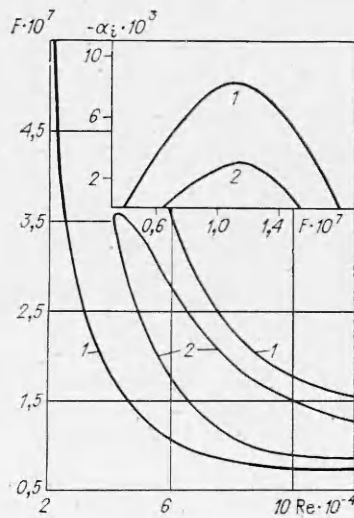


Рис. 1

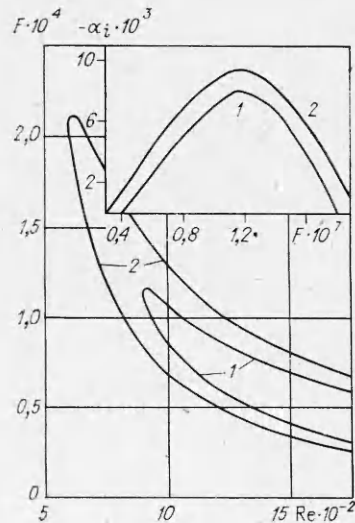
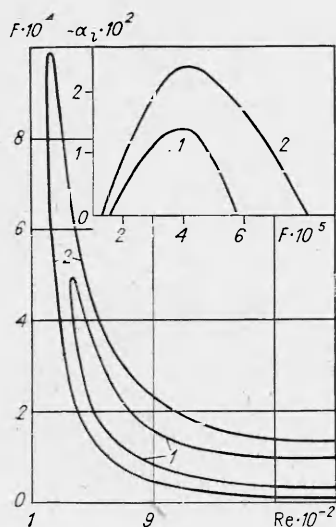
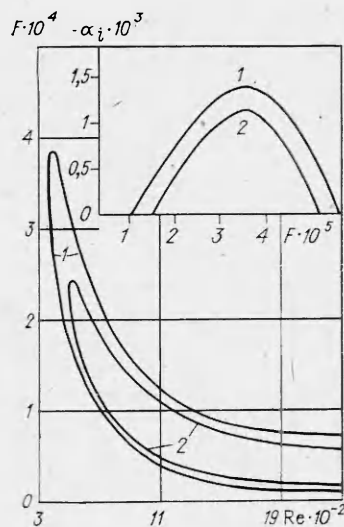


Рис. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

равномерном охлаждении, что отвечает приблизительно двукратному уменьшению длины ламинарного участка.

Нагрев поверхности.

1. Рис. 3 ($n = 1$, $T_1 = 0,5$, $Re = 2 \cdot 10^3$). Происходит уменьшение устойчивости и увеличение коэффициента α_i ; $Re_* \approx 200$ по сравнению с $Re_* \approx 340$ при равномерном обогреве. При более низких значениях параметра F отличие менее значительно. При $Re = 2 \cdot 10^3$ величина α_i возрастает в $\sim 1,5$ раза.

2. Рис. 4 ($n = -0,4$, $T_1 = 0,1$, $Re = 2 \cdot 10^3$). Устойчивость при неравномерном нагреве повышается, а коэффициент пространственного нарастания уменьшается. Минимальная длина ламинарного участка увеличивается на $\sim 75\%$. При $F = 2 \cdot 10^{-4}$ это увеличение не столь значительно и составляет $\sim 23\%$, величина α_i падает на 25% .

Таким образом, проведенный анализ и результаты численных расчетов показали достаточно большое влияние неравномерности температуры поверхности на устойчивость дозвукового ламинарного пограничного слоя газа. Это влияние особенно велико для охлаждаемой поверхности, если ее температура падает по длине. Следовательно, использование такого распределения температуры эффективнее для целей ламинаризации по сравнению с ее равномерным распределением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
2. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
3. Казаков А. В., Коган М. Н., Купарев В. А. Об устойчивости дозвукового пограничного слоя при нагреве поверхности плоской пластины вблизи передней кромки // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
4. Левченко В. Я., Володин А. Г., Гапонов С. А. Характеристики устойчивости пограничных слоев.— Новосибирск: Наука, 1975.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3.

Поступила 6/II 1986 г.