РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Т. Гасанов, А. Х. Мирзаджанзаде

(*Баку*)

Известно, что при движении вязко-пластичной жидкости имеют место вязко-пластичная и упругая (так называемое ядро течения) области движения.

Так как при нестационарном движении ядро течения является функцией времени и оно должно быть определено, то в общем случае исследование нестационарных задач вязко-пластичной жидкости приводится к решению краевой задачи с искомой подвижной границей [1].

Приближенные решения подобных задач имеются в литературе [1].

Точное решение для двух случаев нестационарного движения вязко-пластичной жидкости в общей постановке получено А. И. Сафрончиком [2,3]. Следует отметить, что при этом для определения размера ядра получается нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра, получение эффективного решения для которого затруднительно.

Оказывается, что путем перехода к так называемой обратной задаче решение задачи значительно упрощается. При решении обратных задач задается закон изменения размера ядра во времени и определяется соответствующая этому закону скорость движения трубы или пластинок.

§ 1. Рассмотрим прямолинейное нестационарное движение вязко-пластичной несжимаемой жидкости между двумя параллельными пластинками. Положим, что при $t < 0$ нижняя пластинка была неподвижна, а верхняя пластинка двигалась с постоянной скоростью $V = \mathrm{const}$. При $t > 0$ обе пластинки движутся с некоторыми скоростями, подлежащими определению. Принимается, что

$$\Delta p = 0 \quad \text{при } t > 0$$

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид [1]

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

Начальное и граничные условия задаются в виде (1.2)

$$U_z(x, 0) = -\frac{V}{h} x, \qquad \left(\frac{\partial U_z}{\partial x}\right)_{x_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U_z}{\partial t}\right)_{x_0} = -\frac{\tau_0}{\rho x_0}, \qquad x_0(0) = 0$$

Зададим закон изменения $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t) = \alpha \sqrt{t} \tag{1.3}$$

где α — некоторая константа, подлежащая определению. Из третьего условия (1.2), учитывая, что $x_0 = 0$ при $t = 0$, а $U_z(0, 0) = 0$, получим скорость ядра, соответствующую скорости движения нижней пластинки

$$U_z(x_0, t) = -\frac{2\tau_0}{\rho\alpha}\sqrt{t} \tag{1.4}$$

Решение сформулированной задачи автомодельно и имеет вид

$$U_z(x, t) = A\sqrt{t} f(\xi) \qquad \left(A = \frac{2\tau_0}{\rho\alpha}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{2\eta t / \rho}}\right) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), будем иметь

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \xi \frac{df}{d\xi} - f(\xi) = 0 \tag{1.6}$$

Граничные условия для $f(\xi)$ примут следующий вид:

$$f(\xi_0) = -1, \quad \left(\frac{df}{d\xi}\right)_{\xi_0} = 0 \quad \left(\xi_0 = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}}\right) \tag{1.7}$$

Решение уравнения (1.6) при условиях (1.7) (см., например, [4])

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \xi \exp\frac{\xi_0^2}{2} \left[\Phi(\xi_0) - \Phi(\xi)\right] - \exp\frac{-(\xi^2 - \xi_0^2)}{2} \quad \text{при } t < \frac{h^2}{\alpha^2} \tag{1.8}$$

где $\Phi(\xi)$ и $\Phi(\xi_0)$ — интегралы ошибок.

Для скорости движения верхней пластинки получим

$$U_z(h, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Ah}{\sqrt{2\eta/\rho}} \exp\frac{\rho\alpha^2}{4\eta} \left[\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2\eta t/\rho}}\right) - \right.$$
$$\left. - \Phi\left(\alpha \sqrt{\frac{\rho}{2\eta}}\right)\right] + A\sqrt{t} \exp\left[-\frac{\rho}{4\eta}\left(\frac{h^2}{t} - \alpha^2\right)\right] \tag{1.9}$$

Удовлетворяя первому условию (1.2), определим α из уравнения

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\sqrt{2\eta/\rho}} \exp\frac{\alpha^2\rho}{4\eta} \left[1 - \Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{\rho}{2\eta}}\right)\right] = \frac{V}{h} \tag{1.10}$$

Можно решить задачу в случае $\Delta p = \varphi(t) \neq 0$ при $t > 0$. В частности, если $\Delta p = a/b\sqrt{t}$, где a и b — некоторые постоянные, то решение задачи автомодельно и решается аналогично.

Рассмотрим частный случай, когда $x_0 = \text{const}$. Пластинки при $t < 0$ неподвижны,— имело место стационарное движение; при $t > 0$ в результате движения пластинок имеет место нестационарное движение. Положим, что $\Delta p = 0$ при $t > 0$. Тогда уравнение движения будет иметь вид (1.1), а начальное и граничные условия примут вид

$$U_z(x, 0) = U_1(x), \quad \left(\frac{\partial U_z}{\partial x}\right)_{x_0} = 0, \quad U_z(x_0, t) = -\frac{\tau_0}{\rho x_0} t + U_1(x_0) \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{\Delta p}{2l\eta}(h^2 - x^2) - \frac{\tau_0}{\eta}(h - x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant h) \\ U_1(x_0) &= \frac{\Delta p}{2l\eta}(h^2 - x_0^2) - \frac{\tau_0}{\eta}(h - x_0) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_0) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Легко показать, что решением уравнения (1.1), удовлетворяющим условиям (1.11), будет

$$U_z(x, t) = -\frac{\tau_0}{\rho x_0} t + \frac{\tau_0}{2\eta x_0}(h^2 - x^2) - \frac{\tau_0}{\eta}(h - x) \tag{1.13}$$

Скорости движения пластинок, при которых $x_0 = \text{const}$, определяются из

$$U_z(h, t) = \frac{\tau_0}{\rho x_0} t \tag{1.14}$$

Теперь положим, что $\Delta p = \varphi(t) \neq 0$ при $t > 0$. Тогда дифференциальное уравнение движения имеет вид [1]

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\Delta p(t)}{l} \tag{1.15}$$

Скорость движения жидкости, при которых $x_0 = \text{const}$, будет

$$U_z(x, t) = \int_0^t \frac{\Delta p(t)}{\rho l} dt - \frac{\tau_0}{\rho x_0} t + \frac{\tau_0}{2\eta x_0}(h^2 - x^2) - \frac{\tau_0}{\eta}(h - x) \tag{1.16}$$

Для определения скорости пластинок будем иметь

$$U_z(h, t) = -\frac{\tau_0}{\rho x_0} t \pm \int_0^t \frac{\Delta p(t)}{\rho l} dt \tag{1.17}$$

§ 2. Рассмотрим прямолинейное нестационарное движение вязкопластичной несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Положим, что при $t < 0$ имеет место стационарное движение с распределением скоростей по закону $-\tau_0 r / \eta$. Также будем полагать, что $\Delta p = 0$ при $t > 0$. Уравнение движения будет [1]

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0}{r} \tag{2.1}$$

Начальное и граничные условия задаются в виде (2.2)

$$U_z(r, 0) = -\frac{\tau_0}{\eta} r, \qquad \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_{r_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)_{r_0} = -\frac{2\tau_0}{\rho r_0}, \qquad r_0(O) = 0 \tag{2.3}$$

Положим, что радиус ядра изменяется по закону

$$r_0(t) = \alpha \sqrt{t}$$

Тогда

$$U_z(r_0, t) = -\frac{4\tau_0}{\rho\alpha} \sqrt{t} \tag{2.4}$$

Решение этой задачи, как и в § 1, автомодельно и имеет вид

$$U_z(r, t) = B \sqrt{t}\, f(\xi) \qquad \left(B = \frac{4\tau_0}{\rho\alpha}, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\eta t / \rho}} \right) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.1), будем иметь

$$\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2} \xi f(\xi) = \frac{\tau_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \tag{2.6}$$

Это уравнение при помощи замены

$$f(\xi) = f_1(\xi) + \frac{\tau_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \xi \tag{2.7}$$

приводится к виду

$$\xi \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \frac{df_1}{d\xi} - \frac{1}{2} \xi f_1(\xi) = 0 \tag{2.8}$$

Граничные условия для $f_1(\xi)$ будут

$$f_1(\xi_0) = -1 - \frac{\tau_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \xi_0, \qquad \left(\frac{df_1}{d\xi} \right)_{\xi_0} = -\frac{\tau_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \qquad \left(\xi_0 = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} \right) \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) заменой $\xi^2 = -4z$ приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, решение которого (см., например, [4])

$$f_1(\xi) = C_1 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} \right) F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{4} \xi^2 \right) + C_2 \left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{4} \right) F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{4} \xi^2 \right) \ln \frac{\xi^2}{4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-3/2+k}{k} \frac{2\xi^{2k}}{4^k k!} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \frac{1}{1+\nu} \right) \right] \tag{2.10}$$

Удовлетворяя условиям (2.9), для C_1 и C_2 будем иметь

$$C_1 = \frac{\exp - (\xi_0^2 / 4)}{F(^3/_2, 1, {}^1/_4 \xi_0^2)} \left\{ -1 - \frac{\tau_0 \xi_0}{B \sqrt{\eta\rho}} - C_2 \left[\exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4} \right) F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{4} \xi_0^2 \right) \ln \frac{\xi_0^2}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-3/2+k}{k} \frac{2\xi_0^{2k}}{4^k k!} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \frac{1}{1+\nu} \right) \right] \right\} \tag{2.11}$$

$$C_2 = \left[\left(1 + \frac{\tau_0 \xi_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \right) F\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{4} \xi_0^2 \right) - \frac{4\tau_0}{B \sqrt{\eta\rho}} \frac{1}{\xi_0} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{4} \xi_0^2 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{8}{\xi_0^2} \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4} \right) F^2\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{4} \xi_0^2 \right) - F\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{4} \xi_0^2 \right) \times \right.$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{-3/2+k}{k} \frac{2\xi_0^{2k}}{4^k k!} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \frac{1}{1+\nu} \right) +$$

$$+\frac{4}{\xi_0}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{1}{4}\,\xi_0{}^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{-3/2+k}{k}\;\frac{4k\xi_0{}^{2k-1}}{4^k k!}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{1+\nu}\right)\Bigg]^{-1}$$

Учитывая громоздкость формулы (2.10), можно построить приближенные решения уравнения (2.8) при малых и при больших значениях ξ.

При малых ξ из (2.1), отбрасывая малые порядка ξ^2 и выше, получим

$$f_1(\xi)=\frac{\tau_0\xi_0}{B\sqrt{\eta\rho}}\ln\frac{\xi_0}{\xi}-\frac{\tau_0\xi_0}{B\sqrt{\pi\rho}}-1 \tag{2.12}$$

При больших ξ решения уравнения (2.8) можно представить в виде

$$f_1(\xi)=C_1\xi+C_2\xi\int\frac{1}{\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)d\xi \tag{2.13}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условия (2.9).

Следует отметить, что решение (2.10), (2.12), а также (2.13) справедливо при $t\leqslant R^2/\alpha^2$.

Задачу можно решить и в случае, когда $\Delta p=\psi(t)\neq 0$ при $t>0$. В частности, если $\Delta p=a_1/b_1\sqrt{t}$, где a_1 и b_1—постоянные, то решение задачи автомодельно и решается аналогично.

Теперь рассмотрим частный случай, когда $r_0=\mathrm{const}$. Положим, что при $t<0$ имеет место стационарное движение, а при $t>0$ движение переходит к нестационарному и $\Delta p=0$. Определим скорость движения трубы, при котором r_0 будет постоянным. Уравнение движения будет (2.1). Начальное и граничные условия будут иметь вид (2.14)

$$U_z(r,0)=U_1(r),\qquad\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)_{r_0}=0,\qquad U_z(r_0,t)=-\frac{2\tau_0}{\rho r_0}t+U_1(r_0)$$

$$\begin{aligned}U_1(r)&=\frac{\Delta p}{4l\eta}(R^2-r^2)-\frac{\tau_0}{\eta}(R-r)\qquad&(r_0\leqslant r\leqslant R)\\U_1(r_0)&=\frac{\Delta p}{4l\eta}(R^2-r_0{}^2)-\frac{\tau_0}{\eta}(R-r_0)\qquad&(0\leqslant r\leqslant r_0)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.1) при условии (2.14) будет

$$U_z(r,t)=-\frac{2\tau}{\rho r_0}t+\frac{\tau_0}{2\eta r_0}(R^2-r^2)-\frac{\tau_0}{\eta}(R-r) \tag{2.16}$$

Для скорости движения трубы получим

$$U_z(R,t)=\frac{2\tau_0}{\rho r_0}t \tag{2.17}$$

В случае, если $\Delta p=\psi(t)\neq 0$ при $t>0$, уравнение движения будет

$$\rho\frac{\partial U_z}{\partial t}=\eta\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)-\frac{\tau_0}{r}+\frac{\Delta p(t)}{l} \tag{2.18}$$

Тогда для скоростей движения жидкости и трубы, при которых $r_0=\mathrm{const}$, получим

$$U_z(r,t)=-\frac{2\tau_0}{\rho r_0}t+\int_0^t\frac{\Delta p(t)}{\rho l}dt+\frac{\tau_0}{2\eta r_0}(R^2-r^2)-\frac{\tau_0}{\eta}(R-r) \tag{2.19}$$

$$U_z(R,t)=-\frac{2\tau_0}{\rho r_0}t+\int_0^t\frac{\Delta p(t)}{\rho l}dt \tag{2.20}$$

Поступила 5 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Изд-во Азернефть, 1959.
2. Сафрончик А. И. Неустановившееся течение вязко-пластичного материала между параллельными стенками. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Сафрончик А. И. Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязко-пластичной среде. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1961.