

**О ПРОЕКТИРОВАНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ  
СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК  
ИЗ ДИСКРЕТНОГО НАБОРА МАТЕРИАЛОВ**

УДК 539.3

Э. А. Бондарев, В. А. Будугаева, Е. Л. Гусев

**Институт физико-технических проблем Севера РАН, 677891 Якутск**

Современное состояние проблемы оптимального проектирования сложных конструкций из заданного набора материалов при различных ограничениях на их характеристики с достаточной полнотой освещено в монографиях [1–3], где, в частности, разработаны методы решения задач синтеза упругих слоистых цилиндрических оболочек, обеспечивающих необходимое гашение колебаний при различных внешних воздействиях и при ограничениях на массу или общую толщину конструкции.

Среди задач динамики упругих конструкций особое место занимают задачи о свободных колебаниях. Объясняется это тем, что характеристики свободных колебаний (собственные частоты и формы) полностью определяют индивидуальные свойства механической системы и имеют первостепенное значение также при анализе ее вынужденных колебаний. В этой связи несомненный интерес представляют задачи синтеза конструкций из конечного набора материалов при различных ограничениях, накладываемых на частоту собственных колебаний. Первой и пока единственной публикацией на эту тему является работа В. В. Алехина [4], в которой рассмотрена задача синтеза слоистых цилиндра и сферы минимальной массы.

Широкое применение полимерных материалов в технике привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования неоднородных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В связи с этим представляет значительный интерес анализ особенностей задач оптимального проектирования вязкоупругих систем по отношению к аналогичным задачам для упругих конструкций. Такой анализ интересен и важен еще и потому, что наличие демпфирующих свойств вязкоупругих материалов может показаться достаточным, чтобы предпочесть их для создания конструкций из какого-либо одного материала, обладающего требуемыми свойствами. Иными словами, возникает вопрос о возможности улучшения вязкоупругой конструкции за счет особенностей прохождения волн через границы различных материалов. Этот вопрос можно сформулировать и таким образом: не окажется ли вязкоупругость подавляющим физическим фактором по сравнению с эффектами отражения и преломления на границах?

Имеется значительное число работ, посвященных решению прямых задач расчета характеристик вязкоупругих конструкций (см., например, [5]). Наиболее существенный научный результат, полученный авторами этих работ, заключается в выявлении немонотонной зависимости диссипативных характеристик конструкций из вязкоупругих материалов от их геометрических и других параметров структурной неоднородности. Этот результат может служить основой для постановки задач синтеза слоистых конструкций из вязкоупругих материалов с ограничениями, обеспечивающими выполнение практически важных конструктивных требований (минимальный вес, максимальный декремент затухания и др.).

1. Особенности влияния структуры конструкции (вязкоупругие параметры материалов, взаимное расположение и толщины слоев), синтезируемой из конечного набора вязкоупругих материалов, на уровень демпфирования свободных колебаний проанализируем на примере многослойной сферической оболочки, где каждый слой заполнен вязкоупругим

материалом, механические свойства которого зависят от номера слоя  $n$ .

Задачи о свободных колебаниях относятся к классу задач, для которых инерционные члены полностью определяют поведение материалов. Для этого необходимо, чтобы граничные условия соответствовали тождественному равенству нулю работы всех внешних сил. Кроме того, тождественно равными нулю должны считаться массовые силы.

С учетом вязкоупругой аналогии решение прямой задачи о собственных колебаниях вязкоупругой сферической оболочки можно получить тем же способом, что и решение соответствующей задачи теории упругости, в которой упругие модули заменены комплексными вязкоупругими модулями.

Свободные колебания однородной сферы из вязкоупругого материала описываются следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1.1)$$

$$\sigma_r = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\bar{\lambda} \frac{u}{r}; \quad (1.2)$$

$$\sigma_\varphi = 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{u}{r} + \bar{\lambda} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad R_1 < r < R_2; \quad (1.3)$$

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_r(R_2) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и внешний радиусы сферической оболочки;  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\mu}$  — вязкоупругие параметры Ламе, которые при помощи метода замораживания [6] можно представить в виде

$$\lambda_n = \lambda_n [1 - \Gamma_{\lambda_n}^c(\omega_{Re}) - i\Gamma_{\lambda_n}^s(\omega_{Re})], \quad \bar{\mu}_n = \mu_n [1 - \Gamma_{\mu_n}^c(\omega_{Re}) - i\Gamma_{\mu_n}^s(\omega_{Re})]; \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{\lambda_n}^c(\omega_{Re}) = \int_0^\infty R_{\lambda_n}(\tau) \cos(\omega_{Re}\tau) d\tau, \quad \Gamma_{\lambda_n}^s(\omega_{Re}) = \int_0^\infty R_{\lambda_n}(\tau) \sin(\omega_{Re}\tau) d\tau, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{\mu_n}^c(\omega_{Re}) = \int_0^\infty R_{\mu_n}(\tau) \cos(\omega_{Re}\tau) d\tau, \quad \Gamma_{\mu_n}^s(\omega_{Re}) = \int_0^\infty R_{\mu_n}(\tau) \sin(\omega_{Re}\tau) d\tau,$$

где  $\lambda_n, \mu_n, R_{\lambda_n}, R_{\mu_n}$  — параметры Ламе и ядра релаксации материала, занимающего слой  $n$  (для однородной сферы  $n = 1$ );  $\omega_{Re}$  — действительная константа.

Решение задачи (1.1)–(1.4) имеет вид

$$u(r) = (C_1 + C_2) \left\{ -\frac{\alpha^2}{r} \cos(\alpha r) + \frac{\alpha}{r^2} \sin(\alpha r) \right\} + i(C_1 - C_2) \left\{ -\frac{\alpha}{r^2} \cos(\alpha r) - \frac{\alpha^2}{r} \sin(\alpha r) \right\}; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = (C_1 + C_2) & [(4\mu\alpha/r) \cos(\alpha r) - (4\mu/r^2 - \alpha^2(\lambda + 2\mu)) \sin(\alpha r)] (\alpha/r) + \\ & + i(C_1 - C_2) [(4\mu\alpha/r) \sin(\alpha r) + (4\mu/r^2 - \alpha^2(\lambda + 2\mu)) \cos(\alpha r)] (\alpha/r). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\alpha^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$ ; черта над  $\lambda$  и  $\mu$  опущена.

Определяя константы из граничных условий (1.4), получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \cos[\alpha(R_2 - R_1)] \left\{ \frac{4\mu\alpha}{R_1} \left( \frac{4\mu}{R_2^2} - \rho\omega^2 \right) - \frac{4\mu\alpha}{R_2} \left( \frac{4\mu}{R_1^2} - \rho\omega^2 \right) \right\} + \\ & + \sin[\alpha(R_2 - R_1)] \left\{ \frac{(4\mu\alpha)^2}{R_1 R_2} + \left( \frac{4\mu}{R_1^2} - \rho\omega^2 \right) \left( \frac{4\mu}{R_2^2} - \rho\omega^2 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Номер материала	$\rho$	$\lambda$	$\mu$	$\omega$
1	1	6	6	7,04
2	2	16	16	8,14
3	4	34	34	8,39

В случае упругих материалов коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  будут действительными, что соответствует равенствам  $\bar{\lambda} = \lambda$ ,  $\bar{\mu} = \mu$  в формулах (1.5). Теперь, используя результаты вычислений [4], можно проверить решение (1.9). Значения исходных параметров приведены в таблице. Кроме того, принималось, что  $R_1 = 0,8$ ,  $\bar{n}_2 = 1,0$ . Значения собственных частот для каждого из трех материалов, приведенные в таблице, совпадают с результатами [4] с точностью до третьего знака после запятой.

При описании вязкоупругих материалов считалось, что объемная деформация является чисто упругой, т. е. модуль объемной сжимаемости  $K = \lambda + (2/3)\mu$  — константа, а для описания сдвиговых деформаций использовалось ядро Ржаницына — Колтунова [7, 8]  $R_\mu = A \exp(-\beta t)/t^{1-\alpha}$  (как наиболее употребительное в механике полимеров).

В вычислительном эксперименте изучалось влияние параметров  $A$  и  $\alpha$  на декремент затухания собственных колебаний однородной сферической оболочки из вязкоупругого материала. Наружный и внутренний радиусы оболочки, а также значение параметра  $\beta$  фиксировались:  $R_1 = 0,8$ ;  $R_2 = 1,0$ ;  $\beta = 0,05$ . При этом был принят во внимание вывод из работы [7] о незначительном влиянии параметра  $\beta$  на декремент затухания. Данный вывод, конечно, не универсален и справедлив лишь для тех материалов, у которых параметр  $\beta$  мал.

На рис. 1 приведены результаты расчетов, выполненных при значениях упругих констант только для третьего материала из таблицы, так как общие тенденции по отношению к изменениям реологических параметров сохраняются для всех материалов (сплошные кривые отвечают действительной части  $\omega_{Re}$  комплексной частоты, штриховые — мнимой части  $\omega_{Im}$ ).

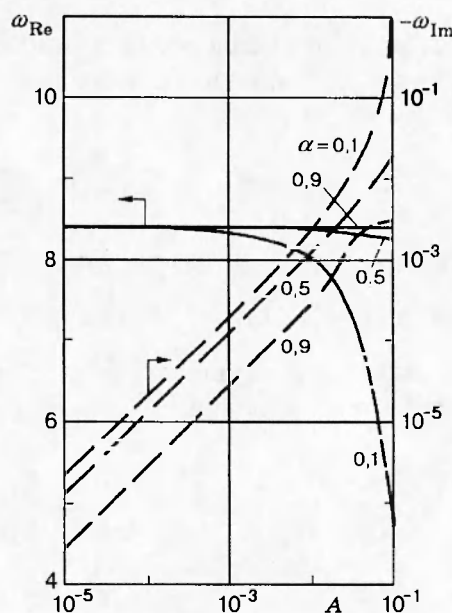


Рис. 1

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) для  $\alpha = 0,9$  действительная часть комплексной частоты не зависит от параметра  $A$  и равна собственной частоте упругих колебаний, аналогичная тенденция прослеживается и при  $\alpha = 0,5$ , если  $A < 10^{-2}$ , после чего  $\omega_{Re}$  начинает незначительно уменьшаться;

2) при малых  $\alpha$  поведение  $\omega_{Re}$  становится сложнее: для  $A < 10^{-3}$  величина  $\omega_{Re}$  остается постоянной, после чего резко убывает;

3) мнимая часть комплексной частоты при всех  $\alpha$  растет с увеличением параметра  $A$ , причем вначале возрастание происходит по линейному закону. Затем линейный закон нарушается, и отклонение от него происходит по-разному в зависимости от значений  $\alpha$  и упругих констант: для  $\alpha = 0,1$  скорость роста  $\omega_{Im}$  увеличивается, а для  $\alpha = 0,9$  после небольшого повышения происходит снижение скорости роста вплоть до выхода на горизонтальную асимптоту (см., например, кривую для  $\alpha = 0,9$ ). В то же время для  $\alpha = 0,5$  линейная зависимость  $\omega_{Im}$  от  $A$  сохраняется почти во всем диапазоне изменения параметров.

2. Решения (1.7) и (1.8) могут быть очевидным путем обобщены на случай многослойной сферы [9]. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (c_i(r_{i-1})b_i(r_{i-1}) - d_i(r_{i-1})a_i(r_{i-1}))^{-1} \quad (i = \overline{1, N}), \\ a_i(r_{i-1}) &= -\frac{\varepsilon_i^2}{r_{i-1}} \cos(\varkappa_i r_{i-1}) + \frac{\varkappa_i}{r_{i-1}^2} \sin(\varkappa_i r_{i-1}), \\ b_i(r_{i-1}) &= -\frac{\varkappa_i^2}{r_{i-1}^2} \cos(\varkappa_i r_{i-1}) - \frac{\varkappa_i}{r_{i-1}} \sin(\varkappa_i r_{i-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} c_i(r_{i-1}) &= \left[ \frac{4\mu_i \varkappa_i}{r_{i-1}} \cos(\varkappa_i r_{i-1}) - \left( \frac{4\mu_i}{r_{i-1}^2} - \varkappa_i^2 (\lambda_i + 2\mu_i) \right) \sin(\varkappa_i r_{i-1}) \right] \frac{\varkappa_i}{r_{i-1}}, \\ d_i(r_{i-1}) &= \left[ \frac{4\mu_i \varkappa_i}{r_{i-1}} \sin(\varkappa_i r_{i-1}) + \left( \frac{4\mu_i}{r_{i-1}^2} - \varkappa_i^2 (\lambda_i + 2\mu_i) \right) \cos(\varkappa_i r_{i-1}) \right] \frac{\varkappa_i}{r_{i-1}}; \\ \Lambda_i &= \Delta_i \begin{pmatrix} a_i(r_i) & ib_i(r_i) \\ c_i(r_i) & id_i(r_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_i(r_{i-1}) & b_i(r_{i-1}) \\ -ic_i(r_{i-1}) & ia_i(r_{i-1}) \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u_N(r_N) \\ \sigma_N(r_N) \end{pmatrix} = \Lambda_N \Lambda_{N-1} * \dots * \Lambda_1 \begin{pmatrix} u_1(r_0) \\ \sigma_1(r_0) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{pmatrix} u_N(r_N) \\ \sigma_N(r_N) \end{pmatrix} = G_N \begin{pmatrix} u_1(r_0) \\ \sigma_1(r_0) \end{pmatrix} \quad \left( G_N = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \Lambda_N \Lambda_{N-1} * \dots * \Lambda_1 \right). \quad (2.4)$$

При этом выполняются граничные условия

$$\sigma_N(r_N) = \sigma_1(r_0) = 0, \quad (2.5)$$

соответствующие условиям (1.4) с  $r_0 = R_1$ ,  $r_N = R_2$ .

Эти решения используем для анализа поведения вязкоупругих конструкций, цель которого заключается в демонстрации возможности управления их демпфирующими характеристиками с помощью методов, применяемых для синтеза упругих конструкций.

Вначале рассмотрим сферу, состоящую из двух материалов с одинаковыми вязкоупругими параметрами ( $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $A = 0,01$ ), но с различными упругими характеристиками: плотность и параметры Ламе первого (внутреннего) слоя отвечают третьему

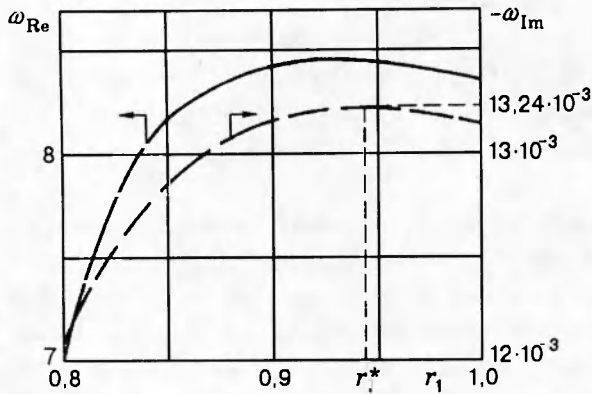


Рис. 2

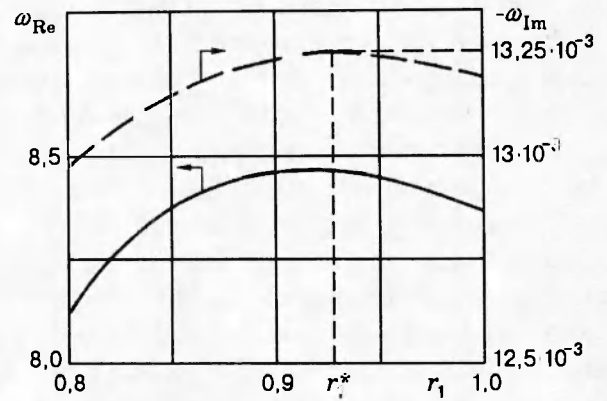


Рис. 3

материалу, а второго (наружного) слоя — первому материалу таблицы. Внутренний и внешний радиусы сферы соответственно  $r_0 = 0,8$  м,  $r_N = 1,0$  м. Зависимость вещественной  $\omega_{Re}$  и мнимой  $\omega_{Im}$  частей собственной частоты  $\omega$  от координаты границы раздела вязкоупругих слоев  $r_1$  показана на рис. 2 (обозначения те же, что и на рис. 1). Наибольшее затухание, т. е. максимум  $\omega_{Im} = -13,24 \cdot 10^{-3}$ , обеспечивает двухслойная конструкция, для которой  $r_1^* = 0,944$  м. Такое же затухание обеспечивает двухслойная конструкция, у которой внешний слой заполнен вторым материалом. При этом координата границы раздела внутреннего (из третьего материала) и внешнего слоев  $r_1^* = 0,928$  (рис. 3).

На рис. 4 приведена зависимость  $\omega_{Re}$  и  $\omega_{Im}$  от  $r_1$ , когда плотность и параметры Ламе первого слоя отвечают первому материалу, а второго слоя — третьему материалу. В этом случае наибольшим затуханием обладает однослойная сфера, заполненная третьим материалом ( $\omega_{Im} = -13,18 \cdot 10^{-3}$ ).

Результаты, показанные на рис. 2–4, свидетельствуют о том, что варьирование толщины и порядка расположения вязкоупругих слоев позволяет управлять демпфирующими свойствами, причем наибольшее затухание обеспечивает двухслойная конструкция. Практически такое же затухание ( $\omega_{Im} = -13,25 \cdot 10^{-3}$ ) обеспечивает трехслойная конструкция: слой  $r_0 = 0,8$ ,  $r_1 = 0,944$  заполнен третьим материалом, следующий слой до  $r_2 = 0,976$  — вторым материалом, а внешний слой до  $r_N = 1,0$  — первым материалом (рис. 5).

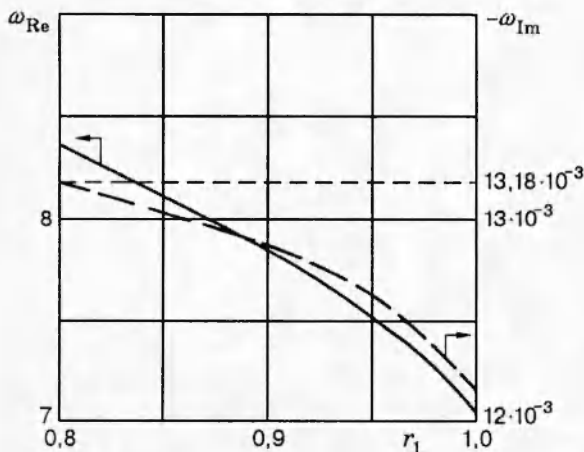


Рис. 4

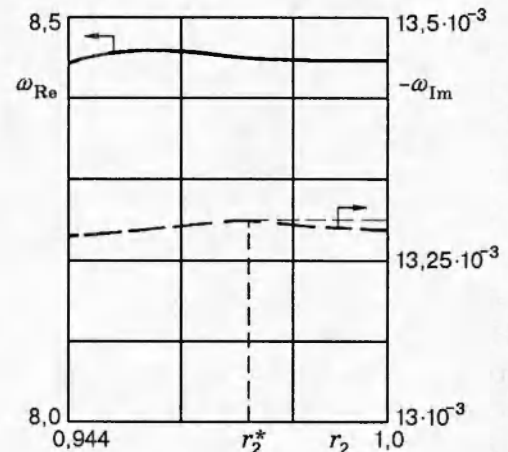


Рис. 5

Основной вывод, который можно сделать на основе результатов этого вычислительного эксперимента, заключается в положительном ответе на вопросы, поставленные вначале: многослойные вязкоупругие конструкции могут обеспечить лучшее затухание собственных колебаний, чем однослойные. Конечно, этот вывод справедлив для принятых значений реологических параметров и вида ядра релаксации. Таким образом, дальнейшие исследования могут вестись по двум направлениям:

1) получить априорные оценки целесообразности постановки задачи синтеза многослойных конструкций из конечного набора вязкоупругих материалов в терминах реологических характеристик;

2) решить задачу синтеза в полной постановке, когда варьируется вся совокупность параметров, определяющих структуру конструкции: физические свойства материалов слоев, толщины слоев, а также их общее число.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987.
2. Гусев Е. Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993.
3. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989.
4. Алехин В. В. Оптимальное проектирование неоднородно-упругих и слоистых тел: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1986.
5. Колтунов М. А., Майборода В. П., Кравчук А. С. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. шк., 1983.
6. Филатов А. М. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974.
7. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
8. Майборода В. П., Трояновский И. Е. Собственные колебания неоднородных вязкоупругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 117-123.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 22/XI 1995 г.*

---