ПМТФ, № 4, 1974

УДК 539.374

НЕКОТОРЫЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Рассматриваются упругопластические задачи для бесконечной перфорированной плоскости с квадратной сеткой круговых отверстий. Предполагается, что уровень напряжений и шаг сетки таковы, что круговые отверстия охватываются соответствующей пластической зоной, но в то же время соседние пластические области не сливаются. Упругопластическая задача для треугольной решетки в предположении, что материал в упругой и пластической области однороден, рассмотрена в [1].

Пусть имеется двоякопериодическая квадратная решетка с круговыми отверстиями, имеющими радиус R $(R < 1)$ и центры в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\omega_1 = 2, \ \omega_2 = 2i$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_{mn} через L_{mn}, соответствующую упругопластическую границу через Γ_{mn}, а внешность контуров Γ_{mn} через D_z.

На контуре отверстия L_{mn} граничные условия имеют вид

$$\sigma_r = -p, \ \tau_{r\theta} = 0 \tag{1}$$

Будем считать, что поле напряжений в пластической зоне имеет вид

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C, \tag{2}$$
$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

где A, B и C — некоторые постоянные величины.

Осесимметричное поле напряжений (2), удовлетворяющее уравнениям равновесия, характеризуется тем, что соответствующим подбором постоянных позволяет удовлетворить некоторым условиям пластичности (см. ниже), учитывающим пластическую неоднородность, т. е. зависимость предела текучести от координаты r и от главных напряжений σ_θ и σ_r. В то же время для такого поля напряжений применяемый метод [1], представляющий собой объединение метода решения двоякопериодической упругой задачи [2] с методом, предложенным в [3] для решения задач теории упругости и пластичности с неизвестной границей при одиночном отверстии, позволяет получить эффективное решение упругопластической задачи.

На неизвестном контуре Γ_{mn}, разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Используя формулы (2) и соотношения Колосова — Мусхелишвили [4], получим на контуре Γ_{00} условия

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = \frac{1}{2}B\ln z\bar{z} + (B + C), \quad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = B\frac{\bar{z}}{z} - \frac{A}{z^2} \tag{3}$$

Перейдем на параметрическую плоскость ζ с помощью преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция $z = \omega(\zeta)$ осуществляет конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости ζ, являющуюся внешностью окружностей γ_{mn} радиуса λ, с центрами в точках P_{mn}.

Для определения трех аналитических функций ($\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$) получаем нелинейную краевую задачу на γ_{00}

$$\operatorname{Re}\varphi(\zeta) = B + C + \frac{1}{2}B\ln\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} \tag{4}$$

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = B\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} - \frac{A}{[\omega(\zeta)]^2} \tag{5}$$

Решая задачу Дирихле (4), найдем, что в области D_ζ

$$\varphi(\zeta) = B + C + \frac{1}{2}B\ln\omega(\zeta) - \frac{1}{2}B\ln\frac{\zeta}{\lambda} \tag{6}$$

Учитывая (6), граничное условие (5) можно преобразовать к виду

$$\omega'(\zeta)\,\omega^2(\zeta)\,\psi(\zeta) = B\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta}\omega^2(\zeta) - A\omega'(\zeta) \tag{7}$$

Искомые функции ищем в виде рядов [1,2]

$$\varphi(\zeta) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} \tag{8}$$

$$\psi(\zeta) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \tag{9}$$

$$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \tag{10}$$

где $\gamma(\zeta)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(\zeta)$ — специальная мероморфная функция

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} + \sum_{m,n}{}'\left[\frac{1}{(\zeta - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2}\right]$$

$$Q(\zeta) = \sum_{m,n}{}'\left[\frac{\bar{P}_{mn}}{(\zeta - P_{mn})^2} - 2\zeta\frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^2}\right]$$

$$(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (8) — (10). Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D_ζ, следует, что

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{8}\lambda^2\beta_2, \quad \beta_0 = 0 \tag{11}$$

Условия симметрии для квадратной решетки приводят к соотношениям

$$\beta_{4k} = A_{4k+2} = 0 \quad \text{при } k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{12}$$

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов выражений (8) — (10) функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $\zeta = 0$

(13) $$\varphi(\zeta) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{4k}\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{4k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{4k}\lambda^{4k} \sum_{j=0}^{\infty} r_{2j,\,2k-1}\zeta^{4j}$$

(14) $$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{4k+2}\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{4k+2}\lambda^{4k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{2j+1,\,2k}\,\zeta^{4j+2} - $$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} 4k\alpha_{4k}\lambda^{4k} \sum_{j=0}^{\infty} S_{2j+1,\,2k-1}\zeta^{4j+2}$$

(15) $$\omega(\zeta) = \zeta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{4k}\lambda}{(4k-1)}\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{4k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{4k}\lambda^{4k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{2j,\,2k-1}}{4j+1}\zeta^{4j+1}$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!\,g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}}, \quad g_j = {\sum_{m,\,n}}' \frac{1}{T^{2j}}$$

$$S_{j,\,k} = \frac{(2j+2k+2)!\,\rho_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\,2^{2j+2k+2}}, \quad \rho_j = {\sum_{m,\,n}}' \frac{\bar{T}}{T^{2j+1}}, \quad T = \frac{P_{mn}}{2}$$

Подставив в граничные условия (4), (7) на контуре $\gamma_{00}(\zeta = \lambda e^{i\theta})$ вместо $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ их разложения в ряды Лорана и сравнив коэффициенты при $e^{i4k\theta}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно α_{4k}, β_{4k+2}, A_{4k} (условие (4) было предварительно продифференцировано по θ). Ниже приводятся уравнения первого приближения

(16) $$Xc_1 + Yc_2 + Zc_3 = B(ac_1 + c_2 b + c_3 c_4) - \frac{Aa}{\lambda^2}$$
$$Xc_3 + Yc_1 = B(bc_1 + ac_3) - \frac{AA_4}{\lambda^2}$$
$$Xc_2 + Zc_1 = B(c_1c_4 + ac_2) - AA_4 r_{2,\,1}\lambda^6, \quad \alpha_4(1 + \lambda^8 r_{2,1})\,d = -Bd_1$$
$$X = a\beta_2 + A_4\gamma_0 + A_4\beta_6\lambda^8 r_{2,\,1}, \qquad Y = a\beta_6 + A_4\beta_2$$
$$Z = a\gamma_0 + A_4\gamma_1 + A_4\beta_2\lambda^8 r_{2,\,1}, \qquad a = 1 + A_4\lambda^4 r_{0,\,1}$$
$$c_1 = a^2 - \frac{2A_4^2\lambda^8 r_{2,1}}{15}, \qquad c_2 = \frac{2}{5}aA_4\lambda^8 r_{2,\,1}$$
$$c_3 = -\frac{2}{3}aA_4, \qquad c_4 = -\frac{1}{3}A_4, \qquad b = \frac{1}{5}A_4\lambda^8 r_{2,1}$$
$$d = a^2 + A_4^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25}\lambda^{16} r_{2,1}^2\right), \qquad d_1 = aA_4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\lambda^8 r_{2,1}\right)$$
$$\gamma_j = \beta_2 r_{2j+1,\,0}\lambda^{4j+4} + \beta_6 r_{2j+1,\,2}\lambda^{4j+8} - 4\alpha_4 S_{2j+1,\,1}\lambda^{4j+6} \quad (j = 0, 1)$$

Для получения соотношения, связывающего параметр λ с приложенной нагрузкой p, подставим формулы (8) и (10) в краевое условие (4), умножим полученное выражение на $1 / 2\pi i\zeta$ и проинтегрируем по круговому контуру γ_{00}.

В результате получим [4]

(17) $$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{4k}\lambda^{4k} r_{0,\,2k-1} = B + C + B\ln\lambda\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{4k}\lambda^{4k} r_{0,\,2k-1}\right]$$

Граничные условия на контуре отверстия L_{mn} (1) и условия текучести определяют величины A, B и C.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Условие пластичности Треска — Сен-Венана или Губера — Мизеса. Пусть в пластической зоне выполняются соотношения $|\sigma_\theta - \sigma_r| = 2K$ (K — постоянная пластичности).

В этом случае согласно (1), (2) имеем

$$A = 0, \quad B = \varepsilon K, \quad C = -\frac{p}{2} - \frac{\varepsilon K}{2}(1 + 2\ln R) \tag{18}$$

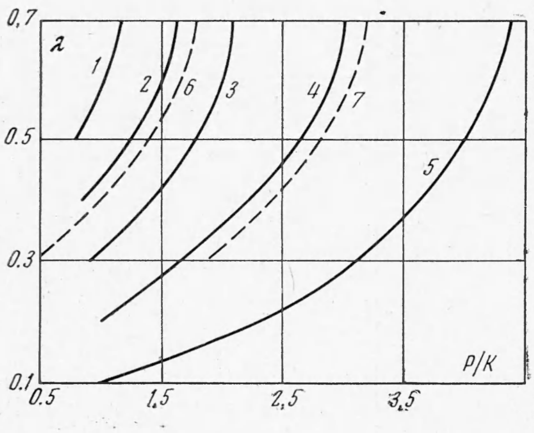
Здесь $\varepsilon = \pm 1$ выбирается из физических соображений.

Результаты расчета в первых двух приближениях даны в табл. 1.

Таблица 1

λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
			Первое приближение			
β_2/K	1.0000	1.0000	1.0006	1.0026	1.0059	1.0431
β_6/K	0.0028	0.0142	0.0425	0.0878	0.1298	0.2671
A_4	—0.0028	—0.0142	—0.0424	—0.0876	—0.1289	—0.2634
α_4/K	0.0009	0.0047	0.0141	0.0291	0.0424	0.0956
			Второе приближение			
β_2/K	1.0000	1.0000	1.0006	1.0026	1.0059	1.0634
β_6/K	0.0028	0.0142	0.0425	0.0879	0.1299	0.2423
β_{10}/K	0	0.0003	0.0022	0.0083	0.0084	0.0147
A_4	—0.0028	—0.0142	—0.0424	—0.0876	—0.1294	—0.2357
A_8	0	0	—0.0004	—0.0006	0.0085	0.0208
α_4/K	0.0009	0.0047	0.0141	0.0291	0.0425	0.1236
α_8/K	0	0	0.0002	0.0003	—0.0036	—0.0107

На фигуре представлены зависимости (сплошной линией) параметра λ от величины приложенной нагрузки p/K для некоторых значений радиуса отверстия $R = 0.5$, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 (кривые *1—5*)



Неоднородно - пластический материал. Пусть теперь условие пластичности имеет вид [5]

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\left[K_0 + K_1\left(\frac{R}{r}\right)^2\right] \tag{19}$$

Здесь K_0 и K_1 — постоянные материала.

Это условие пластичности можно рассматривать как обычное условие Треска — Сен-Венана с пределом текучести, зависящим от радиуса. В этом случае согласно (1) и (2) имеем

$$A = -K_1R^2, \quad B = K_0, \quad C = \frac{1}{2}(K_1 - K_0 - p - 2K_0\ln R) \tag{20}$$

Результаты расчета во втором приближении даны в табл. 2 для следующих значений параметров неоднородности: $K_1R^2/K_0 = 0.09, -0.045$.

На фигуре кривыми *6*, *7* для сравнения представлены зависимости параметра λ от величины нагрузки p/K_0 при $R = 0.3$ для следующих значений параметров неоднородности: $K_1/K_0 = 1$, -0.5 соответственно.

Таблица 2

λ	0.2	0.3	0.4	0,5	0.6	0.7
β_2/K_0	3.25	2.0004	1.5654	1.3664	1.2625	1.1957
β_6/K_0	0.0009	0.017	0.0515	0.1028	0.1472	0.2847
β_{10}/K_0	0	0.0007	0.0044	0.0134	0.0101	0.0191
A_4	−0.0092	−0.0284	−0.0663	−0.1192	−0.1622	−0.2901
A_8	0	−0.0001	−0.0006	−0.0008	−0.0109	0.0207
α_4/K_0	0.0031	0.0095	0.0221	0.0396	0.0532	0.1471
α_8/K_0	0	0	0.0002	0.0003	−0.0046	−0.0127
β_2/K_0	−0.125	0.5	0.7189	0.8213	0.8785	0.9147
β_6/K_0	−0.0005	0.0085	0.0339	0.0771	0.119	0.2213
β_{10}/K_0	0	0	0.0012	0.006	0.007	0.0132
A_4	0.0003	−0.0071	−0.0305	−0.0717	−0.113	−0.2149
A_8	0	0	−0.0003	−0.0005	0.0073	0.0167
α_4/K_0	−0.0001	0.0024	0.0102	0.0238	0.0371	0.1138
α_8/K_0	0	0	0.0001	0.0002	−0.0031	−0.0093

Экспоненциальное условие текучести. Пусть условие пластичности имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2K\left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_0}{K} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2K}\right)\right] \tag{21}$$

Здесь $K > 0$ и $\sigma_0 > 0$ — постоянные материала, имеющие размерность напряжений.

Это условие текучести описывает предельное состояние некоторых горных пород [6]. В этом случае согласно (1), (2) имеем

$$A = -Ke^{-2}t^{-2}R^2, \quad B = -K, \quad C = \frac{\sigma_0}{2} - K\ln tR^{-1} \tag{22}$$

где t — постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$K^{-1}(\sigma_0 + p) - 1 = e^{-2}t^{-2} + 2\ln t \quad (t > e^{-1})$$

Более общие условия текучести. Пусть имеют место следующие условия текучести в пластической зоне [7]

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\left[K + \frac{b}{r^2} - K\exp\left(-\frac{\sigma_0}{K} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2K}\right)\right] \tag{23}$$

или

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\left[K + \frac{b}{r^2} - \frac{K}{r}\exp\left(-\frac{\sigma_0}{K} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{4K}\right)\right] \tag{24}$$

В этом случае согласно (1), (2) постоянные A, B и C будут иметь значения:

для условия (23)

$$A = b - Ke^{-2}t^{-2}R^2, \quad B = -K, \quad C = \frac{\sigma_0}{2} - K\ln tR^{-1} \tag{25}$$

где t — постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$K^{-1}\left(\sigma_0 + p + \frac{b}{R^2}\right) - 1 = e^{-2}t^{-2} + 2\ln t \quad (t > e^{-1})$$

для условия (24)

$$A = b - Ke^{-1}t^{-2}R^2, \quad B = -K, \quad C = \sigma_0 + K\ln(t^{-2}R^2) \tag{26}$$

где t — постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$K^{-1}\left(2\sigma_0 + p + \frac{b}{R^2}\right) - 1 + 2\ln R = 4\ln t + e^{-1}t^{-2} \quad (t > e^{-1})$$

Положив в (15) $\zeta = \lambda e^{i\theta}$, получим уравнение упругопластической границы

$$r = |\,\omega(\lambda e^{i\theta})\,| = f(\theta)$$

В первом приближении

$$r^2 = \lambda^2 (d - 2d_1\cos 4\theta) \tag{27}$$

причем

$$r_{\max} = \lambda\left[1 + A_4\left(-\frac{1}{3} + \lambda^4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{2j,1}}{4j+1}\lambda^{4j}\right)\right] \tag{28}$$

$$r_{\min} = \lambda\left[1 + A_4\left(\frac{1}{3} + \lambda^4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j r_{2j,1}}{4j+1}\lambda^{4j}\right)\right] \tag{29}$$

Из условия $r_{min} \geqslant R$ определяется наименьшая нагрузка, при которой контур отверстия целиком охватывается пластической зоной. Соотношение (28) при $r_{\max} \leqslant 1$ позволяет найти наибольшую нагрузку, при которой пластические зоны касаются одна другой.

Автор благодарит Л. А. Галина за обсуждение работы.

Поступила 4 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной двояко-периодической системой круглых отверстий. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
2. *Григолюк Э. И., Фильштинский А. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
3. *Галин Л. А.* Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Кузнецов А. И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел. Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, вып. 3, № 13.
6. *Аннин Б. Д.* Одна плоская упруго-пластическая задача при экспоненциальном условии текучести. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
7. *Рева Т. Л.* О бигармонических решениях задач для упруго-пластических тел. Прикл. механ., 1971, т. 7, № 4.