# СВЕРХЗВУКОВОЕ НЕРАВНОВЕСНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ОКОЛО ТОНКИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

***Р. А. Ткаленко*** (*Москва*)

Рассматривается сверхзвуковое течение газа, в котором одновременно протекает несколько неравновесных химических реакций, около тонких тел вращения.

Посредством преобразования Лапласа получено решение вблизи начальной замороженной линии Маха и выражение для потенциала возмущений. Выведена формула для расчета коэффициента давлений. В случае тонкого конуса приведены численные расчеты.

§ 1. Рассматривается сверхзвуковое установившееся течение невязкого газа, в котором одновременно протекает $N$ неравновесных химических реакций, около тонких тел вращения. Невозмущенный поток находится в состоянии химического равновесия.

Предполагается, что время установления равновесия по колебательным степеням свободы молекул намного меньше времени установления химического равновесия, т. е. колебательной релаксацией можно пренебречь.

Пусть $x$ и $r$ — оси цилиндрической системы координат (фиг. 1) с центром в вершине тела вращения, $u$ и $v$ — составляющие скорости $W$ вдоль этих осей, $p$ — давление, $\rho$ — плотность, $h$ — энтальпия, имеем

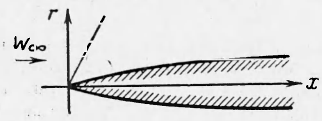
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{W^2}{2} + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{W^2}{2} - u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad \text{(уравнения сохранения количества движения)} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0 \qquad \text{(уравнение неразрывности)} \qquad (1.2)$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{W^2}{2}\right) + v\frac{\partial}{\partial r}\left(h + \frac{W^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{(уравнение энергии)} \qquad (1.3)$$

$$h = h(\rho, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \text{(уравнение состояния)} \qquad (1.4)$$

где $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — массовые концентрации компонент, образующихся в результате химических реакций.




Фиг. 1

К уравнениям (1.1) — (1.4) следует добавить уравнение сохранения массы для каждой компоненты [1] (1.5)

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_{ik}}{\tau_k}\,\omega_k(\rho, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Здесь $c_{ik}$ — стехиометрические коэффициенты, $\omega_k$ — функции, описывающие кинетику, $\tau_k$ — времена релаксаций химических реакций.

Если поток заморожен, то $\alpha_i \equiv \mathrm{const}$, и система уравнений (1.5) должна быть заменена системой

$$\alpha_1 = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \alpha_n = \mathrm{const}$$

В случае равновесного потока

$$\omega_k(\rho, p, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv 0 \qquad (k = 1, \ldots, N) \qquad (1.6)$$

В этой системе $N-n$ уравнений являются зависимыми. Вместо (1.5) получается

$$\alpha_1 = \alpha_1(\rho, p), \ \ldots, \ \alpha_n = \alpha_n(\rho, p)$$

Уравнения (1.1) — (1.5) образуют замкнутую систему. Граничные условия формулируются ниже.

§ 2. В случае обтекания тонких тел возмущения, вызванные присутствием этих тел в потоке, малы и уравнения, описывающие течение газа, могут быть линеаризованы. Линеаризация достигается разложением всех параметров потока в асимптотические ряды и пренебрежением всеми членами ряда за исключением первых двух. Если $g$ — произвольный параметр, то

$$g \sim g_\infty + g', \qquad g' \ll g_\infty \qquad (2.1)$$

Значения $g_\infty$ соответствуют параметрам набегающего потока.

Вид уравнений (1.1) — (1.3) не зависит от присутствия химических реакций в потоке. Линеаризация этих уравнений [2], дает зависимость $\rho'$, $p'$ и $h'$ от возмущения скорости $u'$, а также условие отсутствия вихрей в потоке, т. е. условие существования потенциала возмущений $\varphi$

$$u' = \partial\varphi \,/\, \partial x, \qquad v' = \partial\varphi \,/\, \partial r$$

Уравнение (1.4) после линеаризации запишется

$$h' = h_\rho \rho' + h_p p' + \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i' \tag{2.2}$$

где

$$h_\rho = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p,\alpha_i}, \qquad h_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho,\alpha_i}, \qquad h_i = \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha_i}\right)_{\rho,p,\alpha_j}$$

и вычисляются по параметрам невозмущенного потока.

Из уравнения (2.2) и уравнений, получающихся после линеаризации (1.1) — (1.3), можно получить

$$(M_f^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{W_\infty}{\rho_\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h_\rho}\frac{\partial\alpha_i'}{\partial x} \tag{2.3}$$

Здесь $M_f = W_\infty \,/\, a_f$ — число Маха, $a_f$ — замороженная скорость звука [3]. Линеаризация уравнений (1.5) дает

$$W_\infty \frac{\partial\alpha_i'}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_{j+}' - \alpha_j'}{\tau_{ij}} \qquad \left(\tau_{ij} = \left[-\sum_{k=1}^{N}\frac{c_{ik}}{\tau_{k\infty}}\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial\alpha_j}\right)_{\rho,p,\alpha_i}\right]^{-1}\right) \tag{2.4}$$

Здесь $\alpha_{j+}$ — местные фиктивные равновесные массовые концентрации [3], формально удовлетворяющие системе уравнений (1.6). Если в потоке все реакции, кроме $j$-й, заморожены, то равновесная скорость звука определяется выражением [3]

$$a_j^2 = -\frac{h_\rho + h_j\alpha_{j\rho}}{h_p + h_j\alpha_{jp} - \rho^{-1}}$$

Введем обозначения

$$\varkappa_j = \frac{h_\rho}{h_\rho + \alpha_{j\rho}h_j}, \qquad M_j = \frac{W_\infty}{a_j}, \qquad \Delta_j = (M_j^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

После линеаризации системы уравнений (1.6) можно получить

$$\frac{W_\infty}{\rho_\infty}\frac{h_j}{h_\rho}\frac{\partial\alpha_{j+}'}{\partial x} = \frac{\Delta_j}{\varkappa_j} - \Delta_f \tag{2.5}$$

где через $\Delta_f$ обозначена левая часть уравнения (2.3).

Если из уравнений (2.3) — (2.5) исключить $\alpha_j'$ и $\alpha_{j+}'$, то можно получить уравнение для потенциала возмущений $\varphi$. Это будет сделано ниже.

В качестве граничных условий принимаются следующие

$$\varphi = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \text{ограничен при } r \to \infty, \end{cases} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = W_\infty\frac{dR}{dx} \quad \text{при } r = R\,(x) \tag{2.6}$$

где $r = R\,(x)$ — уравнение образующей тела вращения. Последнее уравнение выражает тот факт, что контур тела будет линией тока.

§ 3. В дальнейшем для решения перейдем к новым независимым переменным

$$\xi = \frac{x}{l} - \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{l}\,r, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{l}\,r$$

где $l$ — некоторая характерная длина, и вместо размерных величин $\varphi$, $p'$, $u'$, $h'$, $x$, $r$ и т. д. без изменения написания употреблять безразмерные величины

$$\frac{\varphi}{lW_\infty}, \quad \frac{p'}{\rho_\infty W_\infty^2}, \quad \frac{u'}{W_\infty}, \quad \frac{h'}{W_\infty^2}, \quad \frac{x}{l}, \quad \frac{r}{l} \quad \text{и т. д.}$$

В новых переменных выражение для $\Delta_j$ можно записать

$$\Delta_j = (M_f^2 - 1)\left[(b_j - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\right] \tag{3.1}$$

В выражении (3.1)

$$b_j = (M_j^2 - 1) \,/\, (M_f^2 - 1), \qquad b_f \equiv 1$$

Система уравнений (2.3) — (2.5) является системой $2n + 1$ линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Ее можно решить преобразованием Лапласа [4]. В соответствии с этим методом переход от оригинала $\varphi(\xi, \zeta)$ к изображению $\Phi(s, \zeta)$ осуществляется формулой

$$L[\varphi(\xi, \zeta)] = \Phi(s, \zeta) = \int_0^\infty \exp(-s\xi)\, \varphi(\xi, \zeta)\, d\xi$$

Применяя преобразование Лапласа к (3.1) и считая, что

$$\varphi(0, \zeta) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\Big|_{\xi=0} \equiv 0 \tag{3.2}$$

(справедливость этого допущения будет доказана ниже), можно получить

$$L[\Delta_j] = -(M_f^2 - 1)\Lambda_j = -(M_f^2 - 1)\{\Phi'' - (2s - \zeta^{-1})\Phi' - $$
$$- s[s(b_j - 1) + \zeta^{-1}]\Phi\}$$

В этом соотношении дифференцирование производится по переменной $\zeta$, а $s$ рассматривается как параметр.

Приводя к безразмерному виду систему уравнений (2.3) — (2.5), применяя преобразование Лапласа и исключая из уравнений $L[\alpha_{j+}']$, получим

$$h_1 X_1 + \ldots + h_n X_n = \Lambda_f \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \left(X_j = L\left[\frac{h_\rho^{-1}}{M_f^2 - 1}\frac{\partial \alpha_j'}{\partial \xi}\right]\right)$$

$$\frac{X_1}{\tau_{i1}} + \ldots + \left(s + \frac{1}{\tau_{ii}}\right) X_i + \ldots + \frac{X_n}{\tau_{in}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_{ij} h_j}\left(\frac{\Lambda_j}{\varkappa_j} - \Lambda_f\right) \tag{3.3}$$

В процессе выкладок использовалось $\alpha_j'(0, \zeta) \equiv \alpha_{j+}'(0, \zeta) \equiv 0$, так как набегающий поток находится в равновесном состоянии.

Эта система $n + 1$ линейных уравнений определяет $n$ неизвестных функций $X_j$. Для существования нетривиального решения необходимо и достаточно равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов при $X_j$ и свободных членов. Это дополнительное условие служит для определения потенциала $\varphi$.

После несложных преобразований детерминант $n + 1$ порядка системы уравнений (3.3) можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{h_j}{\tau_{ji}}\right) q_i = -\Lambda_f$$

$$\varkappa_i h_i s q_i + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\varkappa_j h_j}{\tau_{ij}} - (\varkappa_j - 1)\sum_{m=1}^n \frac{h_m}{\tau_{mj}}\right] q_j = s^2 (b_i - 1)\Phi \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(ввиду громоздкости детерминанта записывается система уравнений с неизвестными $q_i$, детерминант которой будет искомым).

Функция $\Phi$ содержится только в последнем столбце детерминанта, а $\Phi'$ и $\Phi''$ — только в последнем члене верхней строки (входят в $\Lambda_f$). Разложение по последнему столбцу дает

$$\zeta\Phi'' - (2s\zeta - 1)\Phi' - s[s(B - 1)\zeta + 1]\Phi = 0 \tag{3.4}$$

$$B = [\delta_0(s) + \delta_1(s)(b_1 - 1) + \ldots + (-1)^{n+1}\delta_n(s)(b_n - 1)] \,/\, \delta_0(s)$$

Здесь $\delta_i(s)$ — соответствующие детерминанты $n$-го порядка, получающиеся в процессе разложения.

Подстановка $\Phi = y(s, \zeta)\exp(s\zeta)$ приводит (3.4) к уравнению Бесселя [5]

$$\zeta y'' + y' - s^2 \zeta B y = 0$$

Из граничных условий (2.6) следует, что решение должно быть ограниченным на бесконечности. Единственным решением, удовлетворяющим этому условию, будет модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка $K_0(z)$. Причем должно быть $B > 0$. Обозначая $\sigma^2 = B$, получим

$$\Phi(s, \zeta) = A(s) \exp(s\zeta) K_0(s\sigma\zeta) \tag{3.5}$$

Постоянная $A(s)$ определяется из граничного условия на стенке (2.6).

Для изображений скоростей возмущенного потока $u'$ и $v'$ можно получить

$$U = s\Phi = A(s)\, s \exp(s\zeta) K_0(s\sigma\zeta)$$

$$V = \sqrt{M_f^2 - 1}\,(\Phi' - s\Phi) = -\sqrt{M_f^2 - 1}\, A(s)\, s\sigma \exp(s\zeta) K_1(s\sigma\zeta) \tag{3.6}$$

где $K_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка.

Пусть в пространстве оригиналов функции $A(s)$ соответствует некоторая функция $f(\xi)$, взятая с обратным знаком

$$L^{-1}[A(s)] = -f(\xi) \tag{3.7}$$

Если в потоке отсутствуют химические реакции, то $b_j \equiv 1$, $\sigma \equiv 1$ и, пользуясь обратным преобразованием Лапласа

$$L^{-1}[s^{-1}\exp(s\zeta) K_0(s\zeta)] = \ln\left[1 + \frac{\xi}{\zeta} + \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{\zeta}\right)^2 - 1}\right]$$

можно получить

$$L^{-1}[\Phi(s, \zeta)] = \varphi(\xi, \zeta) = -\int_0^{\xi/\zeta} \frac{f(\zeta z)\, dz}{\sqrt{(1 + \xi/\zeta - z)^2 - 1}} \tag{3.8}$$

Это известное решение для потенциала возмущений в обычной линейной теории [2]. Функция $f(\xi)$, стоящая в правой части уравнения (3.8), известна как функция распределения интенсивности источников. Для остроконечных тел, рассматриваемых в данной работе, можно считать

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) \neq 0$$

§ 4. Величина $\sigma^2$ представляет собой рациональную дробь, у которой числитель и знаменатель многочлены $n$-й степени относительно $s$. Используя условие ограниченности решения на бесконечности, можно показать, что все действительные корни многочленов будут отрицательными. В данной работе рассматривается случай только действительных корней многочленов.

Пусть $-s_i'$ — корни многочлена, стоящего в числителе, а $-s_i$ — корни многочлена в знаменателе, тогда

$$\sigma = \left[\frac{(s + s_1') \ldots (s + s_n')}{(s + s_1) \ldots (s + s_n)}\right]^{1/2} \tag{4.1}$$

При $s \to \infty$ можно получить

$$\sigma \sim 1 + s^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i' - s_i}{2} \qquad (s \to \infty)$$

Пользуясь этим соотношением и асимптотическим поведением функций Бесселя

$$K_n(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \exp(-z) \qquad (z \to \infty)$$

первое из соотношений (3.6) можно представить в виде

$$U \sim sA(s)\, s^{-1/2} \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2} \exp\left[-\zeta \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i' - s_i}{2}\right] \qquad (s \to \infty) \tag{4.2}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к обеим частям (4.2) (в соответствии с абелевыми теоремами) и учитывая соотношение (3.7), получим

$$u' \approx f'(0) \left(\frac{2\xi}{\zeta}\right)^{1/2} \exp\left[-\zeta \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i' - s_i}{2}\right] \qquad (\xi \to 0) \tag{4.3}$$

Это выражение показывает поведение скорости $u'$ вблизи начальной замороженной линии Маха ($\xi = 0$). Следует иметь в виду, что (4.3) имеет место только на некотором расстоянии от оси симметрии, так как разложение (4.2) обосновано при $\zeta > c$, где $c$ — некоторая положительная величина.

Из формулы (4.3) видно, что вблизи $\xi = 0$ возмущение скорости убывает по экспоненциальному закону ($\zeta \to \infty$).

Аналогичным способом получается выражение для составляющей скорости

$$v' \approx -\sqrt{M_f^2-1}\,f'(0)\left(\frac{2\xi}{\zeta}\right)^{1/2}\exp\left[-\zeta\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i'-s_i}{2}\right] \qquad (\xi\to 0) \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.3) и (4.4) видно, что $\varphi(0,\zeta)\equiv 0$, $\varphi_\xi'(0,\zeta)\equiv 0$, $\varphi_\zeta'(0,\zeta)\equiv 0$, т. е. дополнительное условие (3.2) оправдано.

§ 5. Для нахождения потенциала возмущений вблизи тонкого тела вращения (при малых $\zeta$) используется поведение функции $K_0(z)$ около нуля

$$K_0(s\sigma\zeta)\approx -\ln s-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{s+s_k'}{s+s_k}-\left(C+\ln\frac{\zeta}{2}\right) \tag{5.1}$$

где $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Подставим (5.1) в (3.5); применим методы операционного исчисления, используя для обратного преобразования Лапласа следующие формулы

$$L^{-1}[s^{-1}]=1,\qquad L^{-1}[s^{-1}\ln s]=-C-\ln\xi,\qquad L^{-1}[\exp(s\zeta)A(s)]=-f(\xi+\zeta)$$

$$L^{-1}\left[s^{-1}\ln\frac{s+s_k'}{s+s_k}\right]=\mathrm{Ei}(-s_k\xi)-\mathrm{Ei}(-s_k'\xi)+\ln\frac{s_k'}{s_k}$$

где $\mathrm{Ei}(-\xi)$ — интегральная показательная функция. В результате получим

$$\varphi(\xi,\zeta)=f(\xi+\zeta)\ln\frac{\zeta}{2}-\int_0^{\xi+\zeta}f'(\xi+\zeta-t)\ln t\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi+\zeta}f'(\xi+\zeta-t)\left[\mathrm{Ei}(-s_kt)-\mathrm{Ei}(-s_k't)+\ln\frac{s_k'}{s_k}\right]dt$$

Переходя к прежним независимым переменным $x$ и $r$ (безразмерным)

$$\varphi(x,r)=f(x)\ln\frac{\sqrt{M_f^2-1}}{2}r-\int_0^x f'(x-t)\ln t\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^x f'(x-t)\left[\mathrm{Ei}(-s_kt)-\mathrm{Ei}(-s_k't)+\ln\frac{s_k'}{s_k}\right] \tag{5.2}$$

Это выражение определяет потенциал возмущений для всех осесимметричных тонких тел произвольного профиля.

Чтобы найти вид функции $f(x)$ для тела заданной формы, необходимо использовать граничное условие (2.6). Из (5.2) следует

$$v'=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{f(x)}{r},\qquad f(x)=R\frac{dR}{dx} \tag{5.3}$$

Если $S=\pi R^2$ — площадь поперечного сечения тела вращения, то

$$f(x)=\frac{S'(x)}{2\pi} \tag{5.4}$$

Для нахождения коэффициента давления на поверхности тела следует пользоваться следующей формулой [2]

$$c_p = 2(p-p_\infty) = -2u' - v'^2$$

которая имеет место и в случае химически реагирующего газа. Принимая во внимание соотношения (5.2) — (5.5), можно получить

$$c_p=\frac{S''(x)}{\pi}\ln\frac{2}{r\sqrt{M_f^2-1}}+\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x S''(x-t)\ln t\,dt-$$

$$-\left(\frac{dR}{dx}\right)^2+\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\int_0^x S''(x-t)\left[\mathrm{Ei}(-s_kt)-\mathrm{Ei}(-s_k't)-\ln\frac{s_k'}{s_k}\right]dt \tag{5.5}$$

§ 6. В случае тонкого конуса $R'(x) = \theta$, где $\theta$ — полуугол при вершине конуса. Из (5.3) и (5.4) следует

$$f(x) = \theta^2 x, \qquad f'(x) = \theta^2, \qquad S''(x) = 2\pi\theta^2 \tag{6.1}$$

Для потенциала возмущений получается формула

$$\varphi(x, r) = -\theta^2 x \ln \frac{2x}{r\sqrt{M_f^2 - 1}} - 1 + $$

$$+ \frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \left[ \operatorname{Ei}(-s_k x) - \operatorname{Ei}(-s_k' x) + \ln \frac{s_k'}{s_k} \right] dx$$

Подстановка (6.1) в (5.5) дает выражение для коэффициента давления на тонком конусе

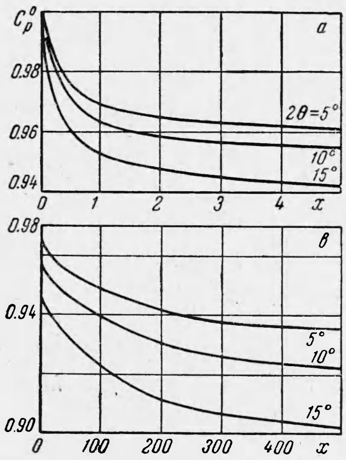
$$\frac{c_p}{\theta^2} = 2 \ln \frac{2}{\theta\sqrt{M_f^2 - 1}} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[ \operatorname{Ei}(-s_k' x) - \operatorname{Ei}(-s_k x) - \ln \frac{s_k'}{s_k} \right] \tag{6.2}$$

В случае отсутствия химических реакций в потоке ($\sigma \equiv 1$)

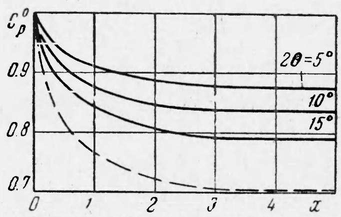
$$\frac{c_{p0}}{\theta^2} = 2 \ln \frac{2}{\theta\sqrt{M_f^2 - 1}} - 1$$

Это известная формула обычной теории малых возмущений.

На фиг. 2 представлена зависимость отношения $c_p^\circ = c_p / c_{p0}$ от безразмерной координаты $x(x/l)$ для тонких конусов с различными углами при вершине для случая диссоциирующего воздуха. Параметры набегающего потока $b_1 = 1.07$ (кислород), $b_2 = 1.51$ (азот), $M_f = 1.5$; характерная длина $l$ выбирается из условия $\varkappa_1 \cdot \tau_{11} = 1$. Образование окиси азота не учитывалось. Константы скорости рекомбинации заимствованы из [6] и экстраполированы обратно пропорционально температуре.




Фиг. 2




Фиг. 3

Первоначальное резкое падение кривой соответствует релаксации кислорода (фиг. 2*a*), дальнейшее падение $c_p^\circ = c_p / c_{p_0}$ связано с релаксацией азота (фиг. 2*b*).

На фиг. 3 представлена зависимость $c_p^\circ = c_p / c_{p0}$ от координаты $x$ для тонких конусов с различными углами при вершине для чистого кислорода. Принималось $b = 2$, $M_f = 2$. Пунктирной линией отмечена та же зависимость для тонкого клина, взятая из [7]

$$c_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_f^2 - 1}} F(x, b), \qquad c_{p0} = \frac{2\theta}{\sqrt{M_f^2 - 1}}$$

где $F(x, b)$ выражается через функции Бесселя.

Как видно из фиг. 3, для одних и тех же углов при вершине конуса и клина и одинаковых числах $b$ и $M_f$ отклонение от химического равновесия для тонкого конуса меньше, чем для тонкого клина.

Поступила 18 X 1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Li Ting Yi. Recent advances in nonequilibrium dissociating gasdynamics. ARS Journal, 1961, vol 31, No 2.
2. Липман Г., Рошко А. Элементы газовой динамики. ИЛ, 1960.
3. Clarke J., The linearized flow of a dissociating gas. J. Fluid. Mech., 1960, vol. 7, No. 4.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.
5. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
6. Zinman W. Новые достижения в химической кинетике гомогенных реакций в диссоциирующем воздухе. Вопр. ракетн. техн., 1960, No. 12.
7. Der J. Linearized supersonic nonequilibrium flow past an arbitrary boundary. NASA TR—119, 1961.


# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОГО СЛОЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

***В. А. Варданян*** (*Ереван*)

Исследована связь устойчивости плоского слоя несжимаемой неоднородной жидкости с ориентацией магнитного поля. Показано, что область неустойчивых гармоник сужается при увеличении угла между магнитным полем и осью симметрии слоя.

Положим, что плоский слой несжимаемой неоднородной ($\rho = \rho_0 \exp\{-ny/h\}$) жидкости [1] с бесконечной электропроводностью погружен в однородное магнитное поле, направление которого составляет некоторый угол $\alpha$ с осью симметрии слоя

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \{\cos\alpha, \sin\alpha\} \tag{1}$$

Пусть поверхность слоя деформирована так, что [1-3]

$$\xi(x, y) = \frac{a}{\operatorname{sh} kh} \{-\operatorname{ch} ky \sin kx, \operatorname{sh} ky \cos kx\} \tag{2}$$

Запишем зависимость вектора смещения среды $\xi$ от времени в виде

$$\xi(x, y, t) = \xi(x, y) e^{i\omega t} \tag{3}$$

Тогда задача сводится к исследованию дисперсионного уравнения [4]

$$\omega^2 = \delta w \left(\frac{1}{2}\int \rho\xi^2 d\tau\right)^{-1} \qquad (\delta w = \delta m + \delta\Omega) \tag{4}$$

Здесь $\delta m$ и $\delta\Omega$ — изменения потенциальной энергии, [5, 6]:

$$\delta m = \frac{1}{8\pi\lambda}\int_0^\lambda\int_0^h \{[\mathbf{H}\cdot\nabla\xi]^2 + 2\mathbf{H}(\mathbf{H}\nabla)\}\, dydx + \frac{1}{8\pi\lambda}\int_0^\lambda\left\{\int_{h+a\cos kx}^{\infty} (\mathbf{H}+\mathbf{b})^2 dy - \int_h^\infty H^2 dy\right\} dx$$

$$\delta\Omega = \frac{1}{2\lambda}\left\{\int_0^\lambda\int_0^h (\rho\delta V + V\delta\rho)\, d\sigma + \int_0^\lambda V_s\rho_s dx\right\}$$

Проводя вычисления с точностью до второго порядка относительно амплитуды деформации $a$, получаем дисперсионное уравнение (4) в следующем виде

$$\omega^2 = \frac{4\pi GM}{h} z \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\left\{\frac{1}{F_n}\left[C_n - \frac{1}{z(1+\operatorname{th} z)}\right] + \right. \tag{5}$$

$$\left. + C_n \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \frac{z(\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)(\sin^2\alpha \operatorname{ch} z + \cos^2\alpha \operatorname{sh} z)}{\operatorname{sh}^2 z}\right\}$$

где $M$ — масса единицы длины слоя, $\lambda$ — длина волны;

$$z = kh, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad H_0 = 4\pi M\sqrt{G}, \quad F_n = \frac{e^n - 1}{n} = 1 + n\int_0^1 e^{n(1-u)} u du$$

$$C_n = \left(1 + n\int_0^1 e^{n(1-u)} u\, du\right)\left(1 + n\int_0^1 e^{n(1-u)} \frac{\operatorname{sh} 2zu}{\operatorname{sh} 2z}\, du\right)^{-1}$$