ПМТФ, № 4, 1974

УДК 538.4

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

И. Е. Тарапов

(Харьков)

Рассмотрена линейная теория поверхностных волн в намагничивающейся жидкости. Изучен критерий устойчивости плоской свободной поверхности намагничивающейся жидкости при произвольном законе ее намагничивания.

Теория поверхностных волн в классической постановке [1] приводит к нестандартным, преимущественно нелинейным задачам. Линеаризация этих задач обычно связана с исследованиями устойчивости свободных поверхностей жидкости. К этому вопросу в последнее время усилился интерес в связи с применением жидкостей, которые могут существенно намагничиваться или поляризоваться в электромагнитном поле [2–5].

В данной статье рассматриваются потенциальные волновые движения на поверхности несжимаемой жидкости, которая может неоднородно и изотропно намагничиваться во внешнем магнитном поле. Будем также считать, что эта жидкость невязкая и не проводит тока, а температура в ней остается неизменной, так что функцию намагниченности среды $\mathbf{M}$ можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho, H) = (\mathbf{H} / H)\; M(\rho, H)$$

Пусть в невозмущенном состоянии намагниченная жидкость занимает полупространство $y < 0$, а в области $y > 0$ находится среда, для которой можно принять плотность и намагниченность равной нулю.

Исходной системой уравнений для описания поверхностных волн являются уравнения безвихревого движения несжимаемой непроводящей намагниченной жидкости [6]

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{p + \psi^{(\rho)}}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \mathbf{g} + \frac{M}{\rho}|\nabla H \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = -4\pi \operatorname{div}(M\mathbf{H} / H)$$

$$\left(\psi^{(\rho)} \equiv \int_0^H \left\{M - \rho\left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_H\right\} dH\right)$$

и условия, которые должны быть выполнены на свободной поверхности $y = F(t, x, z)$. Эти условия имеют вид

$$F_t + \nabla F\cdot\mathbf{v}^- = v_y \tag{2}$$

$$p^- + \psi^{(\rho)} - p^+ = -2\pi(\mathbf{M}\cdot\mathbf{n})^2 + \alpha(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \tag{3}$$

$$\mathbf{B}^-\cdot\mathbf{n} = \mathbf{H}^+\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_\tau^- = \mathbf{H}_\tau^+ \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{n} = \{-F_x(1 + F_x^2 + F_z^2)^{-1/2}, \ (1 + F_x^2 + F_z^2)^{-1/2}, \ -F_z(1 + F_x^2 + F_z^2)^{-1/2}\}$ — орт нормали к свободной поверхности, направленный в область $y > F$; α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны свободной поверхности

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}(\rho, H), \quad F_t\equiv\frac{\partial F}{\partial t}, \quad F_x\equiv\frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_z\equiv\frac{\partial F}{\partial z}$$

верхними минусами обозначены значения соответствующих величин у поверхности со стороны жидкости, а плюсами — со стороны немагнитной среды, занимающей область $y>F$.

Условие (2) означает неразрывность движения жидкости на свободной поверхности, условие (3) — равенство нормальных напряжений по обе стороны свободной поверхности, а условия (4) обеспечивают равенство нормальных компонент магнитной индукции и касательных компонент магнитного поля.

Кроме того, будем считать, что вдали от свободной поверхности выполняются условия

$$\mathbf{H}_+|_{y=+\infty}=\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_-|_{y=-\infty}\equiv\mathbf{H}_\infty=(H_{0x}, H_{0y}\mu_\infty^{-1}, H_{0z}) \tag{5}$$

где $\mathbf{H}_0$ — внешнее поле, а μ_∞ — значение магнитной проницаемости среды вдали от свободной поверхности.

Таким образом, $\mathbf{H}_- - \mathbf{H}_\infty\equiv\mathbf{H}_i$ представляет собой поле, индуцируемое в магнетике за счет его свойств, как «жидкого магнита», а $\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_0$ — поле, индуцируемое в пространстве над магнетиком. Рассматриваемая задача является примером задачи движения намагничивающейся среды, в которой пренебрежение индуцируемым полем приводит к заведомо некорректным результатам.

Введя потенциал скорости $\varphi(t, x, y, z)$ ($\mathbf{v}=\nabla\varphi$) и потенциал магнитного поля $\Phi(t, x, y, z)$ ($\mathbf{H}=\nabla\Phi$), из (1) получаем уравнения для φ и Φ и интеграл уравнения движения в виде

$$\Delta\varphi=0, \quad \Delta\Phi=-4\pi\operatorname{div}\{M\nabla\Phi/|\nabla\Phi|\} \tag{6}$$

$$\varphi_t+{}^1/_2(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)+gy+(p+\psi^{(\rho)})/\rho-(1/\rho)\times$$

$$\times MdH=C(t)$$

Записывая интеграл (6) для точек свободной поверхности и исключая из него $p+\psi^{(\rho)}$ при помощи условия (3), получаем систему уравнений для определения функций $F(t, x, z)$, $\varphi(t, x, y, z)$, $\Phi_+(t, x, y, z)$, $\Phi_-(t, x, y, z)$ в следующем виде:

в области $y>F(t, x, z)$

$$\Delta\Phi_+=0, \quad \nabla\Phi_+|_{y=+\infty}=\mathbf{H}_0 \tag{7}$$

в области $y<F(t, x, z)$

$$\Delta\varphi=0, \quad \nabla\varphi|_{y=-\infty}=0 \tag{8}$$

$$\Delta\Phi_-=-4\pi\operatorname{div}\{M\nabla\Phi_-/|\nabla\Phi_-|\}, \quad \nabla\Phi_-|_{y=-\infty}=\mathbf{H}_\infty \tag{9}$$

На поверхности $y=F(t, x, z)$ в силу (2), (4) и (6) должны быть выполнены условия

$$F_t=\varphi_y-F_x\varphi_x^- - F_z\varphi_z^- \tag{10}$$

$$\Phi_y^-(1+4\pi M^-/H^-)-\Phi_y^+=F_x\{\Phi_x^-(1+4\pi M^-/H^-)-\Phi_x^+\}+ \tag{11}$$

$$+F_z\{\Phi_z^-(1+4\pi M^-/H^-)-\Phi_z^+\}$$

$$\Phi_x^- - \Phi_x^+ + F_x(\Phi_y^- - \Phi_y^+)=0, \quad \Phi_z^- - \Phi_z^+ + F_z(\Phi_y^- - \tag{12}$$

$$-\Phi^+_y)=0$$

(13) $$\varphi_t^- + {}^1/_2\{(\varphi_x^-)^2 + (\varphi_y^-)^2 + (\varphi_z^-)^2\} + gF + \frac{\alpha}{\rho}(R_1^{-1} + R_2^{-1}) -$$
$$-\frac{1}{\rho}\int MdH - \frac{2\pi}{\rho}\left(\frac{M}{H}\right)^2(\Phi_y^- - \Phi_x^- F_x - \Phi_z^- F_z)^2(1 + F_x^2 + F_z^2)^{-1} = 0$$
$$\varphi^- \equiv \varphi\,(t, x, F, z), \quad \Phi^\pm \equiv \Phi_\pm\,(t, x, F, z), \quad \mathbf{H}^- = |\nabla\Phi^-|$$

где нижние буквенные индексы у φ, Φ, F означают частные производные.

В таком наиболее полном виде сформулированная задача включает в себя нелинейность не только в граничных условиях, но и в уравнении (9) для магнитного поля, причем вид поверхности, на которой ставятся граничные условия, также подлежит определению. Эти обстоятельства создают значительные математические трудности.

В дальнейшем рассмотрим линейную теорию поверхностных волн в намагничивающейся жидкости, т. е. будем считать, что амплитуда волн достаточно мала по сравнению с их длиной $2\pi / k$, так что величины $|kF|$, $|F_x|$, $|F_z|$ малы по сравнению с единицей. Считая, кроме того, что величины индуцированных магнитных полей $|\nabla\Phi_- - \mathbf{H}_\infty|$ и $|\nabla\Phi_+ - \mathbf{H}_0|$ имеют тот же порядок, что и $|kF|$, линеаризуем уравнение (9) и граничные условия (10) — (13), отбрасывая в них члены второго порядка малости.

Учитывая

$$4\pi M / H \approx 4\pi M_\infty / H_\infty + \mu_\infty c_\infty \mathbf{H}_\infty \cdot (\nabla\Phi_- - \mathbf{H}_\infty)$$
$$\mu_\infty = 1 + 4\pi M_\infty / H_\infty, \quad c_\infty = \frac{4\pi}{\mu_\infty H_\infty^2}\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_\infty - \frac{M_\infty}{H_\infty}\right\}$$

из (7) — (13) получаем линейные уравнения

(14) $$\Delta\Phi_+ = 0, \quad \Delta\Phi_- = -c_\infty \mathbf{H}_\infty \cdot \nabla(\mathbf{H}_\infty \cdot \nabla\Phi_-), \quad \Delta\varphi = 0$$

с теми же условиями на бесконечности и с линеаризованными условиями на поверхности $y = F$

(15) $$F_t = \varphi_y^-$$

(16) $$\mu_\infty\{\Phi^-_y + c_\infty H_{0y}\,\mu_\infty^{-1}\mathbf{H}_\infty \cdot (\nabla\Phi^- - \mathbf{H}_\infty)\} - \Phi_y^+ - (\mu_\infty - 1) \times$$
$$\times (F_x H_{0x} + F_z H_{0z}) = 0$$

$$\Phi_x^- - \Phi_x^+ + F_x H_{0y}(\mu_\infty^{-1} - 1) = 0, \quad \Phi_z^- - \Phi_z^+ + F_z H_{0y} \times$$
$$\times (\mu_\infty^{-1} - 1) = 0$$

$$\varphi_t + gF - \frac{\alpha}{\rho}(F_{xx} + F_{zz}) - \frac{(\mu_\infty - 1)^2 H_{0y}}{4\pi\rho\mu_\infty}(\Phi_y^- - H_{0x}F_x - H_{0z}F_z) -$$
$$-\frac{(\mu_\infty - 1)(\mu_\infty + c_\infty H_{0y}^2)}{4\pi\rho\mu_\infty}\mathbf{H}_\infty \cdot (\nabla\Phi^- - \mathbf{H}_\infty) = 0$$

Из граничных условий можно исключить вид поверхности при помощи (15), если остальные условия продифференцировать по времени. Получим вместо (15) и (16)

(17) $$\mu_\infty\{\Phi_{yt}^- + c_\infty H_{0y}\mu_\infty^{-1}(\mathbf{H}_\infty \cdot \nabla\Phi_t^-)\} - \Phi_{yt}^+ - (\mu_\infty - 1)(\varphi_{yx}H_{0x} +$$
$$+ \varphi_{yz}H_{0z}) = 0$$

$$\Phi_{xt}^- - \Phi_{xt}^+ + \varphi_{yx}H_{0y}(\mu_\infty^{-1} - 1) = 0, \quad \Phi_{zt}^- - \Phi_{zt}^+ +$$
$$+ \varphi_{yz}H_{0y}(\mu_\infty^{-1} - 1) = 0$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y - \frac{\alpha}{\rho}(\varphi_{yxx} + \varphi_{yzz}) - \frac{(\mu_\infty - 1)^2 H_{0y}}{4\pi\rho\mu_\infty}(\Phi^-_{yt} - H_{0x}\varphi_{xy} - H_{0z}\varphi_{zy}) -$$

$$-\frac{(\mu_\infty - 1)(\mu_\infty + c_\infty H_{0y}^2)}{4\pi\rho\mu_\infty}(\mathbf{H}_\infty \cdot \nabla\Phi^-) = 0$$

Прогрессивные поверхностные волны описываются решениями уравнений (14) вида

$$\Phi_+ = c^+ \exp\{-ky + i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + i\omega t\} + \mathbf{H}_0\cdot\mathbf{r} \tag{18}$$

$$\Phi_- = c^- \exp\{k'y + i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + i\omega t\} + \mathbf{H}_\infty\cdot\mathbf{r}$$

$$\varphi = (i\omega / k)\exp\{ky + i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + i\omega t\}$$

$$\mathbf{k} = (k_x, k_z), \qquad k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{A} - ic_\infty H_{\infty y} H_k}{1 + c_\infty H_{\infty y}^2}, \qquad A \equiv 1 + c_\infty H_\infty^2, \qquad H_k \equiv \frac{\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{k}}{k}$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям (14) и граничным условиям на бесконечности при любых c^+, c^- и ω ($k > 0$, $A > 0$).

Постоянные c^+, c^- и фазовую скорость $\lambda \equiv \omega / k$ волн определяем из условий (17), подставляя в них выражения (18)

$$c^- = (\mu_\infty - 1)\ (H_{\infty y} + iH_k)(1 + \mu_\infty\sqrt{A})^{-1} \tag{19}$$

$$c^+ = c^- - H_{0y}(1 - \mu_\infty^{-1})$$

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + \frac{(\mu_\infty - 1)^2 (H_k^2 - H_{\infty y}^2\sqrt{A})}{4\pi\rho(1 + \mu_\infty\sqrt{A})}$$

где $\lambda_0 \equiv (g / k + \alpha k / \rho)^{1/2}$ — фазовая скорость в отсутствие магнитного поля.

Групповая скорость рассматриваемых прогрессивных волн равна

$$U \equiv \frac{d}{dk}(\lambda k) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha k}{\rho} + \frac{3}{2}\lambda_k^2 - \lambda_n^2\right) \tag{20}$$

$$\lambda_k^2 = \frac{(\mu_\infty - 1)^2 H_k^2}{4\pi\rho(1 + \mu_\infty\sqrt{A})}, \qquad \lambda_n^2 = \frac{H_{\infty y}^2(\mu_\infty - 1)^2\sqrt{A}}{4\pi\rho(1 + \mu_\infty\sqrt{A})}$$

Анализ выражений (18) — (20) позволяет сделать следующие выводы.

1. Поверхностные волны в среде, намагничивающейся по произвольному закону, сопровождаются поперечными волнами с декрементом k'; они существуют только при $\mu = \mu(H, \rho)$, ибо при $\mu = \mu(\rho)$ (линейное намагничивание) величина $c_\infty = 0$ и декремент k' становится действительным.

При нелинейном намагничивании ($\partial M / \partial H > 0$, $\partial^2 M / \partial H^2 < 0$) имеем $c_\infty < 0$, так что в нормальном поле действительная часть декремента больше, а в касательном — меньше, чем у среды с линейным законом намагничивания. Следовательно, в нормальном поле чем сильнее выражена нелинейность намагничивания, тем тоньше поверхностный слой, где сосредоточиваются возмущения; в касательном поле — картина обратная.

2. Касательное к невозмущенной плоской поверхности поле повышает фазовую скорость поверхностных волн, если $H_k = (\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{k}) / k \neq 0$, т. е. если это поле не перпендикулярно фронту волны; при этом увеличи-

вается и групповая скорость волн (если пренебречь влиянием поверхностного натяжения), так что энергия, переносимая волнами через вертикальную поверхность, больше, чем в немагнитной среде.

3. Нормальное поле уменьшает фазовую скорость поверхностных волн и (в пренебрежении поверхностным натяжением) групповую скорость.

4. Нормальное поле дестабилизирует свободную поверхность намагничивающейся среды. Когда λ становится мнимым независимо от величины и направления волнового вектора k, наступает неустойчивость свободной поверхности. Из (19) следует, что наиболее опасными с точки зрения нарушения устойчивости свободной поверхности являются волны, перпендикулярные к касательной составляющей внешнего поля, т. е. когда $H_k = 0$. В этом случае поверхность может считаться устойчивой лишь при выполнении следующего неравенства:

$$H_{0y}^2 < \frac{8\pi\mu_\infty \sqrt{\alpha g\rho}\,(1 + \mu_\infty \sqrt{A})}{\sqrt{A}\,(\mu_\infty - 1)^2} \tag{21}$$

Эффект дестабилизации свободной поверхности нормальным полем подтверждается рядом экспериментов с ферромагнитными жидкостями [2,4].

Если поверхность $y = 0$ является поверхностью раздела двух сред с плотностями ρ^+ и ρ^-, изотропно намагничивающихся по законам $\mu_\infty^\pm = \mu_\infty^\pm(\rho^\pm, H^\pm)$, то анализ, аналогичный вышеприведенному, приводит к следующему критерию устойчивости этой поверхности раздела:

$$H_{0y}^2 < [8\pi\mu_\infty^+\mu_\infty^- \sqrt{\alpha g(\rho^- - \rho^+)}\,(\mu_\infty^+\sqrt{A^+} + \mu_\infty^-\sqrt{A^-})] \times$$
$$\times [\sqrt{A^+A^-}\,(\mu_\infty^- - \mu_\infty^+)^2]^{-1}$$
$$A^\pm = 1 + c_\infty^\pm (H_\infty^\pm)^2 = 1 + \frac{4\pi}{\mu_\infty^\pm}\left\{\left(\frac{\partial M^\pm}{\partial H}\right)_{\mp\infty} - \frac{M_\infty^\pm}{H_\infty^+}\right\}$$

Здесь среда с индексом минус находится под средой с индексом плюс.

В полях H_{0y}, при которых плоская свободная поверхность неустойчива, существует равновесная форма свободной поверхности периодической структуры, мало отличающаяся от $y = 0$. Эксперименты с ферромагнитной жидкостью [4] указывают на наличие такой волнистой свободной поверхности в достаточно больших нормальных полях.

Определим вид такой свободной поверхности.

Для простоты будем считать, что имеем дело с парамагнитной жидкостью ($M / H = (\mu - 1) / 4\pi = \mathrm{const}$) и внешнее поле лежит в плоскости xy. Тогда, если свободная поверхность $y = F(x)$, мало отличающаяся от плоскости $y = 0$, находится в равновесии, то, как следует из (16), на ней должны соблюдаться условия

$$\mu\Phi_y^- - \Phi_y^+ = (\mu - 1) H_{0x}, \qquad \Phi_x^- - \Phi_x^+ + (\mu^{-1} - 1) F_x H_{0y} = 0 \tag{22}$$
$$gF - \frac{\alpha}{\rho}F_{xx} - \frac{(\mu - 1)^2 H_{0y}}{4\pi\rho\mu}(\Phi_y^- - H_{0x}F_x) -$$
$$- \frac{\mu - 1}{4\pi\rho}\left(\frac{H_{0y}}{\mu}\Phi_y^- + H_{0x}\Phi_x^-\right) = 0$$

причем функции $\Phi_\pm(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Phi_\pm = 0 \tag{23}$$

и условиям (5) на бесконечности.

Будем искать решения (23) в виде

$$\Phi_+ = e^{-ky}\,(a^+ \sin kx + b^+ \cos kx) + H_{0x}x + H_{0y}y \tag{24}$$
$$\Phi_- = e^{ky}\,(a^- \sin kx + b^+ \cos kx) + H_{0x}x + H_{0y}y\mu^{-1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (22), получим

$$k = k_0 + \sqrt{k_0{}^2 - \rho g\alpha}, \qquad a^+ = A_0a^- - B_0b^-, \qquad b^+ = B_0a^- + A_0b^- \tag{25}$$
$$F(x) = \mu\,\{(\mu - 1)\,H_{0y}\}^{-1}\,\{(a^- - a^+) \sin kx + (b^- - b^+) \cos kx\}$$
$$k_0 = \frac{(\mu - 1)^2\,(H_{0y}^2 - \mu H_{0x}^2)}{8\pi\mu\alpha\,(\mu + 1)}, \quad A_0 = \mu\,\frac{\mu H_{0x}^2 - H_{0y}^2}{\mu H_{0x}^2 + H_{0y}^2}$$
$$B_0 = \frac{\mu H_{0x}H_{0y}}{\mu H_{0x}^2 \quad H_{0y}^2}$$

Это решение, удовлетворяющее всем граничным условиям при произвольных b^-, a^- существует, если

$$(\mu - 1)^2\,(H_{0y}{}^2 - \mu H_{0x}{}^2) \geqslant 8\pi\mu\,(\mu + 1)\,\sqrt{\rho g\alpha} \tag{26}$$

При этом, как следует из (19), фазовая скорость λ становится при любых k мнимой и, следовательно, плоская поверхность $y = 0$ будет неустойчивой.

В данном приближении безграничной жидкости постоянные a^-, b^- у функции (25) остаются неопределенными. Если считать, что жидкость заключена в достаточно длинный и глубокий контейнер (длина L и глубина его значительно больше длины волны, т. е. величины порядка k^{-1}) и угол смачивания его стенок жидкостью равен θ, то постоянные a^-, b^-, определяются из условий

$$F_x|_{x=0} = -\operatorname{ctg}\theta, \quad F_x|_{x=L} = \operatorname{ctg}\theta$$

В этом случае из (25) имеем

$$F(x) = -k^{-1} \operatorname{ctg}\theta\,\{\sin kx + \operatorname{ctg}(kL\,/\,2) \cos kx\}$$

причем $kL\,/\,2 \neq 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$), ибо может наступить своеобразная резонансная неустойчивость поверхности.

В случае насыщенного магнетика ($M = M_0 = \text{const}$) при $4\pi M_0\,/\,/H_0 = m_0 \ll 1$ критерий (26) имеет вид $m_0{}^2\,(H_{0y}{}^2 - H_{0x}{}^2) \geqslant 16\pi\sqrt{\rho g\alpha}$.

Поступила 12 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория поверхностных волн. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Zelazo R.*, *Melcher R.* Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 1, pp. 1—23.
3. *Гайлитис А.* Форма поверхностной неустойчивости ферромагнитной жидкости. Магнитная гидродинамика, 1969, № 1, стр. 68—70.
4. *Cowley M. D.*, *Rosensweig R. E.* The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt. 4, pp. 671—676.
5. *Зайцев В. М.*, *Шлиомис М. И.* О характере неустойчивости плоской поверхности ферромагнитной жидкости во внешнем поле. Шестое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Тезисы докладов, т. 1, Рига, АН ЛатвССР, 1968, стр. 132.
6. *Тарапов И. Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1, стр. 3—11.