

УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ИЗГИБА ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН И БАЛОК СО СЛОЖНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Рассматриваются модифицированные трехмерные постановки задач изгиба однородных упругих пластин и балок. Модификация известных трехмерных постановок сводится к использованию дополнительных условий на функции перемещений. Преимущество предлагаемых постановок состоит в том, что они учитывают сложное крепление пластин и балок.

Ключевые слова: модифицированные теории пластин, метод конечных элементов.

Введение. Известные теории изгиба однородных упругих пластин и балок построены на ряде гипотез [1–4]. Введение гипотез, с одной стороны, упрощает процедуру решения таких задач (уменьшается их размерность), с другой — накладывает определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений, что порождает неустранимую погрешность в решениях. Кроме того, существующие теории изгиба однородных пластин и балок не способны учитывать их сложное крепление, например, в случае частично зашпеленной по торцу пластины. Конечно-элементные трехмерные модели однородных пластин и балок учитывают любое крепление и обеспечивают заданную погрешность сеточных решений, однако эти модели имеют большую размерность.

В данной работе рассматриваются модифицированные трехмерные постановки задач изгиба однородных упругих пластин и балок. Модификация трехмерных постановок сводится к использованию дополнительных условий на функции перемещений [5, 6]. Следует отметить, что выполнение этих условий в дискретных моделях пластин и балок приводит к значительному уменьшению их размерности. Предлагаемые дополнительные условия на функции перемещений задаются только в той области пластины (балки), которая удалена от закрепленной части границы. Таким образом, в окрестности крепления для полей перемещений, деформаций и напряжений никакие гипотезы не вводятся, т. е. в ней реализуется трехмерное напряженное состояние.

Преимущество предлагаемых постановок состоит в том, что реализация метода конечных элементов (МКЭ) для модифицированных постановок задач изгиба пластин и балок требует существенно меньшего объема памяти ЭВМ и времени счета, чем реализация МКЭ для трехмерных постановок. При этом предлагаемые постановки описывают трехмерное напряженное состояние в окрестности границ крепления пластин и балок, что позволяет учитывать сложные кинематические граничные условия.

1. Модифицированные трехмерные постановки задач изгиба пластин и балок. 1.1. Рассмотрим изотропную однородную линейно-упругую тонкую пластину, которая в декартовой системе координат xuz занимает область V . Срединная плоскость пластины совпадает с плоскостью xOy . Перемещения, деформации и напряжения пластины удовлетворяют соотношениям Коши и закону Гука [1]. Пластина нагружена поверхностными силами $q_z = q_z(x, y)$ и закреплена на границах S_α : $u = v = w = 0$, где u, v, w — функции перемещений; $\alpha = 1, \dots, M$ (M — общее число границ). Обозначим через V_α

подобласть, представляющую собой окрестность границы S_α . Подобласть V_α можно рассматривать как совокупность шаров радиуса $R_\alpha \geq C_\alpha$ (C_α — некоторые числа), центры которых являются точками границы S_α . Как показывают расчеты, на практике целесообразно использовать значения $C_\alpha \geq 2h_0$ (h_0 — толщина пластины), при этом выбирается такая форма области V_α , которая удобна для расчетов. Пусть $S_r = \sum S_\alpha$, $V_0 = V - V_r$, где $V_r = \sum V_\alpha$ ($V_0 \neq \emptyset$). Модифицированная постановка трехмерной задачи упругости в перемещениях для пластины V включает следующие уравнения:

$$\text{в } V: \quad A(\mathbf{u}) = \mathbf{p}; \tag{1}$$

$$\text{на } S_q: \quad B(\mathbf{u}) = \mathbf{q}, \quad \text{на } S_r: \quad u = v = w = 0; \tag{2}$$

$$\text{в } V_0: \quad \begin{aligned} u(x, y, z) &= -u(x, y, -z), & v(x, y, z) &= -v(x, y, -z), \\ u(x, y, 0) &= v(x, y, 0) = 0, & w(x, y, z) &= w(x, y, 0), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$; A — оператор уравнений равновесия; $\mathbf{p} = \{0, 0, 0\}^T$ — вектор объемных сил; B — оператор статических граничных условий; $\mathbf{q} = \{0, 0, q_z\}^T$ — вектор поверхностных сил; S_q — граница, на которой задана нагрузка \mathbf{q} ; $S = S_r + S_q$ — граница области V ; w — прогиб пластины.

Как показывают расчеты, для трехмерных однородных пластин равенства (3) выполняются приближенно, т. е.

$$\text{в } V_0: \quad \begin{aligned} |u^+ - u^-| &< \varepsilon_1, & |v^+ - v^-| &< \varepsilon_2, \\ |w^+ - w^-| &< \varepsilon_3, & |u(x, y, 0)| &< \varepsilon_4, & |v(x, y, 0)| &< \varepsilon_4. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ — малые числа; $u^+ = |u(x, y, z)|$; $u^- = |u(x, y, -z)|$; $v^+ = |v(x, y, z)|$; $v^- = |v(x, y, -z)|$; $w^+ = |w(x, y, z)|$; $w^- = |w(x, y, 0)|$.

В силу (4) решение, полученное при условиях (3), отличается от точного решения с погрешностью δ . Эта погрешность зависит от размеров подобластей V_α , которые определяются (для конкретного вида крепления пластины) с помощью численных экспериментов из условия, что погрешность решения δ не превышает заданной величины. Расчеты показывают, что с увеличением геометрических размеров подобластей V_α погрешность δ стремится к нулю.

Итак, модифицированная постановка трехмерной задачи упругости для однородной тонкой пластины отличается от трехмерной постановки (1), (2) введением для функций перемещений пластины дополнительных условий (3). При этом в областях V_α для полей перемещений, деформаций и напряжений не вводится никаких гипотез, т. е. в $V_r = \sum V_\alpha$ реализуется трехмерное напряженное состояние.

Рассмотрим модифицированную трехмерную конечно-элементную модель пластины V . Вначале построим дискретную (базовую) модель пластины, используя известную постановку трехмерной задачи упругости, т. е. соотношения (1), (2). Базовая модель состоит из конечных элементов V_e^h первого порядка, имеющих форму куба со стороной h ; $e = 1, \dots, N$ — общее число конечных элементов [7, 8]. Узловыми неизвестными элементов V_e^h являются значения перемещений u, v, w . Базовое разбиение пластины порождает трехмерную узловую сетку V_h с шагом h по осям x, y, z и размерностью $n_1 \times n_2 \times n_3$, где $n_3 = 2k_0 + 1$; k_0 — целое число. Для узлов сетки V_h введем целочисленную систему координат ijk (рис. 1). На рис. 1 $n_1 = 81, n_2 = 51, n_3 = 9, a = 80h, b = 50h, h_0 = 8h, k_0 = 4$. Реализация условий (3) для узлов сетки V_h , входящих в область V_0 , сводится к выполнению следующих равенств:

$$\forall (i, j, k) \in V_0: \quad \begin{aligned} u(i, j, k) &= -u(i, j, n_3 - k + 1), \\ v(i, j, k) &= -v(i, j, n_3 - k + 1), & k &= 1, \dots, k_0, \\ u(i, j, k_0 + 1) &= v(i, j, k_0 + 1) = 0, \\ w(i, j, k) &= w(i, j, k_0 + 1), & k &= 1, \dots, n_3, & k &\neq k_0 + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

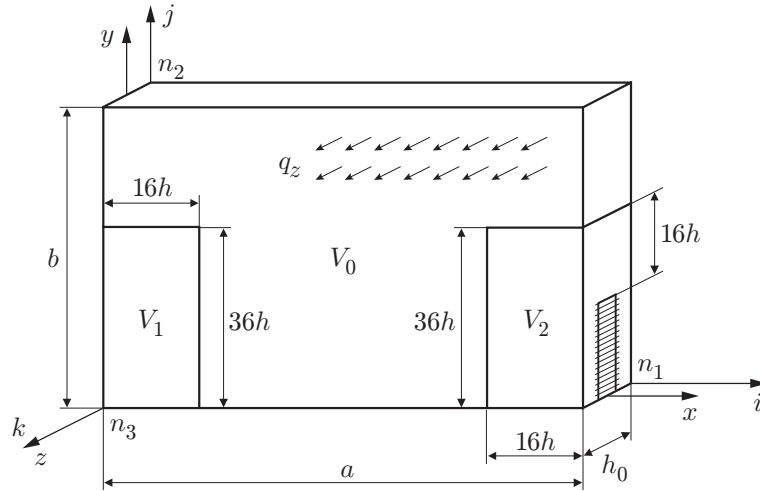


Рис. 1

где $u(i, j, k)$, $v(i, j, k)$, $w(i, j, k)$ — значения перемещений u , v , w узла (i, j, k) сетки V_h , координаты которого заданы в целочисленной системе координат ijk .

Выражение для потенциальной энергии Π базовой модели пластины запишем в матричной форме [7]

$$\Pi(\{\delta_h\}) = \{\delta_h\}^T [K_h] \{\delta_h\} / 2 - \{\delta_h\}^T \{P_h\}, \tag{6}$$

где $[K_h]$ — матрица жесткости базовой модели; $\{P_h\}$, $\{\delta_h\}$ — векторы узловых сил и узловых неизвестных.

Структуру вектора $\{\delta_h\}$ представим в виде

$$\{\delta_h\} = \{\{\delta_+^{uv}\} \{\delta_-^{uv}\} \{\delta_0^{uv}\} \{\delta_0^w\} \{\delta^w\} \{\delta\}\}^T, \tag{7}$$

где $\{\delta_-^{uv}\}$, $\{\delta_+^{uv}\}$, $\{\delta_0^{uv}\}$ — векторы перемещений u , v узлов сетки V_h , лежащих соответственно в областях $V_0^1 = \{x, y, z \in V_0, z < 0\}$, $V_0^2 = \{x, y, z \in V_0, z > 0\}$ и в плоскости $S_0 = \{x, y, z \in V_0, z = 0\}$; $\{\delta_0^w\}$, $\{\delta^w\}$ — векторы перемещений w узлов сетки V_h , расположенных в плоскости S_0 и в области $V_0^3 = \{x, y, z \in V_0, z \neq 0\}$; $\{\delta\}$ — вектор остальных узловых неизвестных базовой модели пластины.

Выполняя равенства (5) для узловой сетки V_h , получим

$$\{\delta_0^{uv}\} = 0, \quad \{\delta_-^{uv}\} = [A] \{\delta_+^{uv}\}, \quad \{\delta^w\} = [B] \{\delta_0^w\}, \tag{8}$$

где $[A]$ — квадратная матрица, каждый элемент которой равен либо нулю, либо -1 ; $[B]$ — прямоугольная булева матрица.

С учетом $\{\delta_0^{uv}\} = 0$ вектор (7) представим в виде

$$\{\delta_h\} = \{\{\delta_+^{uv}\} \{\delta_-^{uv}\} \{\delta_0^w\} \{\delta^w\} \{\delta\}\}^T. \tag{9}$$

Введем вектор узловых неизвестных модифицированной трехмерной дискретной модели пластины

$$\{\delta_0\} = \{\{\delta_+^{uv}\} \{\delta_0^w\} \{\delta\}\}^T. \tag{10}$$

Используя (8), (9), установим связь между векторами $\{\delta_h\}$ и $\{\delta_0\}$

$$\{\delta_h\} = [K] \{\delta_0\}, \tag{11}$$

где $[K]$ — прямоугольная матрица:

$$[K] = \begin{bmatrix} [E_1] & 0 & 0 \\ [A] & 0 & 0 \\ 0 & [E_2] & 0 \\ 0 & [B] & 0 \\ 0 & 0 & [E_3] \end{bmatrix},$$

$[E_k]$ — единичная матрица ($k = 1, 2, 3$). Подставляя (11) в (6), из условия $\partial\Pi/\partial\{\delta_0\} = 0$ получаем систему уравнений $[K_0]\{\delta_0\} = \{P_0\}$, где $[K_0] = [K]^T[K_h][K]$ — матрица жесткости; $\{P_0\} = [K]^T\{P_h\}$ — вектор узловых сил модифицированной трехмерной дискретной модели пластины.

Из сравнения (7) и (10) следует, что размерность вектора $\{\delta_0\}$ меньше размерности вектора $\{\delta_h\}$. Таким образом, размерность модифицированной дискретной модели пластины меньше размерности дискретной модели, построенной на основе трехмерной постановки (уравнений (1), (2)).

1.2. Рассмотрим изотропную однородную линейно-упругую балку, которая в декартовой системе координат xyz занимает область V . Ось балки совпадает с осью Ox , плоскости xOy и xOz являются горизонтальной и вертикальной плоскостями геометрической симметрии балки. Перемещения, деформации и напряжения балки удовлетворяют соотношениям Коши и закону Гука [1]. Балка нагружена поверхностными силами q_z , причем $q_z(x, y, z) = q_z(x, -y, z)$, т. е. функция q_z симметрична относительно плоскости zOx . Балка закреплена на границах S_α : $u = v = w = 0$, где $\alpha = 1, \dots, M$ (M — число областей границы, по которым закреплена балка). Обозначим через V_α^1, V_α^2 подобласти, включающие границу S_α , причем $V_\alpha^1 \subset V_\alpha^2$. Область V_α^1 (V_α^2) можно рассматривать как совокупность шаров радиуса $R_\alpha^1 \geq C_\alpha^1$ ($R_\alpha^2 \geq C_\alpha^2$), центры которых являются точками границы S_α . Как показывают расчеты, на практике целесообразно использовать значения $C_\alpha^1 \geq 2h_0$, $C_\alpha^2 \geq 4h_0$ (h_0 — характерный размер сечения балки). При этом выбирается такая форма области V_α^1 (V_α^2), которая удобна для расчетов. Обозначим $S_r = \sum S_\alpha$, $V_0^1 = V - V_r^1$, $V_0^2 = V - V_r^2$, где $V_r^1 = \sum V_\alpha^1$, $V_r^2 = \sum V_\alpha^2$ ($V_0^1 \neq \emptyset$, $V_0^2 \neq \emptyset$).

Модифицированная постановка трехмерной задачи упругости в перемещениях для однородной балки включает следующие уравнения: уравнения равновесия, статические и кинематические граничные условия (уравнения вида (1), (2)) и дополнительные условия на функции перемещений балки

$$\text{в } V_0^1: \quad \begin{aligned} u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0, \\ u(x, y, z) = -u(x, y, -z), \quad v(x, y, z) = -v(x, y, -z); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{в } V_0^2: \quad \begin{aligned} w(x, y, z) = w(x, y, 0), \quad v(x, y, z) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где w — прогиб балки.

Отметим, что в окрестностях границ (крепления балки) S_α (т. е. в V_r^1) реализуется трехмерное напряженное состояние. Удовлетворяя в дискретной базовой модели балки равенствам (12), (13) аналогично п. 1.1, получим модифицированную трехмерную дискретную модель балки.

2. Результаты численных экспериментов. 2.1. Рассмотрим трехмерную однородную изотропную пластину размерами $80h \times 50h \times h_0$ (h_0 — толщина пластины) (рис. 1). Пластина закреплена на границе $S_r = S_1 + S_2$, где $S_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 20h, -2h \leq z \leq 2h\}$, $S_2 = \{x = a, 0 \leq y \leq 20h, -2h \leq z \leq 2h\}$, т. е. при $x = 0$ и $x = a$ пластина частично защемлена. На рис. 1 граница S_2 заштрихована. Для границ S_1, S_2 принимаем $V_1 = V_2 = 16h \times 36h \times h_0$ (т. е. $C_1 = C_2 \geq 2h_0$). Базовая модель пластины (построенная на

Таблица 1

i	$j = 31$		$j = 51$	
	w_0	w_h	w_0	w_h
11	152,415	152,084	373,795	372,595
21	214,764	213,642	453,960	451,957
31	265,052	262,759	529,946	527,048
41	297,266	294,054	591,584	588,137
51	304,433	301,308	624,574	621,178
61	282,470	280,308	622,324	619,704
71	232,827	231,874	589,996	588,683
81	164,026	164,114	541,301	541,593

Таблица 2

x	$z = -0,5h$		$z = -1,5h$		$z = -2,5h$		$z = -3,5h$	
	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h
0,5h	5,1653	5,1588	10,1284	10,1040	15,2231	15,2028	11,6919	11,6910
4,5h	4,2264	4,2106	3,1628	3,1513	2,3911	2,3847	1,9803	1,9785
9,5h	3,1692	3,1439	2,2933	2,2757	1,5017	1,4917	0,8984	0,8948
29,5h	2,0083	1,9518	1,4318	1,3902	0,8678	0,8424	0,3351	0,3264
49,5h	2,2095	2,1251	1,5709	1,5082	0,9530	0,9145	0,3779	0,3655
69,5h	4,4536	4,4065	3,2092	3,1765	2,1327	2,1132	1,3613	1,3504
74,5h	6,2365	6,2096	4,5684	4,5482	3,3622	3,3496	2,7161	2,7095
79,5h	9,9274	9,9152	16,6218	16,5722	26,9340	26,8874	22,8005	22,7953

основе уравнений трехмерной задачи теории упругости) состоит из конечных элементов V_e^h первого порядка, имеющих форму куба со стороной h , и порождает узловую сетку V_h размерами $81 \times 51 \times 9$. Для узлов сетки V_h вводим целочисленную систему координат ijk (рис. 1). В узлах $(i, j, 9)$ сетки V_h пластина нагружена силами $q_z = 1,83$ ($i = 41, 36, 41, 46, \dots, 76$; $j = 41, 46$). Модуль Юнга пластины $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, $h = 0,5$.

Анализ результатов показывает, что решение w_h (прогиб пластины) дискретной модифицированной модели пластины отличается от решения w_0 базовой модели в окрестности максимальных (по модулю) перемещений не более чем на 0,54 %. В табл. 1 приведены значения перемещений w_0 , w_h ($k = 9$). В табл. 2 ($y = 20,5h$) представлены значения эквивалентных напряжений σ_h (по модифицированной модели) и σ_0 (по базовой модели), вычисленные в центре тяжести элементов V_e^h согласно четвертой теории прочности [9]. Максимальные напряжения σ_h наблюдаются в окрестности границы крепления пластины S_2 и отличаются от σ_0 не более чем на 0,18 %.

Базовая модель пластины содержит 110 907 узловых неизвестных, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 1410. Модифицированная модель имеет 63 243 неизвестных, лента СУ МКЭ шириной 1191 занимает объем памяти ЭВМ, в два раза меньший, чем лента СУ МКЭ базовой модели. Время реализации МКЭ для модифицированной модели почти в три раза меньше, чем для базовой.

2.2. Рассмотрим однородную изотропную призматическую балку размерами $144h \times 12h \times h_0$ (h_0 — высота сечения балки) (рис. 2). Балка закреплена на границе $S_r = S_1$, где $S_1 = \{x = 0, -6h \leq y \leq 6h, 0 \leq z \leq 8h\} \cup \{0 \leq x \leq 4h, -6h \leq y \leq 6h, z = -8h\}$, т. е. при $x = 0$ балка закреплена частично на левом торце и горизонтальной опоре $z = -8h$. На рис. 2 такое крепление балки отмечено штриховкой. Базовая модель балки состоит из конечных элементов V_e^h первого порядка, имеющих форму куба со стороной h , и порождает узловую сетку V_h размерами $145 \times 13 \times 17$. Для узлов сетки V_h введем целочисленную систему

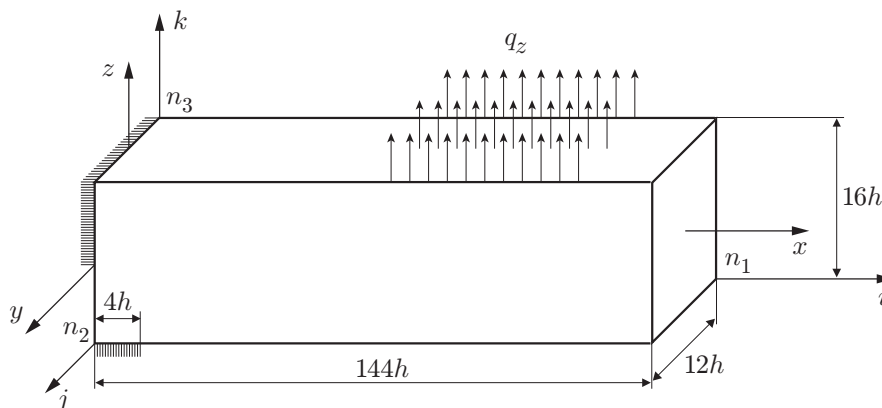


Рис. 2

Таблица 3

i	w_0	w_h	i	w_0	w_h
13	13,882	13,900	109	543,205	531,344
25	48,520	48,532	121	620,955	606,331
61	235,163	232,414	145	776,454	756,306
85	388,089	381,138			

Таблица 4

x	$z = -7,5h$		$z = -6,5h$		$z = 6,5h$		$z = 7,5h$	
	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h	σ_0	σ_h
0,5h	2,0007	1,9778	0,9427	0,9329	1,9559	1,9735	2,5064	2,5277
3,5h	5,2597	5,2167	1,7344	1,7178	2,0127	2,0293	2,3123	2,3281
4,5h	3,8302	3,8006	2,3034	2,2835	2,0013	2,0177	2,3144	2,3301
6,5h	2,7585	2,7390	2,2438	2,2259	2,0025	2,0188	2,3269	2,3428
8,5h	2,4592	2,4421	2,1151	2,0983	1,9964	2,0127	2,3174	2,3335
12,5h	2,2239	2,2076	1,9403	1,9239	1,9226	1,9388	2,2243	2,2404
24,5h	1,7294	1,7146	1,5032	1,4887	1,5073	1,5237	1,7355	1,7506
44,5h	0,9363	0,6817	0,8189	0,6051	0,8072	0,7289	0,9472	0,8332

координат ijk , как показано на рис. 2. Для данной балки принимаем $V_1^1 = \{x, y, z \in V, 0 \leq x \leq 36h\}$, $V_1^2 = \{x, y, z \in V, 0 \leq x \leq 68h\}$, т. е. при $x \geq 2h_0 + b_0$ ($C_1^1 \geq 2h_0$) выполняются условия (12), при $x \geq 4h_0 + b_0$ ($C_1^2 \geq 4h_0$) — условия (13), $b_0 = 4h$. В узлах сетки V_h с координатами $(i, j, 17)$ балка нагружена силами $q_z = 0,173$ ($i = 37 + 6(k - 1)$; $k = 1, \dots, 11$; $j = 2, 7, 12$). Модуль Юнга балки $E = 1$, $\nu = 0,3$, $h = 0,5$.

Анализ результатов показывает, что сеточные перемещения w_h (прогиб балки) дискретной модифицированной модели отличаются от перемещений w_0 базовой модели не более чем на 2,6 %. В табл. 3 приведены значения перемещений w_0, w_h ($j = 7, k = 17$). В табл. 4 ($y = 5,5h$) представлены значения эквивалентных напряжений σ_h (по модифицированной модели) и σ_0 (по базовой модели), вычисленные в центре тяжести элементов V_e^h согласно четвертой теории прочности. Максимальные напряжения σ_h наблюдаются в окрестности защемления балки и отличаются от σ_0 не более чем на 0,8 %.

Базовая модель балки содержит 95 628 узловых неизвестных, ширина ленты СУ МКЭ равна 708. Модифицированная дискретная модель имеет 37 834 неизвестных, лента СУ МКЭ шириной 748 занимает объем памяти ЭВМ, в 2,4 раза меньший, чем лента СУ МКЭ базовой модели. Время реализации МКЭ для модифицированной модели в 2,4 раза меньше, чем для базовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самуль В. И.** Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1970.
2. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Физматгиз, 1957.
3. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
4. **Васильев В. В.** Классическая теория пластин — история и современный анализ // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 46–58.
5. **Матвеев А. Д.** Новые трехмерные дискретные постановки прикладных задач теории упругости / Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 2001. Деп. в ВИНТИ 28.09.01, № 2060-В01.
6. **Матвеев А. Д.** Дополнительные условия на перемещения в трехмерном анализе пластин и балок композитной структуры / Ин-т вычисл. моделирования СО РАН. Красноярск, 2002. Деп. в ВИНТИ 24.10.02, № 1836-В2002.
7. **Норри Д., Де Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
8. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
9. **Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.** Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1975.

Поступила в редакцию 3/III 2003 г.
