

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

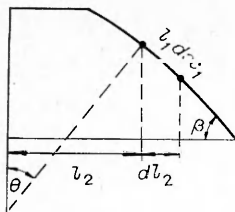
Краткий обзор результатов исследования устойчивости локальных осесимметричных деформаций упругих оболочек вращения содержится в работах [1,2]. Там же обоснована необходимость нелинейного описания таких деформаций. В работе [3] задача об устойчивости нелинейных осесимметричных деформаций сформулирована и решена для круговой цилиндрической оболочки, равномерно нагруженной по шарнирному краю радиальным сжимающим усилием. Ниже эта задача сформулирована для произвольной оболочки вращения с равномерно сжатым шарнирным краем. Приведены результаты ее решения для конических и сферических оболочек.

1. Рассматривается произвольная оболочка вращения, замкнутая в окружном и имеющая хотя бы один край в осевом направлениях. В произвольном осевом сечении срединной поверхности оболочки вводятся следующие переменные величины (фиг. 1): x_1 — координата в направлении меридиана; l_1 — параметр Ляме этого направления; θ — угол между осью вращения и нормалью к меридиану; l_2 — радиус параллельного круга. Положение осевого сечения определяется окружной координатой x_2 , которая отождествляется с полярным углом в плоскости параллельного круга, так что l_2 — параметр Ляме окружного направления. Символами k_1 и k_2 обозначаются нормальные кривизны координатных линий x_1 и x_2 .

Предполагается следующее: а) оболочка равномерно сжата по одному краю так, что на нем известна окружная деформация $\epsilon = \text{const} < 0$; б) сжатый край свободен в отношении меридионального поворота и осевого перемещения и закреплен в отношении окружного перемещения; в) оболочка имеет постоянную толщину h и изготовлена из линейно-упругого однородного изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν .

Пусть радиус сжатого края равен b , угол наклона нормали к оси вращения на нем равен β .

Координаты x_1 и x_2 являются главными координатами недеформированной срединной поверхности. Они принимаются за независимые переменные. Начало координаты x_1 помещается на сжатом крае (соответствующее фиг. 1 направление отсчета отрицательное), а координаты x_2 — на произвольно выбранном меридиане (направление отсчета несущественно). Эти же координаты используются как лагранжевы координаты точек деформированной поверхности.



Фиг. 1

Для характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки вводятся следующие обозначения: u_1, u_2, w — перемещения точки срединной поверхности в меридиональном, окружном и нормальном направлениях соответственно; ϵ_{ij} — компоненты тангенциальной деформации; χ_{ij} — компоненты изгибной деформации; N_{ij} — тангенциаль-

ные усилия; Q_i — перерезывающие усилия; P — осевое усилие; M_{ij} — удельные моменты (буквенные индексы пробегает значения 1 и 2).

Докритическое напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки будет осесимметричным и локализуемым в окрестности сжатого края. Его кинематические и силовые характеристики отмечаются индексом \circ .

Если ввести постоянные $A=1/Eh$; $D=Ek^3/12(1-\nu^2)$; $B=\sqrt{D/A}$; $C=\sqrt{AD}$, то отвечающие предположению в) уравнения связи между силовыми характеристиками и компонентами осесимметричной деформации запишутся в виде

$$(1.1) \quad \varepsilon_{22}^{\circ} = A(N_{22}^{\circ} - \nu N_{11}^{\circ}); \quad M_{11}^{\circ} = D(\chi_{11}^{\circ} + \nu \chi_{22}^{\circ}), \quad 1 \leq 2.$$

Допуская, что осесимметричная деформация оболочки при локальном сжатии может сопровождаться сильным изгибом меридиана срединной поверхности, воспользуемся для ее описания нелинейными уравнениями Е. Рейснера [4]. С этой целью введем угол поворота $\nu(x_1)$ элемента $l_1 dx_1$ в процессе осесимметричной деформации и силовую функцию $\eta(x_1)$, с точностью до постоянного множителя B совпадающую с соответствующей функцией Е. Рейснера.

В деформированном положении элемента его нормаль будет составлять с осью вращения угол, равный $\theta^{\circ}(x_1) = \theta(x_1) + \nu(x_1)$. Компоненты изгибной деформации выражаются через функцию ν по формулам (штрих обозначает дифференцирование по x_1)

$$l_1 \chi_{11}^{\circ} = \nu', \quad l_2 \chi_{22}^{\circ} = \sin \theta^{\circ} - \sin \theta.$$

Благодаря отсутствию поверхностных нагрузок, формулы Е. Рейснера, выражающие усилия через функции η и θ° , упрощаются к виду

$$l_1 N_{22}^{\circ} = B\eta', \quad l_2 N_{11}^{\circ} = B\eta \cos \theta^{\circ}, \quad l_2 Q_1^{\circ} = B\eta \sin \theta^{\circ}.$$

Уравнения Е. Рейснера устанавливают нелинейную связь между функциями η и ν . В данном случае они описывают локальную деформацию в окрестности сжатого края оболочки и могут быть упрощены в соответствии с асимптотической теорией краевого эффекта. С этой целью примем

$$l_1 = \sqrt{2Cb}, \quad l_2(x_1) \simeq b, \quad \theta(x_1) \simeq \beta$$

и отбросим в исходных уравнениях члены с естественным малым параметром

$$(1.2) \quad \mu = l_1 b = \sqrt{2C/b} \ll 1.$$

В результате приходим к следующей системе нелинейных уравнений относительно функций η и ν :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \eta'' + 2 \sin \beta \sin \nu + \cos \beta (1 - \cos \nu) &= 0; \\ \nu'' - 2\eta (\sin \beta \cos \nu + \cos \beta \sin \nu) &= 0. \end{aligned}$$

Отвечающие предположениям а), б) граничные условия на крае $x_1=0$ формулируются в виде

$$\varepsilon_{22}^{\circ}(0) = \varepsilon; \quad M_{11}^{\circ}(0) = 0.$$

После соответствующих упрощений и после введения параметра $p = -\varepsilon/\mu$ эти условия принимают вид

$$(1.4) \quad \eta'(0) = -2p; \quad \nu(0) = 0.$$

Для получения затухающего при удалении от края решения системы (1.3) потребуем выполнения следующих условий:

$$(1.5) \quad \eta(-\infty)=0; \quad v(-\infty)=0.$$

Уравнениями (1.3), которые могут быть названы уравнениями нелинейного краевого эффекта, вместе с граничными условиями (1.4), (1.5) описывается нелинейная локальная осесимметричная деформация произвольной оболочки вращения, равномерно сжатой по шарнирному краю.

Следует заметить, что для такой упрощенной формулировки задачи недостаточно выполнения условия (1.2), так как переход к системе (1.3) возможен при дополнительном ограничении

$$(1.6) \quad |\sin \theta^\circ| \gg \mu,$$

а замена реальных граничных условий на свободном от нагрузки крае условиями (1.5) возможна, если расстояние между краями существенно превышает значение $l_1 = \sqrt{2Cb}$.

Напротив, требование о постоянстве толщины оболочки излишне. Достаточно потребовать, чтобы изменимость толщины не превосходила изменемости функций l_2 и θ . Тогда без увеличения погрешности постоянную h можно отождествить с толщиной оболочки на сжатом крае.

2. Возможность неустойчивости осесимметричного деформирования оболочки связана с наличием у нее смежных несимметричных форм равновесия. Для приращений, которые получают кинематические и силовые характеристики деформации при переходе от осесимметричной формы равновесия к неосесимметричной, примем обозначения п. 1. Эти приращения являются функциями координат x_1 и x_2 , причем зависимость от второй координаты периодическая.

С учетом локального характера неосесимметричной деформации систему уравнений устойчивости можно принять в упрощенной форме, отвечающей теории пологих оболочек.

Если ввести операторы ($y = l_2/l_1$)

$$L_1 = \frac{1}{l_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad L_2 = \frac{1}{l_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + y \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_1} \right),$$

$$\nabla^2 = L_1 + L_2, \quad L = \frac{1}{l_1 l_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\cos \theta}{y} \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

функцию $v(x_1, x_2)$, определяющую приращения тангенциальных усилий в виде

$$(2.1) \quad N_{22} = -BL_1 v, \quad N_{11} = -BL_2 v, \quad N_{21} = N_{12} = BLv,$$

и воспользоваться известными формулами теории пологих оболочек

$$(2.2) \quad \kappa_{11} = -L_1 w, \quad \kappa_{22} = -L_2 w, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = -Lw;$$

$$Q_1 = -\frac{D}{l_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w, \quad Q_2 = -\frac{D}{l_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w,$$

то система уравнений устойчивости осесимметричного состояния равновесия запишется в виде

$$C \nabla^2 \nabla^2 v + (k_2 + \kappa_{22}^\circ) L_1 w + (k_1 + \kappa_{11}^\circ) L_2 w = 0,$$

$$C \nabla^2 \nabla^2 w - (k_2 + \kappa_{22}^\circ) L_1 v - (k_1 + \kappa_{11}^\circ) L_2 v - B^{-1} (N_{11}^\circ L_1 w + N_{22}^\circ L_2 w) = 0.$$

После таких же упрощений, какие были проведены в п. 1, для амплитуд $v_n(x_1)$ и $w_n(x_1)$ периодического по координате x_2 решения получается сле-

дующая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(2.3) \quad v_n^{IV} - 2\gamma^2 v_n'' + \gamma^4 v_n + 2 [bk_{20} w_n'' - (bk_{10} + qv'/p) \gamma^2 w_n] = 0;$$

$$w_n^{IV} - 2\gamma^2 w_n'' + \gamma^4 w_n - 2 [bk_{20} v_n'' - (bk_{10} + qv'/p) \gamma^2 v_n] + 2q(\eta'/p) \gamma^2 w_n = 0.$$

Здесь n — число волн в окружном направлении;

$$(2.4) \quad q = -\varepsilon/\mu^2; \quad \gamma = \mu n; \quad k_{i_0} = k_i(0).$$

Отвечающие предположениям а), б) граничные условия для приращений являются однородными и имеют вид

$$(2.5) \quad \varepsilon_{22}(0) = 0; \quad M_{11}(0) = 0; \quad P(0) = 0; \quad u_2(0) = 0.$$

Для рассматриваемых здесь неосесимметричных возмущений уравнения связи вида (1.1) должны быть дополнены следующими, справедливыми в рамках теории пологих оболочек, уравнениями:

$$\varepsilon_{21} = (1+\nu)AT_{21}; \quad M_{12} = (1-\nu)D\kappa_{12}, \quad 1 \leftrightarrow 2.$$

С помощью уравнений связи и формул (2.1), (2.2) первые два из равенств (2.5) выражаются через функции v и w , принимая для их амплитуд упрощенный вид

$$v_n'' + \nu\gamma^2 v_n = 0; \quad w_n'' - \nu\gamma^2 w_n = 0,$$

а равенство

$$P \equiv N_{11} \sin \theta^\circ - \left(Q_1 + \frac{1}{l_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \cos \theta^\circ = 0$$

приводится к виду

$$\gamma^2 v_n \sin \theta^\circ + \frac{1}{2} \mu [w_n''' - (2-\nu) \gamma^2 w_n'] \cos \theta^\circ = 0.$$

При выполнении условия

$$(2.6) \quad |\cos \theta^\circ| \leq |\sin \theta^\circ|$$

равенству $P=0$ с принятой степенью точности отвечает равенство $v_n=0$. Подобным образом можно показать, что равенству $u_2=0$ отвечает при этом равенство $w_n=0$. Следовательно, при ограничении (2.6) равенства (2.5) дают следующие граничные условия в точке $x_1=0$ для системы (2.3):

$$(2.7) \quad v_n(0) = 0; \quad w_n(0) = 0; \quad v_n''(0) = 0; \quad w_n''(0) = 0.$$

На бесконечности требуем выполнения условий затухания

$$(2.8) \quad v_n(-\infty) = 0; \quad w_n(-\infty) = 0; \quad v_n'(-\infty) = 0; \quad w_n'(-\infty) = 0.$$

Заметим, что при условии (2.6) выполняется и условие (1.6), поэтому следует заботиться только о выполнении первого из них.

Уравнениями (2.3) с граничными условиями (2.7), (2.8) формулируется задача об устойчивости осесимметричного напряженно-деформированного состояния равновесия произвольной оболочки вращения, равномерно сжатой по шарнирному краю.

Решение этой задачи зависит от трех обобщенных параметров: γ , p , q . Как видно из (2.4), параметром q можно определять величину приращительной деформации сжатого края. В таком случае параметр p будет

характеризовать тонкостенность оболочки, ибо $p = \mu q$, где μ — параметр тонкостенности (1.2). Параметр γ следует понимать как параметр волнообразования, поскольку $\gamma = \mu n$, где n — число окружных волн, образующихся при потере устойчивости оболочки.

При такой интерпретации параметров становится очевидным, что определение критического значения принудительной окружной деформации края оболочки сводится к определению при заданном значении параметра p наименьшего по γ собственного значения параметра q из однородной краевой задачи для системы (2.3).

Исходя из равенств (1.3) — (1.5), можно установить, что при $p \rightarrow 0$ фигурирующие в уравнениях (2.3) отношения η'/p и v'/p стремятся к значениям, отвечающим линейной краевой задаче осесимметричного изгиба оболочки. Следовательно, при $p=0$ задача на собственные значения (2.3), (2.7), (2.8) определяет предел устойчивости линейного осесимметричного состояния равновесия с учетом его моментности. А так как из равенства $p=0$ вытекает равенство $\mu=0$ (так как $\varepsilon \neq 0$), то приходим к выводу, что линейная постановка задачи является корректной лишь для бесконечно тонкой оболочки.

3. Процесс решения поставленной задачи об устойчивости осесимметричной деформации оболочки вращения делится на два последовательных этапа. Первый этап — решение сформулированной в п. 1 неоднородной краевой задачи, описывающей нелинейную локальную осесимметричную деформацию оболочки. Второй этап — решение сформулированной в п. 2 задачи на собственные значения.

Использованный метод численного решения этих краевых задач описан в работе [3]. Цель, которая преследовалась при выполнении численного эксперимента, состояла в том, чтобы исследовать зависимость критического значения принудительной деформации от геометрических параметров той части оболочки, которая примыкает к сжатому краю. Для осуществления этой цели были рассчитаны на устойчивость конические и сферические оболочки при следующих трех значениях угла β :

$$(3.1) \quad \beta_1 = \pi/2, \quad \beta_2 = \pi/3, \quad \beta_3 = \pi/6.$$

Для каждой оболочки с заданной геометрией срединной поверхности определялась зависимость критического значения q^* параметра q от p , т. е. в конечном счете от μ . Эту зависимость символически можно представить в виде $q^* = q^*(p) = q^*(\mu)$.

Вычисленные при $p=0$ значения $q^*(0) = q^+$ и соответствующие им значения γ^+ параметра γ приведены в таблице. Номера столбцов указывают на то, какому из значений (3.1) угла β отвечают находящиеся в этих столбцах числа.

В соответствии с содержанием последнего абзаца п. 2 приведенные в таблице значения q^+ можно понимать как критические для линейной осесимметричной деформации оболочки. Влияние на величину q^* нелинейного характера этой деформации отражено на фиг. 2, 3 с помощью графической зависимости от $\sqrt{\mu}$ отношения $e = q^*/q^+$. Значения этого

отношения практически совпадают для конических и сферических оболочек с одинаковым углом β . Каждому из значений угла β (3.1) отвечает кривая с соответствующим номером.

Об изменении с ростом μ соответствующих q^* значений

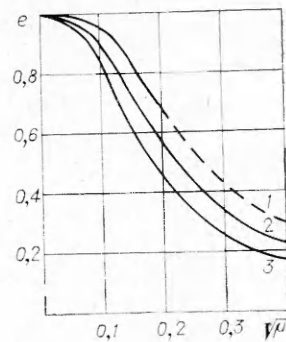
Параметры	Конические оболочки			Сферические оболочки		
	1	2	3	1	2	3
q^+	32,7	30,2	23,3	35,1	32,7	25,2
γ^+	4,9	4,55	3,45	5,1	4,75	3,65
γ^-	2,5	2,1	1,35	2,6	2,2	1,4

γ^* параметра γ можно судить по приведенным в последней строке таблицы числам γ^- , которые определяют значения γ^* при $\sqrt{\mu} = 0,4$. При изменении $\sqrt{\mu}$ от 0 до 0,4 значения γ^* изменяются от γ^+ до γ^- .

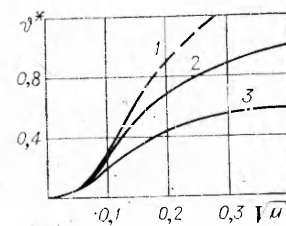
Зависимость от $\sqrt{\mu}$ критических значений ν^* угла поворота на сжатом крае изображена графически на фиг. 3 (для конических и сферических оболочек кривые совпадают). Те значения ν^* , которые отвечают штриховым участкам кривых, не удовлетворяют условию (2.6). Следовательно, для оболочек с углом $\beta = \pi/2$ нельзя гарантировать, что в области $0,2 < \sqrt{\mu} \leq 0,4$ решение задачи (2.3), (2.7), (2.8) будет с принятой степенью точности удовлетворять исходным граничным условиям (2.5). Его следует рассматривать как формальное решение. Такой же формальный смысл имеют штриховые участки кривых на фиг. 2.

Вычисление критических значений принудительной (максимальной) деформации ϵ^* и максимального напряжения σ^* производится по формулам $\epsilon^* = -eq^+\mu^2$; $\sigma^* = E\epsilon^*$.

Для рассчитанных оболочек значения параметра q^+ определяются с помощью таблицы, а значения коэффициента e — с помощью графических зависимостей, изображенных на фиг. 2



Фиг. 2



Фиг. 3

Поступила 4 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К постановке задач о локальной устойчивости оболочек вращения. — Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 4.
2. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
3. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. Дополнение к задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
4. Reissner E. On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. — In: Proc. III symp. appl. math. Vol. 3. Amer. math. soc., 1950.

УДК 539.311

БЕЗМОМЕНТНЫЕ УПРУГИЕ АРМИРОВАННЫЕ ОБОЛОЧКИ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. В. Немировский, Г. И. Старостин

(Новосибирск)

В работе [1] сформулирован ряд постановок задачи по реализации безмоментного напряженного состояния в упругих армированных оболочках с произвольной формой срединной поверхности. Данная работа посвящена решению трех из выдвинутых в [1] постановок для случая, когда срединная поверхность оболочки имеет нулевую гауссову кривизну.

1. В качестве расчетной примем модель армированной оболочки, предложенную в [1]. Отнесем срединную поверхность оболочки к криволинейным ортогональным координатам α и β , совпадающим с линиями кри-