

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей (Стретт Дж. В.). Теория звука. Т. 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1955.
2. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
3. Бетчев Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир 1971.
4. Drasin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 9. N. Y., 1966.
5. Ии Чжа-шун. Волновые движения в слоистых жидкостях.— В кн.: Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовица, А. Сибассса. М.: Мир, 1978.
6. Drasin P. G., Zaturska M. W., Banks W. H. N. On the normal modes of parallel flow on inviscid stratified fluid. Pt 2. Unbounded flow with propagation of infinity.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 95, N 4.
7. Ландау Л. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости.— ДАН СССР. Новая серия, 1944, т. 44, № 4.
8. Blumen W. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, N 4.
9. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. О канонических переменных для неоднородных сред.— В кн.: VI Междунар. сими. по нелинейной акустике. Тезисы докл. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
10. Покровский В. Л., Халатников И. М. Гамильтоновский формализм в двухжидкостной гидродинамике.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, № 11.
11. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах.— Изв. АН СССР. ФАО, 1976, т. 12, № 11.
12. Павлов В. П., Треблер П. М. Гамильтоновский формализм для инерционно-гироклинических волн в атмосфере.— В кн.: II Всесоюз. симп. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. Тезисы докл. М.: Наука, 1979.
13. Серринг Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.
14. Селиджер Р. Л., Уитем Г. Б. Вариационные принципы в механике сплошной среды.— Сб. пер. Механика, 1969, № 5 (117).
15. Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V. On topological meaning of Clebsch variables: Preprint/Institute of automatic and electrometry Siberian Branch Acad. Sci. USSR. Novosibirsk, 1980, N 126.
16. Кофама Y. Theory of canonical transformations of nonlinear evolution equations. II.— Progr. Theor. Phys., 1977, vol. 57, N 6.
17. Гончаров В. П. Волновые взаимодействия в системе океан — атмосфера в рамках метода гамильтоновского формализма.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 3.
18. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
19. Море Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960.

УДК 532.526.011 : 518.5

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ОБРАЩЕННОГО НАВСТРЕЧУ ПОТОКУ МАЛОГО УСТУПА

B. B. Боголепов
(Москва)

1. Рассматривается ламинарное обтекание равномерным дозвуковым или сверхзвуковым потоком вязкого газа плоской пластины, на поверхности которой на некотором расстоянии l от ее передней кромки находится малая двумерная неровность. Строится решение уравнений Навье — Стокса при стремлении характеристического числа Рейнольдса $Re_0 = \rho_0 u_0 l / \mu_0 = \epsilon^{-2}$ к бесконечности (ρ_0 , u_0 , μ_0 — значения плотности, скорости и коэффициента динамической вязкости в невозмущенном набегающем потоке). В дальнейшем будут использоваться только безразмерные величины, для этого все линейные размеры относятся к l , скорости — к u_0 , плотность — к ρ_0 , давление — к $\rho_0 u_0^2$, энтальпия — к u_0^2 , функция тока — к $\rho_0 u_0 l$ и коэффициент динамической вязкости — к μ_0 .

Систематические исследования обтекания малых неровностей на поверхности тела с характерными поперечными и продольными размерами a и b ($\epsilon^2 \ll a \lesssim \epsilon$, $a \lesssim b \ll 1$) выполнены в [1, 2], где, в частности, получено, что течение около неровностей с $a \sim b \sim O(\epsilon^{3/2})$ в первом приближении при $\epsilon \rightarrow 0$ описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа, профиля скорости и энтальпии в набегающем потоке — сдвиговые и определяющим параметром подобия является местное число Рейнольдса $Re = \rho_w A a_1^2 / \mu_w$ (индекс w относится к величинам у поверхности пластины в невозмущенном пограничном слое, A — напряжение трения у поверхности пластины в невозмущенном пограничном слое, $a = \epsilon^{3/2} a_1$, $a_1 \sim O(1)$). Для Re можно получить

следующую оценку [3]: $Re \sim Re_0^{1/2} (a/\varepsilon)^2$, из которой следует, что при $a/\varepsilon \ll 1$ и $Re_0 \lesssim 10^6$ (т. е. для реальных и практически важных величин Re_0) значения Re не могут превышать нескольких десятков.

Решения уравнений Навье — Стокса для случая обтекания неровностей на поверхности тела сдвиговым потоком несжимаемого газа при $Re \lesssim 100$ получены в [4—6]. Одной из отличительных черт этих решений является их существование при $Re = 0$ [5, 6], т. е. получены решения уравнений Стокса для плоских течений. Более того, уже при $Re = 0$ обнаружены срывные зоны в поле течения.

Весьма своеобразными являются также законы затухания возмущений вдали за такими неровностями, исследование которых можно проводить при анализе уравнений пограничного слоя совместно с локальным условием взаимодействия с пристеночной дозвуковой частью невозмущенного пограничного слоя [7, 8].

Для дальнейшего полезно отметить, что обтекание неровностей с $\varepsilon^{3/2} \ll a \sim b \ll \varepsilon$ в первом приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается уравнениями Эйлера для несжимаемого газа и набегающий поток является сдвиговым [1, 2].

2. Пусть на поверхности плоской пластины находится прямоугольный выступ с характерной высотой $a \sim O(\varepsilon^{3/2})$ и характерной протяженностью $\varepsilon^{3/2} \ll b \ll \varepsilon^{3/4}$. Как показано в [1, 2], обтекание такой неровности описывается линеаризованными уравнениями пограничного слоя для несжимаемого газа с линеаризованным локальным условием взаимодействия с пристеночной дозвуковой частью невозмущенного пограничного слоя. В [8] получено, что на поверхности такого выступа при удалении от его переднего торца возмущения теплового потока Δq и напряжения трения $\Delta \tau$ относительно своих значений в невозмущенном пограничном слое у поверхности пластины затухают по закону

$$(2.1) \quad \Delta q \sim \Delta \tau \sim x^{-1/3} \quad (x \rightarrow \infty)$$

(т. е. затухание возмущений q и τ очень слабое), а возмущения давления $p < 0$ и возрастают

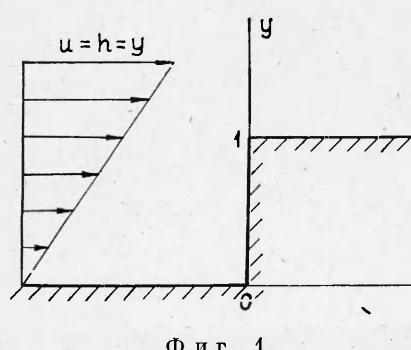
$$(2.2) \quad |p| \sim x^{1/3} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Для исследования течения в окрестности переднего торца выступа (обращенный навстречу потоку прямоугольный уступ) необходимо рассмотреть область с характерными размерами $x \sim y \sim O(\varepsilon^{3/2})$, в которой справедливы уравнения Навье — Стокса для несжимаемого газа, а набегающим потоком будет пристеночная дозвуковая часть невозмущенного пограничного слоя (фиг. 1):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{Re \sigma} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right), \\ u_w = v_w = h_w &= 0, \quad u \rightarrow y, \quad h \rightarrow y \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Здесь все линейные размеры отнесены к высоте уступа a_1 , скорости и возмущение энталпии относительно ее значения на поверхности тела — к своим значениям на высоте a_1 в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя Aa_1 и Ba_1 (B — тепловой поток у поверхности пластины в невозмущенном пограничном слое), давление и функция тока — к $\rho_w Aa_1^2$ и $\rho_w Aa_1^2$; σ — число Прандтля. В принятых обозначениях напряжение трения τ и тепловой поток q в невозмущенном пограничном слое у поверхности пластины равны 1.

Решение краевой задачи (2.3) при $Re \leqslant 100$ позволит исследовать



Фиг. 1

аэродинамическое нагревание практически важного элемента — малого прямоугольного уступа на поверхности тела, дает возможность изучить характеристики отрывного течения около такой типичной конфигурации.

Для численного решения краевой задачи (2.3) удобно ввести новые зависимые переменные — возмущения функции тока, энталпии и за-вихренности относительно своих значений в набегающем сдвиговом потоке

$$\psi = y^2/2 + \varphi, h = y + g, \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 1 - \zeta,$$

в которых уравнения Навье — Стокса (2.3) принимают вид

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\zeta, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2g}{\partial y^2} = \operatorname{Re} \sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right].$$

Вместо давления p вводится функция $D = \operatorname{Re}(p + (u^2 + v^2)/2 - y^2/2 - \varphi)$, поведение которой в поле течения описывается уравнением

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2D}{\partial y^2} = -\operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right].$$

Очевидно, на поверхности тела $D = p$.

Краевые условия на поверхности обтекаемого тела для функций $\varphi(x, y)$ и $g(x, y)$ имеют вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varphi(x, 0) &= 0, \quad \varphi(0, y) = -y^2/2, \quad \varphi(x, 1) = -1/2, \\ g(x, 0) &= 0, \quad g(0, y) = -y, \quad g(x, 1) = -1. \end{aligned}$$

Для функции $\zeta(x, y)$ используются обычные приближенные условия первого порядка точности [9]

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \zeta(x, 0) &= -2\varphi(x, \Delta y)/\Delta y^2 + O(\Delta y), \\ \zeta(0, y) &= 1 - 2[\varphi(-\Delta x, y) + y^2/2]/\Delta x^2 + O(\Delta x), \\ \zeta(x, 1) &= -2[\varphi(x, 1 + \Delta y) + 1/2 + \Delta y]/\Delta y^2 + O(\Delta y); \end{aligned}$$

для функции $D(x, y)$ задаются только нормальные производные

$$\begin{aligned} (\partial D/\partial y)(x, 0) &= (\partial \zeta/\partial x)(x, 0), \quad (\partial D/\partial x)(0, y) = (\partial \zeta/\partial y)(0, y), \\ (\partial D/\partial y)(x, 1) &= (\partial \zeta/\partial x)(x, 1). \end{aligned}$$

При выводе внешних краевых условий полезно использовать то обстоятельство, что, как уже отмечалось выше, для рассматриваемого режима обтекания течение при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ становится невязким. Легко видеть, что функция

$$(2.8) \quad \psi(x, y) = y^2/2 - \arg(y/x)/2\pi$$

описывает обтекание ступеньки сдвиговым потоком идеальной жидкости. Поэтому выражение (2.8) можно использовать в качестве внешнего краевого условия для задачи (2.3). Внешние краевые условия для функций $\varphi(x, y)$, $\zeta(x, y)$ и $g(x, y)$ использовались в виде

$$(2.9) \quad \varphi \sim \arg(y/x), \quad \zeta \sim xy/(x^2 + y^2)^2, \quad g \sim \arg(y/x)/y \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty).$$

Для расчета краевых условий при $y \rightarrow \infty$ для функции $D(x, y)$ интегрировалось уравнение

$$(2.10) \quad \partial D/\partial x = -\operatorname{Re} \zeta \partial \varphi/\partial x - \partial \zeta/\partial y$$

с начальным условием

$$(2.11) \quad D(-\infty, \infty) = 0,$$

при $x \rightarrow \pm\infty$ задавались нормальные производные $\partial D/\partial x$, которые определялись из уравнения (2.10).

3. В поле течения x , y задавалась неравномерная прямоугольная разностная сетка размером 43×32 , которая сгущалась по мере приближения к поверхности обтекаемого тела по закону геометрической прогрессии с показателем $k = 5/6$. Расчеты выполнялись при минимальных шагах разностной сетки $\Delta x = \Delta y = 0,067$, внешние границы расчетной области находились при $x \approx \pm 15$ и $y \approx 16$ (на торце уступа при таком разбиении расчетной области помещалось 10 интервалов разностной сетки).

Краевая задача (2.4), (2.6), (2.7) и (2.9) аппроксимировалась разностной первого порядка точности [10], которая решалась методом итераций, на каждой итерации использовался метод переменных направлений [11]. Итерации оканчивались, когда отличия значений напряжения трения или теплового потока на поверхности обтекаемого тела на соседних итерациях составляли менее 0,1%.

Результаты численных расчетов получены в диапазоне изменения местного числа Рейнольдса $Re = 0 - 100$, число Прандтля полагалось равным $\sigma = 0,71$.

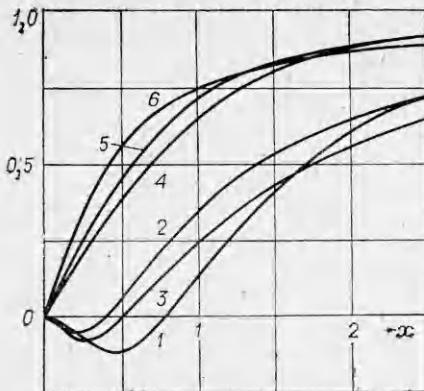
Результаты расчетов показывают, что поток газа перед уступом застораживается, напряжение трения τ и тепловой поток q у поверхности тела уменьшаются. При $x \geq -1$ происходит отрыв потока, образуется срывная зона, присоединение потока происходит примерно в середине торца уступа.

Величины τ и q на торце уступа резко возрастают по мере приближения к верхнему краю торца уступа. На верхней стороне уступа τ и q по мере удаления от торца уступа сначала падают весьма значительно, но потом их изменение очень мало и возмущения распространяются далеко вниз по потоку. Сама окрестность верхнего края торца уступа обтекается без образования срывных зон. Такая картина течения сохраняется во всем исследуемом диапазоне изменения чисел Re .

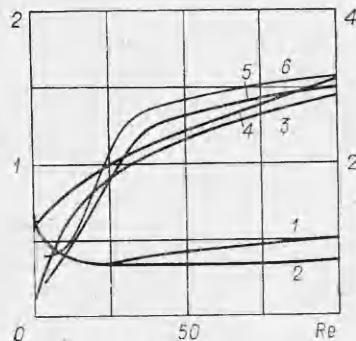
На фиг. 2 показано распределение τ при $Re = 0; 31,6; 100$ (кривые 1—3) и q при $Re = 0; 10; 100$ (кривые 4—6) перед уступом. Видно, что возмущения от уступа распространяются довольно далеко вверх по потоку, распространение возмущений усиливается с ростом числа Re , протяженность срывной зоны изменяется немонотонно в зависимости от Re . Наибольшие размеры срывной зоны имеет при $Re = 0$, ее протяженность $x_1 = 0,77$ и высота $y_1 = 0,775$. Сначала с ростом Re размеры срывной зоны быстро уменьшаются, причем $x_1 \approx y_1$. При $Re \approx 20$ срывная зона имеет минимальные размеры $x_1 \approx y_1 \approx 0,35$. По мере дальнейшего увеличения Re x_1 начинает возрастать, а величина y_1 практически остается неизменной (см. кривые 1, 2 на фиг. 3, левая ось ординат). Увеличение числа Re фактически соответствует увеличению скорости набегающего потока (точнее, увеличению ее градиента A). Поэтому при малых значениях числа Re увеличение его приводит к затягиванию отрыва, так как возмущения давления $\sim Re^2$ пока малы. При дальнейшем росте Re возмущения давления растут уже сильно и протяженность срывной зоны начинает увеличиваться.

Распределения $-\tau$ при $Re = 0; 31,6; 31,6$ (кривые 1—3) и q при $Re = 0; 31,6; 100$ (кривые 4—6) по торцу уступа представлены на фиг. 4. Окрестность верхнего края торца уступа является особой областью для рассматриваемого течения и значения величин τ и q там не имеют практического смысла. Однако большой практический интерес могут представлять интегральные величины $-\int_0^1 \tau dy$ и $\int_0^1 q dy$ — суммарные сила трения и тепловой поток, действующие на торец уступа (кривые 3, 4 на фиг. 3, правая и левая оси ординат).

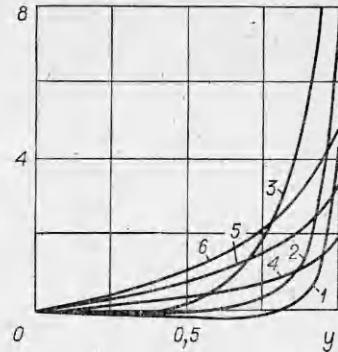
Особенности затухания возмущений вниз по потоку показаны на фиг. 5, где представлены распределения τ при $Re = 0; 100$ (кривые 1, 2) и q при $Re = 0; 100$ (кривые 3, 4) за уступом. Видно, что вблизи торца уступа при $x \leq 1,5$ напряжение трения и тепловой поток изменяются



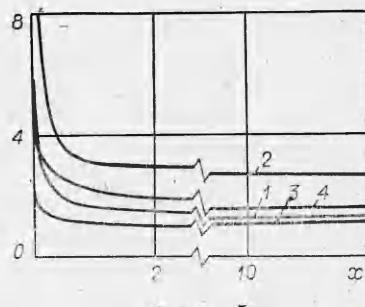
Ф и г. 2



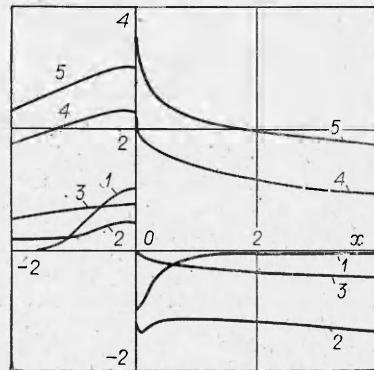
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

сильно, а вдали от торца уступа их изменение мало. Такое поведение величин τ и q при $x \gg 1$ находится в качественном соответствии с приведенным ранее законом затухания возмущений (2.1). Отметим, что при $Re = 100$, например, q примерно в 1,5 раза превосходит значение в невозмущенном пограничном слое у поверхности пластины даже при $x \geq 10$.

Повышение точности расчетов в 5 раз, использование для завихренности на поверхности тела условий второго порядка точности (вместо условий (2.7)) или использование более мелкой разностной сетки (20 интервалов разностной сетки на торце уступа, минимальные шаги разностной сетки $\Delta x = \Delta y = 0,019$) не вносят в результаты расчетов изменений, превышающих точность аппроксимации применяемой расчетной схемы. Правда, при расчетах на мелкой сетке в нижнем углу уступа была обнаружена еще одна циркуляционная зона размером примерно в два интервала расчетной сетки по длине и высоте.

4. Особенности расчета давления по известному численному решению для функции тока и завихренности подробно изложены в [12]. В данной работе предлагается использовать в качестве краевых условий при $y \rightarrow \infty$ значения функции $D(x, y)$, полученные при интегрировании уравнения (2.10) с начальным условием (2.11), что позволит корректно получить решение уравнения (2.5). Очевидно, что при интегрировании (2.10) появляются ошибки аппроксимации, однако из анализа полученного численного решения для $\zeta(x, y)$ следует, что при $Re \geq 1$ и $y \geq 6$ $\zeta(x, y) = 0$, и тогда интегрирование (2.10) с начальным условием (2.11) дает $D(x, y) = 0$ ($Re \geq 1$, $y \rightarrow \infty$).

Дифференциальное уравнение (2.5) на прежней разностной сетке аппроксимировалось разностным при использовании центральных разностей, применялся тот же метод расчета, что и при вычислении $\phi(x, y)$ или $\zeta(x, y)$. Распределения давления при $Re = 0; 3,16; 10; 31,6; 100$ (кривые 1—5) по поверхности уступа представлены на фиг. 6 (при $Re = 0$ конечной является величина $Re p$); заметно значительное увеличение передачи возмущений вверх по потоку с ростом числа Re . При перемещении вверх по торцу уступа давление продолжает возрастать, при переходе на верхнюю сторону уступа давление скачкообразно падает и затем при $x \gg 1$ продолжает плавно уменьшаться. К сожалению, результаты расчетов не дают подтверждения асимптотического закона изменения давления (2.2) (для этого необходимо значительно увеличить размеры расчетной области вниз по потоку). Зависимости значений давления в точках отрыва и присоединения потока от числа Re представлены на фиг. 3 (кривые 5, 6, правая ось ординат).

Поступила 28 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

- Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1363.
- Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Аэродинамика. М.: Наука, 1976.
- Боголепов В. В. Исследование предельных решений для случая обтекания малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Труды ЦАГИ, 1977, вып. 1812.
- Kiya M., Arie M. Viscous shear flow past small bluff bodies attached to a plane wall.— J. Fluid. Mech., 1975, vol. 69, p. 4.
- Боголепов В. В. Обтекание полуцилиндрической выпуклости на поверхности пластины сдвиговым потоком вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 6.
- Боголепов В. В. Аэродинамическое нагревание стенок малой прямоугольной траншеи на поверхности пластины.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, № 3.
- Hunt J. C. R. A theory for the laminar wake of a two dimensional body in a boundary layer.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, p. 1.
- Боголепов В. В., Липатов И. И. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя с взаимодействием.— ПМТФ, 1982, № 4.
- Thom A. An investigation of fluid flow in two dimensions. Aeron. Res. Council Repts and Memo, 1928, N 1194.
- Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Спидинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972.
- Peaceman D. W., Rachford H. H. Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.— J. Soc. Industr. Appl. Math., 1955, vol. 3, N 1.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

УДК 532.526.4

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В УГЛОВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

B. И. Корнилов, A. M. Харитонов

(Новосибирск)

Продольное обтекание угловых конфигураций характеризуется развитием вторичных течений в окрестности биссекторной плоскости [1—4]. Эти продольные вихри в пограничном слое определены Прандтлем [5] как вторичные течения второго рода, т. е. течения, где производные скорости $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z \gg \partial/\partial x$. Такие течения обусловлены градиентами напряжений Рейнольдса вдоль осей y и z , которые индуцируют компоненты v и w в области взаимодействия пограничных слоев. Протяженность этой пристенной области в поперечном направлении составляет величину порядка (2—4) толщин пограничного слоя в данном сечении [6]. Условия возникновения и развития подобных течений по мере перехода пограничного слоя из ламинарного состояния в турбулентное в случае симметрично развивающихся пограничных слоев в прямом двугранном угле детально изучены в [7]. Однако в ряде практических случаев осуществляется несимметричное взаимодействие пограничных слоев. Подобные течения реализуются,