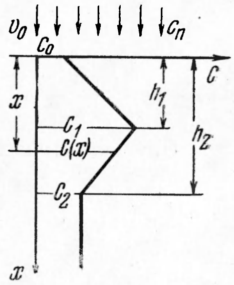
ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОЛЕЙ В ПОЧВОГРУНТОВОМ СЛОЕ

Л. М. Рекс

(Москва)

Промывка засоленных почв в настоящее время и в ближайшей перспективе занимает значительное место в мелиорации земель. На важность прогнозирования количественного перераспределения солей и дальнейшие теоретические исследования этого вопроса указывают многие исследователи ([1] и др.). Поэтому считаем целесообразным рассмотреть кинетику растворения и вымыва солей из почвогрунтов в районах с глубоким залеганием уровня грунтовых вод, т. е. без дренажа и при неравномерном засолении по глубине [2] (фиг. 1).



Фиг. 1

Для простейшего случая основное уравнение движения солей будет следующим [3,4]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} + \beta (C_{\text{н}} - C) \quad \left(V_0 = \frac{V}{m}\right) \tag{1}$$

Здесь C — концентрация почвенного раствора [*г/л*], t — время [*сутки*], x — расстояние [*м*], V — фактическая скорость движения воды в порах грунта, V_0 — скорость фильтрации [*м/сутки*], m — порозность, $C_{\text{н}}$ — предельная концентрация насыщения [*г/л*], β — коэффициент растворения [1/*сутки*], D^* — коэффициент конвективной (фильтрационной) диффузии [*м*^{2}/*сутки*].

Это уравнение предполагает линейное (одномерное) движение солей и воды вдоль оси x, постоянную скорость фильтрации $V_0 = \text{const}$ и независимость интенсивности растворения содержащихся в твердой фазе почвы солей от их объема и поверхности. При несоблюдении этих условий уравнение (1) усложняется [4].

Решение уравнения (1) будем искать при следующих начальных и краевых условиях:

при $t = 0$

$$C = C_0 + (C_1 - C_0)\, x / h_1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant h_1) \tag{2}$$

$$C = C_2 + (C_1 - C_2)(h_2 - x) / (h_2 - h_1) \quad (h_1 \leqslant x \leqslant h_2), \quad C = C_2 \quad (h_2 \leqslant x < \infty)$$

при $t > 0$

$$V(C - C_n) = D^* \frac{\partial C}{\partial x} \; (x = 0), \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \; (C = \text{const}) \; (x \to \infty)$$

Здесь j — характерные точки начального засоления (фиг. 1), C_j — значение концентрации в этих точках [*г/л*], h_j — расстояние от дневной поверхности почвогрунтов до j точки [*м*], $C_{\text{п}}$ — концентрация солей в поливных водах [*г/л*].

Подстановка [5]

$$C(x, t) = C_{\text{н}} + u(x, t) \exp\left[\frac{Vx}{2D^*} - \left(\frac{V^2}{4D^*} + \beta\right) t\right] \tag{3}$$

приводит уравнение (1) и условие (2) к виду

$$\partial u / \partial t = D^* \partial^2 u / \partial x^2 \tag{4}$$

при $t = 0$

$$u = \left(C_0 - C_{\text{н}} + \frac{(C_1 - C_0)\, x}{h_1}\right) \exp\left(-\frac{Vx}{2D^*}\right) \quad (0 \leqslant x \leqslant h_1)$$

$$u = \left(C_2 - C_{\text{н}} + \frac{(C_1 - C_2)(h_2 - x)}{h_2 - h_1}\right) \exp\left(-\frac{Vx}{2D^*}\right) \quad (h_1 \leqslant x \leqslant h_2)$$

$$u = (C_2 - C_{\text{н}}) \exp\left(-\frac{Vx}{2D^*}\right) \quad (h_2 \leqslant x < \infty) \tag{5}$$

при $t > 0$

$$D^* \frac{\partial u}{\partial x} - {}^1\!/_2 V u = V (C_{\text{н}} - C_{\text{п}}) \exp\left(\frac{V^2}{4D^*} + \beta\right) t \quad (x = 0)$$

$$D^* \frac{\partial u}{\partial x} + {}^1\!/_2 V u = 0 \quad (x \to \infty)$$

Введем вместо функции $u(x, t)$ новую функцию при помощи равенства

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t D^*}} \int_0^\infty f(\zeta) \exp\left(-\frac{(x-\zeta)^2}{4tD^*}\right) d\zeta \tag{6}$$

Здесь $f(\zeta)$ — функция, задающая начальное распределение солей, тогда

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t D^*}} \left\{ \int_0^{h_1} \left(C_0 - C_{\text{н}} + \frac{C_1 - C_0}{h_1}\zeta\right) f_0(\zeta)\, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{h_1}^{h_2} \left[C_2 - C_{\text{н}} + \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}(h_2 - \zeta)\right] f_0(\zeta)\, d\zeta + (C_2 - C_{\text{н}}) \int_{h_2}^{\infty} f_0(\zeta)\, d\zeta \right\} \tag{7}$$

$$f_0(\zeta) = \exp(-V\zeta / 2D^* - (x - \zeta)^2 / 2tD^*)$$

Опуская вычисления преобразования для $u(x, t)$, получим

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{V^2 t}{4D^*} - \frac{Vx}{2D^*}\right) \left\{ \left[C_0 - C_{\text{н}} + \frac{C_1 - C_0}{h_1}(x - Vt)\right] f_1(0; x) + \right.$$

$$+ \left[C_2 - C_1 + \frac{C_1 - C_0}{h_1}(Vt - x) + \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}(h_2 - x + Vt)\right] f_1(h_1; x) -$$

$$- \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}(h_2 - x + Vt) f_1(h_2; x) + 2\left(\frac{tD^*}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{C_1 - C_0}{h_1} f_2(0; x) - \right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{C_1 - C_0}{h_1} + \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}\right) f_2(h_1; x) + \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1} f_0(h_2; x)\right] \right. \tag{8}$$

$$f_1(h_2; x) = \operatorname{erfc}\left(\tfrac{1}{2} V \sqrt{t/D^*} + (h_2 - x) / 2\sqrt{tD^*}\right); \quad f_2(h_2; x) =$$
$$= \exp\left[-\left(\tfrac{1}{2} V \sqrt{t/D^*} + (h_2 - x) / 2\sqrt{tD^*}\right)^2\right]$$

Тогда уравнение (4) и условие (5) соответственно примут вид

$$\partial w / \partial t = D^* \partial^2 w / \partial x^2 \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad w = 0 \quad (t = 0) \tag{9}$$

при $t > 0$, $x = 0$

$$D^* \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{V}{2} w = V(C_{\text{н}} - C_{\text{п}}) \exp\left[\left(\frac{V^2}{4D^*} + \beta\right) t\right] + \tfrac{1}{2} \exp \frac{V^2 t}{4D^*} \times$$

$$\times \left\{ \left[V(C_0 - C_{\text{н}}) + (V^2 t + D^*) \frac{C_1 - C_0}{h_1}\right] f_1(0; 0) + \left[V(C_2 - C_0) + \right.\right.$$

$$+ (V^2 t + D^*) \frac{C_1 - C_0}{h_1} + (V h_2 + V^2 t + D^*) \left.\frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}\right] f(h_1; 0) -$$

$$- (V h_2 + V^2 t + D^*) \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1} f_1(h_2; 0) + \left(\frac{D^*}{\pi t}\right)^{1/2} (C_{\text{н}} - C_0) +$$

$$+ 2V \left(\frac{tD^*}{\pi}\right)^{1/2} \left.\frac{C_1 - C_2}{h_1}\right] f_2(0; 0) - 2V \left(\frac{tD^*}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{C_1 - C_0}{h_1} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1}\right] f_2(h_1; 0) + 2V \left(\frac{tD^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{C_1 - C_2}{h_2 - h_1} f_2(h_2; 0) \right\} \tag{10}$$

при $t > 0$, $x \to \infty$

$$D^* \partial w / \partial x + \tfrac{1}{2} V w = 0$$

В дальнейшем правую часть первого уравнения (10) обозначим через $f(t)$. Применим преобразование Лапласа — Карсона [6,7] к уравнениям (9), (10)

$$F(x, p) = p \int_0^\infty f(x, \tau) \exp(-p\tau)\, d\tau \tag{11}$$

После преобразования получим, сохраняя последовательность записи

$$D^* d^2 W / dx^2 - pW = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

$$p \frac{V}{2} W - pD^* \frac{dW}{dx} = F(p) \quad (x = 0), \quad \frac{V}{2} W + D^* \frac{dW}{dx} = 0 \quad (x \to \infty) \tag{12}$$

Решение первого уравнения (12) имеет вид (см., например, [8])

$$W = A\exp\left(x\sqrt{p/D^*}\right) + B\exp\left(-x\sqrt{p/D^*}\right) \tag{13}$$

Из второго и третьего уравнений (12) имеем

$$A = 0,\ B = -\frac{F(p)}{p\sqrt{D^*}H(p)}\quad \left(H(p) = \frac{V}{2\sqrt{D^*}} + \sqrt{p}\right) \tag{14}$$

Для $W(x, p)$, опуская несложные преобразования, найдем

$$W(x, p) = -\frac{F(p)F_1(x;\,0)}{p\sqrt{D^*}H(p)}\quad \left(F_1(x;\,h_2) = \exp\left[-\frac{Vh_2}{2D^*} - (h_2 + x)\left(\frac{p}{D^*}\right)^{1/2}\right]\right) \tag{15}$$

Учитывая, что

$$F(p) = \frac{Vp(C_н - C_п)}{p - (V^2/4D^* + \beta)} + \frac{\sqrt{p}(C_н - C_0)}{2}\left(\sqrt{D^*} - \frac{V}{H(p)}\right) + \frac{\sqrt{pD^*}(C_1 - C_0)}{2h_1H(p)}\times$$
$$\times\left[\frac{V(1 - F_1(0;\,h_1))}{H(p)} + \sqrt{D^*}(F_1(0;\,h_1) - 1)\right] + \frac{\sqrt{pD^*}(C_1 - C_2)}{2(h_2 - h_1)H(p)}\left[\frac{V(F_1(0;\,h_2) - F_1(0;\,h_1))}{H(p)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{D^*}(F_1(0;\,h_2) - F_1(0;\,h_2))\right] \tag{16}$$

получим решение в изображениях

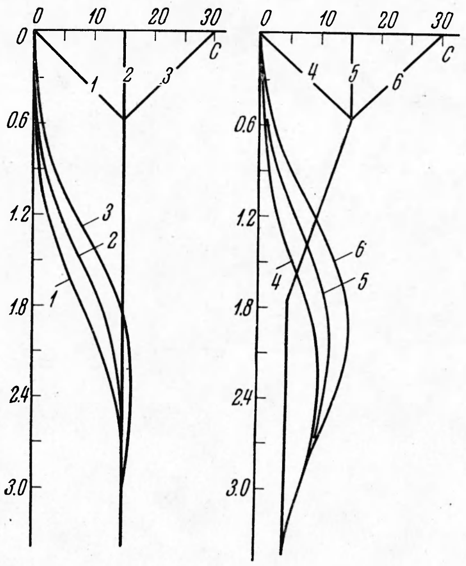
$$W(x, p) = \frac{V(C_п - C_н)F_1(x;\,0)}{\sqrt{D^*}\left[p - (V^2/2D^* + \beta)H(p)\right]} + \frac{\sqrt{p}(C_0 - C_н)F_1(x;\,0)}{2H(p)}\left[1 - \right.$$
$$\left. - \frac{V}{\sqrt{D^*}H(p)}\right] + \frac{\sqrt{p}(C_0 - C_1)}{2h_1H^2(p)}\left[\frac{V(F_1(x;\,0) - F_1(x;\,h_1))}{H(p)} + \sqrt{D^*}(F_1(x;\,h_1) - \right.$$
$$\left. - F_1(x;\,0))\right] + \frac{\sqrt{p}(C_2 - C_1)}{2(h_2 - h_1)H^2(p)}\left[\frac{V(F_1(x;\,h_2) - F_1(x;\,h_1))}{H(p)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{D^*}(F_1(x;\,h_1) - F_1(x;\,h_2))\right] \tag{17}$$

Переходя к оригиналу и учитывая последовательно уравнения (8) и (3), получим решение задачи (1), (2)

$$C = C_н + (C_п - C_н)\left[\frac{\omega_-(z)}{1+b} + \frac{\omega_+(z)}{1-b} - \frac{2\chi(z)}{1-b^2}\right] + \exp\left[-a(b^2-1)\right]\times$$
$$\times\frac{C_0 - C_н}{2}\operatorname{erfc}az_2 + 4a^2z_1\exp(4a^2z)\operatorname{erfc}az_1 - \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\exp(-a^2z_2^2) +$$
$$+ \frac{C_0 - C_1}{2(z_3 - z_1)}\left[\varphi(z_1) - \varphi(z_3) + z_2(\operatorname{erfc}az_2 - \operatorname{erfc}az_4) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}(\psi(z_3) - \psi(z_1) + \right.$$
$$\left. + \exp(-a^2z_4^2) - \exp(-a^2z_2^2))\right] + \frac{C_2 - C_1}{2(z_5 - z_3)}\left[\varphi(z_5) - \varphi(z_3) - z_6(\operatorname{erfc}az_4 - \operatorname{erfc}az_6) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}(\psi(z_3) - \psi(z_5) + \exp(-a^2z_4^2) - \exp(-a^2z_6^2)\right] + \frac{C_2 - C_0}{2}\operatorname{erfc}az_4 \tag{18}$$

$$\omega_\pm(z) = \exp\left[\pm 2a^2z(1+b)\right]\operatorname{erfc}a(1\pm b),\ \varphi(z_k) = (2a^2z_k^2 + z_k +$$
$$+ 1)\exp(4a^2z)\operatorname{erfc}az_k,\ \psi(z_k) = (2a^2z_k + 1)\exp\left[-a^2(z_k^2 - 4z)\right]\ (k = 1.\,3.\,5)$$
$$a = 1/2\,V\sqrt{tD^*},\ \chi(z) = \exp\left[a^2(1 + 4z - b^2)\right]\operatorname{erfc}a(1+z),\ z = x^\circ$$
$$(x^\circ = x/Vt),\ z_1 = 1 + x^\circ,\ z_3 = 1 + h_1^\circ + x^\circ\ (h_1^\circ = h_1/Vt)$$
$$z_4 = 1 + h_1^\circ - x^\circ,\ z_5 = 1 + h_2^\circ + x^\circ\ (h_2^\circ = h_2/Vt)$$
$$z_6 = 1 + h_2^\circ - x^\circ,\ b = \sqrt{1 + \Pi},\ z_2 = 1 - x^\circ$$

Здесь $\Pi = 4\beta D^* / V^2$ — параметр, характеризующий степень относа от места растворения [9].



Фиг. 2

Для хорошо растворимых солей и малом их содержании в твердой фазе (например хлор) уравнение (1) удовлетворительно описывает наблюдающиеся в натуре и экспериментах ра пределение солей без последнего члена, т. е.

$$\partial C / \partial t = D^* \partial^2 C / \partial x^2 - V \partial C / \partial x \tag{19}$$

Тогда решение уравнения (19) с граничными и начальными условиями (2) имеет вид

$$C = C_{\text{п}} + \frac{C_0 - C_{\text{п}}}{2}\left[\operatorname{erfc} az_2 + (4a^2 z_1 + 1)\exp(4a^2 z)\operatorname{erfc} az_1 - \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\exp(-a^2 z_2^2)\right] + \frac{C_0 - C_1}{2(z_3 - z_1)}\Big\{\varphi(z_1) - \varphi(z_3) + z_2(\operatorname{erfc} a z_2 - \operatorname{erfc} az_4) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}[\psi(z_3) - \psi(z_1) + \exp(-a^2 z_4^2) - \exp(-a^2 z_2^2)]\Big\} + \frac{C_2 - C_0}{2(z_5 - z_3)}\Big\{\varphi(z_5) - \varphi(z_3) - z_6(\operatorname{erfc} az_4 - \operatorname{erfc} az_6) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}[\psi(z_3) - \psi(z_5) + \exp(-a^2 z_4^2) - \exp(-a^2 z_6^2)]\Big\} + \frac{C_2 - C_0}{2}\operatorname{erfc} az_4. \tag{20}$$

Если начальное распределение солей представляется более сложной ломаной, то решение имеет вид

$$C = C_{\text{п}} + \frac{C_0 - C_{\text{п}}}{2}[\operatorname{erfc} a z_2 - \exp(4a^2 z)(\operatorname{erfc} az_1 - 4a \operatorname{ierfc} az_1)] + \sum_{j=0}^{n} \frac{C_j - C_{j+1}}{2a(h_{j+1}^{\circ} - h_j^{\circ})}[\operatorname{ierfc} az_{j+1}^{-} - \operatorname{ierfc} az_j^{-} + \exp(4a^2 z)(\operatorname{ierfc} az_{j+1}^{+} - \operatorname{ierfc} az_j^{+}) + 4a\exp(4a^2 z)(i^2\operatorname{erfc} az_j^{+} - i^2\operatorname{erfc} z_{j+1}^{+})] \tag{21}$$

$$z_j^{+} = 1 + h_j^{\circ} + x^{\circ}, \quad z_j^{-} = 1 + h_j^{\circ} - x^{\circ}$$

Таким образом, полученные решения (18), (20), (21) дают возможность описать перераспределение солей для ряда схем начального засоления.

Если имеет место равномерное засоление до промывки, то и решение имеет вид [1] и др.)

$$C = C_п + \frac{C_0 - C_п}{2}\left[\operatorname{erfc} az_2 + (4a^2 z_1 + 1)\exp(4a^2 z)\operatorname{erfc} az_1 - \frac{4a}{\sqrt{\pi}}\exp(-a^2 z_2^2)\right]$$

Для иллюстрации полученного решения для ряда характерных схем начального засоления сделаны расчеты при следующих данных: $D^* = 2{,}34 \cdot 10^{-3}$ *м²/сутки*, $V_0 = 0.01$ *м/сутки*, $m = 0{,}4$, $C_n = 0$; график построен для $t = 60$ *суткам.*

Приведенные графики (фиг. 2) наглядно иллюстрируют перераспределение солей при промывках в зависимости от начальной схемы засоления.

Автор считает, что предлагаемые формулы могут быть с успехом использованы для прогнозирования перераспределения солей в почвогрунтовом слое с учетом их свойств и свойств грунтов.

Поступила 10 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ним в Европейской части СССР. Сб. «Орошаемое земледелие в Европейской части СССР», Изд. «Колос», 1965.
2. Бирюкова А. П. Влияние орошения на водный и солевой режим почв южного Заволжья. Изд-во АН СССР, 1962.
3. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, предствляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 10.
4. Веригин Н. Н. О кинематике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. Сб. «Растворение и выщелачивание горных пород», Госстройиздат, 1957.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1948.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. Изд. «Высшая школа», 1965.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.
9. Аверьянов С. Ф., Цзе Да-лин. К теории промывки засоленных почв. Докл. Тимиряз. с.-х. акад., 1960, вып. 56.

К ЗАДАЧЕ О ШНЕКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА В СЛУЧАЕ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

В. П. Беломытцев (Воронеж)

В промышленности широкое применение имеют шнековые прессы и транспортеры. Теории шнека посвящен ряд работ [1,2], но при этом не учитывались значительная диссипация энергии в шнеках и зависимость вязкости жидкости от температуры.

В настоящей работе делается попытка учесть указанные факторы в случае следующей упрощенной схемы течения в шнеке, которая является общепринятой в первом приближении: движение жидкости обращается, и рассматривается течение материала в прямой прямоугольной трубе с одной подвижной стенкой при отсутствии градиента давления по оси шнека, т. е. рассматривается ненагруженный шнек.

Принимаем, что вязкость зависит от температуры по экспоненциальному [3] или гиперболическому закону

$$\mu = \mu_0 \exp(U / RT), \quad \mu = \mu_0 [1 + \alpha (T - T_0)]^{-1} \tag{1}$$

Здесь μ_0, U, α, T_0 — постоянные; R — газовая постояннная; T — абсолютная температура.

Поместим начало координат в левом углу прямоугольного сечения со сторонами a и b ($b \leqslant a$) и отнесем все размеры к величине b. Скорость отнесем к величине v_0 — скорости верхней крышки прямоугольного канала, направленной по оси z. Уравнения движения и энергии, учитывая диссипацию и пренебрегая переносом тепла по оси кана-